

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Fracturas en Modelos Estelares Relativistas Anisotropos

Henso Abreu

Tutor: Dr. Luis Nez. ULA, Mrida-Venezuela

5 de abril de 2007

Índice general

1. Ecuaciones de Einstein para un Fluido Esféricamente Simétrico	3
1.1. Ecuaciones de campo para configuraciones anisótropas	3
1.2. Ecuaciones dinámicas	4
1.3. Una breve revisión acerca de los fluidos anisótropos en Relatividad General	6
1.4. Condiciones de acoplamiento	8
2. Fractura	11
3. Objetos Compactos con una Ecuación de Estado No Local	14
3.1. Configuraciones estáticas con la <i>EENL</i>	15
3.2. Objetos compactos con una ecuación de estado local politropa	18
3.2.1. Presiones radiales de configuraciones estáticas con <i>EELP</i>	19
4. Fracturas de Configuraciones <i>EENL</i> y <i>EELP</i>	21
4.1. Fracturas en configuraciones no locales	21
4.2. Fracturas en configuraciones locales	23
4.3. Análisis de resultados	26
5. Conclusiones	28

Resumen

Discutimos el efecto que las fluctuaciones pequeñas de densidad y anisotropía local (tensiones principales desiguales) pueden tener en la aparición de fracturas en objetos compactos esféricos que satisfacen una ecuación de estado no local y una ecuación de estado pólitropa local. La ecuación de estado no local proporciona, en un punto dado, la presión radial no sólo como una función de la densidad en ese punto, sino como un funcional que considera la contribución de toda la configuración de materia encerrada hasta ese punto. Encontramos que estas fluctuaciones deben tener igual signo y los efectos de las perturbaciones en la densidad son cualitativamente diferentes a las variaciones en la anisotropía.

Introducción

La relatividad general es, entre todas las teorías propuestas para describir la interacción gravitacional, la que goza de mayor aceptación en la comunidad científica.

Las ecuaciones de Einstein, forman la base de esta teoría y relacionan la geometría del espacio tiempo (tensor de Einstein) con la distribución de materia (tensor de energía-impulso).

Para resolver este sistema de ecuaciones en el interior de una distribución material, es preciso proveer además de condiciones de frontera y/o condiciones iniciales, información adicional sobre la física local (e.g. ecuaciones de estado).

Cuando las ecuaciones de Einstein se resuelven en el vacío, la distribución de materia, fuente del campo gravitacional, es descrita como una singularidad. Es relevante recalcar que existe un buen número de escenarios en los cuales las diferentes variables que caracterizan la distribución material juegan un papel determinante en la evolución del objeto autogravitante, incluso en presencia de campos gravitacionales muy intensos.

En otras palabras, existe una gran variedad de situaciones en las cuales el objeto autogravitante evolucionará de una forma u otra (completamente diferente) dependiendo de manera fundamental de especificaciones de la física local (o no local), incluso cuando los efectos relativistas no sean despreciables. En algunos casos estos efectos podrán actuar sinérgicamente con los aspectos locales (o no locales), potenciando estos últimos.

La estructura del siguiente trabajo es la siguiente. En el próximo capítulo [1](#) presentaremos las ecuaciones de Einstein para un fluido anisótropo, esféricamente simétrico, aprovecharemos también para presentar las condiciones de acoplamiento. El capítulo [2](#) está dedicado al concepto de fractura y su relación con la anisotropía local. En el capítulo [3](#) estudiaremos como se construyen objetos compactos con una Ecuación de Estado No Local (*EENL*) par-

ricular. Luego las fracturas de configuraciones con la *EENL* serán estudiadas en el capítulo 4. Finalmente se incluyen algunas conclusiones y comentarios generales en el capítulo 5.

Capítulo 1

Ecuaciones de Einstein para un Fluido Esféricamente Simétrico

1.1. Ecuaciones de campo para configuraciones anisótropas

En el presente trabajo estaremos utilizando un elemento de línea en coordenadas tipo Schwarzschild el cual está dado por

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.1)$$

con $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, es el ángulo sólido. Donde $\nu(t, r)$ y $\lambda(t, r)$ son funciones de sus argumentos. Las coordenadas están numeradas de la siguiente manera: $x^0 = t; x^1 = r; x^2 = \theta; x^3 = \phi$. La métrica, dada por la expresión (1.1) tiene que satisfacer las ecuaciones de Einstein

$$R^\nu{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu{}_\mu R = -8\pi T^\nu{}_\mu \quad (1.2)$$

donde, como es usual, $R^\nu{}_\mu$, R y $T^\nu{}_\mu$ denotan el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de energía impulso, respectivamente. Trabajaremos además con unidades “geometrizadas”, de manera que la velocidad de la luz y la constante de gravitación se toman iguales a 1.

Las ecuaciones de campo resultantes son:

$$-8\pi T^0{}_0 = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r} \left[\frac{1}{r} - \lambda' \right], \quad (1.3)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r} \left[\nu' + \frac{1}{r} \right], \quad (1.4)$$

$$-8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = -\frac{e^{-\nu}}{4} \left(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\lambda - \dot{\nu}) \right) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \quad y, \quad (1.5)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (1.6)$$

donde los puntos y la primas indican derivación con respecto a t y r , respectivamente. Para dotar a las componentes del tensor de energía impulso T^ν_μ de significado físico, aplicaremos el Principio de Equivalencia siguiendo el esquema propuesto por Bondi [1].

Para ello, comenzaremos por introducir coordenadas Minkowskianas (τ, x, y, z) en cada punto del espacio tiempo

$$d\tau = e^{\nu/2} dt, \quad dx = e^{\lambda/2} dr, \quad dy = r d\theta, \quad dz = r \sin \theta d\phi. \quad (1.7)$$

Supondremos ahora que para un observador comóvil(en cada punto) con la materia, cuya velocidad con respecto a las coordenadas localmente Minkowskiana llamaremos ω , el contenido físico de la fuente consiste en un fluido anisótropo con densidad de energía ρ , presión radial P_r y presión tangencial P_\perp .

Al exterior de la configuración, el espacio tiempo está descrito por la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\Omega^2. \quad (1.8)$$

donde M , es la masa total de la configuración.

1.2. Ecuaciones dinámicas

En la teoría general de la relatividad, a diferencia del electromagnetismo, las ecuaciones de movimiento no son independientes de las ecuaciones de campo, sino una consecuencia de éstas.

En efecto, las ecuaciones de movimiento expresadas por

$$T^\mu_{\nu;\mu} = 0 \quad (1.9)$$

se obtienen a partir de (1.2) y las identidades de Bianchi.

De manera que el conjunto de las ecuaciones (1.9) no aporta ninguna información que no éste ya contenida en (1.3)-(1.6). Sin embargo en muchos de los casos, la forma explícita de (1.9) puede ser más útil a la hora de integrar el sistema y/o dar una interpretación a una situación determinada.

Al calcular directamente

$$T^{\mu}_{1;\mu} = 0 \quad (1.10)$$

o bien, derivando (1.4) con respecto a r , y usando las otras ecuaciones de campo, se obtiene

$$(-8\pi T^1_1)' = \frac{16\pi}{r} (T^1_1 - T^2_2) + 4\pi\nu' (T^1_1 - T^0_0) + \frac{e^\nu}{r} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right) \quad (1.11)$$

Nosotros estaremos considerando el caso estático que

$$T^0_0 = \rho; \quad T^1_1 = -P_r; \quad T^2_2 = -P_\perp \\ \ddot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = 0$$

de manera que (1.11) se transforma en

$$P'_r = -(\rho + P_r) \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} (P_\perp - P_r). \quad (1.12)$$

La ecuación (1.3), puede ser formalmente integrada al dar

$$e^{-\lambda} = 1 - 2\frac{m}{r}, \quad (1.13)$$

donde la *función masa* $m(r)$, ha sido definida por

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (1.14)$$

esta corresponde a la masa dentro de una esfera de radio r , la cual es vista por un observador distante.

Finalmente, de (1.12), (1.13) y (1.4) la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov (*TOV*) anisótropa [2] puede ser escrita como:

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right) + \frac{2}{r} (P_\perp - P_r). \quad (1.15)$$

1.3. Una breve revisión acerca de los fluidos anisótropos en Relatividad General

Desde el trabajo pionero de Bowers y Liang [2] se ha venido creando una literatura dedicada a el estudio de configuraciones estáticas esféricamente simétricas anisótropas en relatividad general. Las investigaciones teóricas de Ruderman (1972) [3] sobre la existencia de modelos estelares más realistas muestran que la materia nuclear puede ser anisótropa al menos en ciertos escenarios cuyos rangos de densidades son muy altos ($\rho > 10^{15}g/cm^3$), y donde las interacciones nucleares deben ser tratadas desde un punto de vista relativista. De acuerdo con esta visión en tales objetos estelares masivos la presión radial no es igual a la presión tangencial. Por lo tanto, pareciera que ningún cuerpo celeste está compuesto puramente de un fluido perfecto. Así la anisotropía en las presiones puede ser introducida por la existencia de un núcleo sólido o por la presencia de superfluidos del tipo 3A (Canuto 1973) [4], (Kippenhahn y Weigert 1990) [5], diferentes tipos de transiciones de fases (Sokolov 1980) [6], condensación de piones (Sawyer 1972) [7] o por otros fenómenos físicos. Sobre la escala de las galaxias, (Binney y Tremaine 1987) [8] han considerado anisotropías en galaxias esféricas, desde un punto de vista puramente Newtoniano.

La mezcla de dos gases (hidrógeno mono-atómico, o hidrógeno ionizado y electrones) puede ser descrita como un fluido anisótropo (Letelier 1980 [9], Bayin 1982 [10]). Bowers y Liang [2] han investigado (desde una perspectiva totalmente relativista) la posible importancia de ecuaciones de estado localmente anisótropas para fluidos relativistas esféricos al realizar la generalización de la ecuación de equilibrio hidrostático que incluye los efectos locales de la anisotropía. Sus estudios demuestran que la anisotropía posee efecto sobre parámetros tales como la masa máxima de equilibrio y la superficie de corrimiento al rojo gravitacional. Heintzmann y Hillebrandt (1975) [11] encontraron (utilizando una perspectiva totalmente relativista) que al no considerar los requerimientos de estabilidad en modelos de estrellas de neutrones anisótropas ultradensas que poseen anisotropías arbitrariamente grandes no existe masa limitante ni superficie de corrimiento al rojo gravitacional limitante. Hillebrandt y Steinmetz (1976) [12] consideraron el problema de estabilidad de modelos estelares relativistas de estrellas de neutrones anisótropas. Ellos derivaron una ecuación diferencial para las pulsaciones radiales y demostraron que existe un criterio de estabilidad

estático similar al obtenido para los modelos isótropos. Los fluidos esféricos anisótropos han sido analizados utilizando diferentes propuestas en la forma de la anisotropía de las presiones (factor de anisotropía), en Consenza, Herrera, Esculpi y Witten (1981) [13], Bayin (1982) [10], Herrera, L., Ibañez, J. & Di Prisco, A. (1991) [14], en donde introducen al tensor de deformación (“shear”) como fuente de inhomogenidad en algunos modelos estelares relativistas, Carot y Núñez (2005) [15], demuestran que para una clase de familias de espacios-tiempos (“Warped B”), la anisotropía viene dada por el tensor de deformación (“shear”), para modelos estelares con deformación (“con shear”). Gokrhoo y Mehra (1994) [16], encontraron una solución, con la cual bajo circunstancias particulares [17], se llega a una ecuación de estado similar a la ecuación de estado newtoniana de Bethe-Börner-Sato para materia nuclear [18]. Para esferas estáticas en la cual la presión tangencial es diferente a la presión radial, Bondi (2002) [19] estudió la relación entre el valor en la superficie del potencial y la mayor proporción entre el tensor de presión y la densidad local. Chan, Herrera y Santos (1993) [20] estudiaron en detalle el rol jugado por la presión local anisótropa en el impulso inicial de inestabilidades y demostraron que pequeñas anisotropías podrían, en principio, cambiar drásticamente la estabilidad del sistema. Herrera y Santos (1995) [21] realizaron la extensión del criterio de inestabilidad de Jeans en Gravedad Newtoniana a sistemas con presiones anisótropas. Las siguientes revisiones son referencia obligadas en el tema de fluidos esféricos isótropos y anisótropos Herrera y Santos (1997) [22] y Delgaty y Lake (1998) [23].

Recientemente Hernández y Núñez (2004) [24] presentaron un método general para obtener soluciones estáticas esféricamente simétricas anisótropas que satisfacen una Ecuación de Estado No Local [25] a partir de perfiles de densidades conocidos. Stewart (1982) [26] y posteriormente Herrera y colaboradores (2001) [27] generaron modelos estelares anisótropos, al asumir la condición de que el tensor de Wyl se anule. Luego ellos utilizaron la expresión resultante para encontrar nuevas soluciones interiores conformemente planas a la ecuaciones de Einstein para un fluido localmente anisótropo. Muñoz y Núñez (2006) [28] utilizaron este mismo argumento y la Ecuación de Estado No Local [25] para estudiar el efecto de exfoliación térmica en un modelo esféricamente simétrico anisótropo que satisface dicha Ecuación de Estado No Local. Demostraron además que una solución de Stewart cumplía con las condiciones impuestas por la Ecuación de Estado No Local.

En los últimos años algunas clases de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que describen configuraciones estelares estáticas esféricamente

simétricas anisótropas fueron presentadas por Mak y Harko (2003) [29], Dev y Gleiser (2004) [30], Chaisi y Maharaj (2006) [31], [32].

1.4. Condiciones de acoplamiento

La región interior, cuyo espacio tiempo está descrito por el elemento de línea (1.1), y la región exterior, descrita por la métrica (1.8), están separadas por la superficie $r = r_\Sigma(t)$.

Para acoplar ambas soluciones (externa e interna) sobre dicha superficie, es necesario satisfacer ciertas condiciones conocidas con el nombre de condiciones de acoplamiento.

El propósito último de dichas condiciones es el de evitar la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas sobre la superficie de acoplamiento.

Las condiciones de acoplamiento fueron definidas por primera vez, de manera matemáticamente rigurosa, por Darmois [33]. De acuerdo con Darmois, la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento de dos regiones del espacio tiempo sobre una hipersuperficie, son que, la métrica inducida sobre ella (primera forma fundamental) y sus derivadas covariantes del vector normal, proyectada sobre dicha hipersuperficie, (segunda forma fundamental) sean continuas a través de la misma.

Años más tarde, Lichnerowicz [34] propuso un conjunto alternativo de condiciones de acoplamiento que, como demostraron Bonnor y Vickers [35] son equivalentes a las condiciones de Darmois.

Así pues, para acoplar las dos métricas (1.1) y 1.8) sobre la hipersuperficie $r = r_\Sigma(t)$ vamos, primero que todo, a exigir la continuidad de la primera forma fundamental a través de $r = r_\Sigma(t)$, es decir

$$[e^\nu - e^\lambda \dot{r}_\Sigma^2]_\Sigma dt^2 = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}_\Sigma^2 \right]_\Sigma dt^2 \quad (1.16)$$

es evidente que la ecuación (1.16) es satisfecha si

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \quad (1.17)$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \quad (1.18)$$

Escribiendo la ecuación de la frontera en la forma

$$\Psi \equiv r - r_\Sigma = 0 \quad (1.19)$$

queda claro que el vector unitario normal a dicha superficie está dado por

$$\nu_\mu^{(+)} = \frac{\partial_\mu \Psi}{(-\partial_\alpha \partial_\beta \Psi g^{\alpha\beta})^{1/2}} \quad (1.20)$$

donde (+) indica que las componentes son evaluadas del lado externo de Σ . A partir de (1.19) y (1.20), se obtiene

$$\eta_\mu^{(+)} = (-\beta \dot{r}_\Sigma, \beta, 0, 0) \quad (1.21)$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\left(\left[1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right] - \left[1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right]^{-1} \dot{r}_\Sigma^2 \right)^{1/2}} \quad (1.22)$$

De igual manera se obtiene, sin dificultad, la expresión para el vector unitario normal a Σ , evaluado desde el interior

$$\eta_\mu^{(-)} = (-\dot{r}_\Sigma \gamma, \gamma, 0, 0) \quad (1.23)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{(e^{-\lambda_\Sigma} - \dot{r}_\Sigma^2 e^{-\nu_\Sigma})^{1/2}} \quad (1.24)$$

Definamos ahora el vector unitario tipo tiempo v^μ tal que

$$v^\mu v_\mu = 1 \quad (1.25)$$

Las componentes de dicho vector se pueden escribir como

$$v^{\mu(+)} = \beta \delta_t^\mu + \beta \dot{r}_\Sigma \delta_r^\mu \quad (1.26)$$

y

$$v^{\mu(-)} = e^{\nu_\Sigma/2} \delta_t^\mu \quad (1.27)$$

En lugar de escribir las condiciones de acoplamiento en su forma usual, continuidad de la primera y segunda formas fundamentales, vamos a exigir la continuidad de la primera forma (ver ecuaciones (1.17) y (1.18)).

Así pues requeriremos (además de (1.17) y (1.18))

$$(T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (1.28)$$

$$(T_{\mu\nu}n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu}n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (1.29)$$

En nuestro caso $T_{\mu\nu}^{(+)} = 0$, de las condiciones de acoplamiento (1.28) y (1.29) implica que $[P_r]_\Sigma = 0$.

Claramente las condiciones de continuidad (1.17) y (1.18) definen que

$$M \equiv m(a). \quad (1.30)$$

con a el radio de la configuración.

Capítulo 2

Fractura

El concepto de fractura (“cracking”), fue introducido hace algunos años por Herrera y colaboradores en una serie de publicaciones [36, 37, 38, 39, 40], para describir el comportamiento de una distribución de fluido en el preciso momento en que ésta sale del equilibrio dinámico cuando aparecen fuerzas radiales de diferente signo en la distribución.

Se dice que ocurre una fractura cuando la fuerza radial está dirigida hacia el centro en la región más interna de la esfera y cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial. En el caso opuesto, cuando la fuerza está dirigida hacia afuera en la parte interior y cambia de dirección en las regiones más externas de la esfera, diremos que hay un inversión (“overturning”). Intuitivamente resulta claro que un efecto como la fractura, debe poder describirse en términos de las aceleraciones de marea de los elementos de fluido [38].

Para llevar a cabo tal descripción, usaremos una generalización de la ecuación de la desviación geodésica para el caso en el cual las partículas no se mueven a lo largo de geodésicas.

Dicha ecuación se escribe como [39, 41]

$$a^\alpha = \left[-R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta u^\delta + h^\alpha_\beta \left(\frac{du^\beta}{ds} \right)_{;\gamma} - \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du_\gamma}{ds} \right] \delta_\perp x^\gamma \quad (2.1)$$

donde h^α_β denota el proyector sobre el triespacio ortogonal a la cuadrivelocity u^α ; δx^γ es el vector que une dos partículas vecinas, y

$$\delta_\perp x^\gamma = h^\gamma_\beta \delta x^\beta, \quad \frac{du^\alpha}{ds} = u^\mu u_{;\mu}^\alpha.$$

la aceleración relativa (de marea) a^α de dos partículas vecinas está definida por

$$a^\alpha = h^\alpha_{\beta} u^\gamma (u^\beta_{;\mu} \delta_\perp x^\mu)_{;\gamma} \quad (2.2)$$

Además, definiendo

$$R \equiv \frac{dP_r}{dr} + (\rho + P_r) \left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \right) - \frac{2}{r} (P_\perp - P_r). \quad (2.3)$$

donde R define la fuerza radial total sobre cada elemento de fluido, y a su vez es justamente la ecuación de equilibrio hidrostático, la cual se desvanece para configuraciones estáticas (o que evolucionan lentamente), y pueden ser obtenidas al considerar una distribución de materia esféricamente simétrica con una velocidad de rotación prácticamente nula, es decir, $2\Omega^2 = \Omega^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta} = 0$. Al evaluar las ecuaciones (2.2) y (2.3) inmediatamente después de la perturbación obtenemos [38, 39]

$$R = -\frac{e^\lambda (\rho + P_r)}{e^{\nu/2} r^2} \int_0^a d\tilde{r} e^{\nu/2} \tilde{r}^2 \frac{d\Theta}{ds} \quad (2.4)$$

donde Θ representa la expansión (ver referencia [38], para los detalles de la deducción). Así pues para que ocurra una fractura para algún valor de r comprendido en $0 \leq r \leq a$ (dígase $r = \tilde{r}$), con a el radio de la estrella, es necesario que $d\Theta/ds$ cambie de signo (sea cero) en algún valor del interior de la configuración. Vale la pena señalar el carácter no local de la fractura implícito en (2.4). En efecto, el cambio de signo en R no depende del valor de $d\Theta/ds$ en un punto, sino en toda la región por debajo de la fractura.

Condiciones para la fractura

Supongamos ahora que el sistema en consideración, está caracterizado por una cierta distribución de presión y densidad de energía que satisfacen (2.3), es sacado fuera del equilibrio por una perturbación.

Aparece entonces una fuerza radial total ($R \neq 0$) la cual, dependiendo de su distribución, puede conducir a fracturas o inversiones de la fuente. Antes de proceder al análisis del problema en cuestión, es pertinente hacer algunos comentarios sobre el esquema perturbativo que conduce a desviaciones del equilibrio.

Está claro, por la definición de fractura, que es imperativo que las perturbaciones que actúan sobre el sistema saquen a éste del equilibrio. En otras

palabras, vamos a considerar exclusivamente perturbaciones bajo las cuales el sistema sea dinámicamente inestable.

Una manera de garantizar la salida del equilibrio es considerar materiales cuyo cociente de calores específicos no sea igual (en el momento de la perturbación) al valor crítico requerido para la estabilidad marginal dinámica. Otra forma, completamente equivalente, de introducir inestabilidad en el sistema, consiste en suponer que bajo perturbaciones de densidad y anisotropía local, la presión radial del sistema conserva la misma dependencia radial que tenía en el equilibrio.

$$R = R(\rho_0 + \delta\rho, P_r, \Delta_0 + \delta\Delta) \equiv \underbrace{R_0(\rho_0, P_r, \Delta_0)}_{=0} + \tilde{R}(\rho_0, P_r, \Delta_0, \delta\rho, \delta\Delta) \quad (2.5)$$

Esta falta de capacidad de respuesta del fluido, para adaptar su presión radial a la situación perturbada, equivale a suponer que la relación presión-densidad (el cociente de los calores específicos) nunca alcanza el valor requerido para el equilibrio marginal (neutro).

Evidentemente, en este caso, la ecuación (2.3) no será satisfecha ($R \neq 0$) después de la perturbación.

Capítulo 3

Objetos Compactos con una Ecuación de Estado No Local

Estaremos estudiando una ecuación de estado particular, la cual proporciona, en un punto dado, la presión radial $P_r(r)$, no sólo como una función de la densidad de energía, $\rho(r)$, en ese punto, sino como un funcional que considera la contribución de toda la configuración de materia encerrada hasta ese punto. Para esta ecuación de estado no local (*EENL*), cualquier cambio en la presión radial toma en cuenta los efectos de la variación de la densidad de energía, dentro de un volumen entero [24, 25, 28]. Está demostrado que en el límite estático la *EENL* puede ser escrita como

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{\mathcal{C}}{2\pi r^3} \quad (3.1)$$

donde \mathcal{C} es una constante arbitraria de integración. Está claro que en la ecuación (3.1) se encuentra presente el comportamiento colectivo de las variables físicas $\rho(r)$ y $P_r(r)$.

Así re-escribiendo la ecuación (3.1), como una ecuación diferencial

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{\mathcal{C}}{2\pi r^3} \quad \Leftrightarrow \quad \rho - 3P_r + r(\rho' - P_r') = 0 \quad (3.2)$$

y las ecuaciones de campo correspondientes para un fluido anisótropo con la *EENL* puede ser escritas como:

$$8\pi\rho = \frac{2m'}{r^2}, \quad (3.3)$$

$$8\pi P_r = \frac{2m'}{r^2} - \frac{4m}{r^3}, \quad y \quad (3.4)$$

$$8\pi P_\perp = \frac{m''}{r} + \frac{2(m'r - m)}{r^3} \left[\frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, está claro que si se proporciona el perfil de densidad, $\rho(r)$ el elemento métrico $m(r)$ y todas las otras variables físicas (P_r y P_\perp) pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de campo (3.3), (3.4) y (3.5).

3.1. Configuraciones estáticas con la *EENL*

Se escogieron cuatro perfiles de densidad de energía diferentes, los cuales son capaces de generar (al insertar el perfil de densidad en las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5)) soluciones estáticas esféricamente simétricas anisótropas que satisfacen la *EENL*.

Ejemplo 1: El primer perfil de densidad estudiado fue propuesto por Stewart [26], para describir una configuración estática conformemente plana anisótropa.

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(e^{4Kr} + 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3} \Leftrightarrow m = \frac{r}{2} \left(\frac{e^{2Kr} - 1}{e^{2Kr} + 1} \right)^2 \quad (3.6)$$

con $K = \text{constante}$

$$P_r = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{1 - (e^{2Kr})(e^{4Kr} - 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3} \quad y \quad P_\perp = \frac{2K^2 e^{4Kr}}{\pi[1 + e^{2Kr}]^4} \quad (3.7)$$

la K constante se determina por la condición de contorno $M = m(r = a)$

$$K = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (3.8)$$

esto es cierto siempre y cuando la presión se anule en la superficie $P_r(r = a) = 0$ tendremos:

$$e^{4Ka} - 8Ka e^{2Ka} - 1 = 0 \quad (3.9)$$

Ejemplo 2: El perfil de densidad del segundo ejemplo fue encontrado por P.S. Florides [42], pero también, este corresponde a diferentes soluciones, reportadas por Stewart [26] y más recientemente por M.K. Gokhroo y A.L. Mehra [16]. Esta última solución, representa una serie de densidades y presiones, con la cual bajo circunstancias particulares [17], se llega a una ecuación de estado similar a la ecuación de estado newtoniana de Bethe-Börner-Sato para materia nuclear [18].

$$\rho = \frac{\rho_0}{8\pi} \left[1 - K \frac{r^2}{a^2} \right] \Leftrightarrow m = \frac{\rho_0 r^3}{6} \left[1 - \frac{3K}{5} \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (3.10)$$

con K y $\rho_0 = \text{constantes}$

$$P_r = \frac{\rho_0}{120\pi a^2} [5a^2 - 9Kr^2] \quad y \quad (3.11)$$

$$P_\perp = \frac{\rho_0}{120\pi a^2} \left[\frac{18\rho_0 K^2 r^6 - 5a^2 r^2 K(3\rho_0 r^2 + 54) + 25a^4(\rho_0 r^2 + 3)}{5a^2(3 - \rho_0 r^2) + 3\rho_0 K r^4} \right] \quad (3.12)$$

de las condiciones en la superficie $r = a$, $M = m(a)$ y $P_r(a) = 0$.

$$K = \frac{5}{9} \quad y \quad M = \frac{\rho_0 a^3}{9} \quad (3.13)$$

Ejemplo 3: El perfil de densidad de este ejemplo corresponde a la solución original propuesta por M. Wyman [43]. La misma solución fue encontrada también por [44, 45, 46, 47, 48].

$$\rho = -\frac{C}{8\pi} \frac{K(3+5x)}{(1+3x)^{\frac{5}{3}}} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2C^{\frac{1}{2}}} \frac{Kx^{\frac{3}{2}}}{(1+3x)^{\frac{2}{3}}} \quad (3.14)$$

con $x = Cr^2$ y $K, C = \text{const.}$

$$P_r = \frac{C}{8\pi} \frac{K(x-1)}{(1+3x)^{\frac{5}{3}}} \quad y \quad (3.15)$$

$$P_\perp = \frac{CK}{8\pi} \frac{(1+3x)^{\frac{2}{3}}(x^2+4x-1) + Kx(3x^2+8x+1)}{(1+3x)^{\frac{8}{3}}[Kx + (1+3x)^{\frac{2}{3}}]} \quad (3.16)$$

donde

$$K = -2^{\frac{7}{3}} \frac{M}{a} \quad y \quad x_1 = Ca^2 \quad (3.17)$$

La constante K ha sido obtenida con las condiciones de contorno y al evaluar la presión en la superficie ($P_r(a) = 0$) se determina la constante de integración: $C = \frac{1}{a^2}$.

Ejemplo 4: EL próximo perfil de densidad fue utilizado por Stewart [26] y posteriormente reencontrado por Muñoz y Núñez [28] usando la *EENL* [25].

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 - \frac{\sin(2Kr)}{Kr} + \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \Leftrightarrow m = \frac{r}{2} \left[1 - \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \quad (3.18)$$

con $K = \text{constante}$

$$P_r = -\frac{1}{8\pi r^2} \left[1 + \frac{\sin(2Kr)}{Kr} - 3 \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \quad y, \quad (3.19)$$

$$P_{\perp} = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 - \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \quad (3.20)$$

la K constante se determina por la condición de contorno $M = m(r = a)$, y al solucionar

$$\frac{\sin Ka}{Ka} = \left(1 - \frac{2M}{a} \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

esto es cierto siempre y cuando la presión se anule en la superficie $P_r(r = a) = 0$ tendremos:

$$1 + \frac{\sin(2Ka)}{Ka} - 3 \frac{\sin^2(Ka)}{K^2 a^2} = 0 \quad (3.22)$$

En el cuadro 3.1 se encuentran los parámetros que se usaron en los modelos de las secciones 3.1 y 3.2.1. Donde la masa M , se representa en terminos de la masa solar M_{\odot} , el potencial gravitacional en la superficie $\frac{M}{a}$ y z_a la superficie de corrimiento al rojo gravitacional.

Perfil de densidad	M/a	$M(M_{\odot})$	z_a
Stewart	0,32	2,15	0,6
Gokhroo-Mehra	0,40	2,80	1,2
Wyman	0,38	2,54	1,0
Stewart2	0,44	3,00	1,9

Cuadro 3.1: Todos los parametros escogidos para representar posibles (aproximados) objetos compactos con $a = 10$ Km. donde las funciones masas correspondientes satisfacen las codiciones físicas y de energia.

3.2. Objetos compactos con una ecuación de estado local polítropa

La idea principal de este trabajo es explorar si la ecuación de (*EENL*) favorece o no la aparición de fracturas. Para ello compararemos con una ecuación de estado local polítropa (*EELP*) [49] (3.23) para configuraciones de materia anisótropa, ya que ésta representa una familia de ecuaciones de estado parametrizada por el índice polítropo. Con esta ecuación de estado podemos encontrar modelos estelares anisótropos con los mismos perfiles de densidad utilizados en la sección 3.1 (ecuaciones (3.6), (3.10), (3.14), (3.18)).

$$P_r = k\rho^{\Gamma}, \quad \text{si } \Gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{y } \rho = \rho_0\theta(r) \quad \Rightarrow P_r = k\rho_0^{\frac{1}{n}}\rho_0\theta^{1+\frac{1}{n}}, \quad (3.23)$$

de [49] $k\rho_0^{\frac{1}{n}} = \sigma = \frac{P_0}{\rho_0}$, con P_0 y ρ_0 , representando la presion central y la densidad central, respectivamente.

Al introducir la ec. (3.23) en la ec.(2.3) junto con algunos de los perfiles de densidad que estamos estudiando, como se muestra a continuación

$$\rho \rightarrow k\rho^{\Gamma} = P_r \quad \text{para } R = 0 \Rightarrow \Delta_{Politropa} \quad (3.24)$$

y para cada perfil de densidad, para configuraciones en el equilibrio, la anisotropía local, $\Delta_{Politropa} \propto \frac{P_{\perp} - P_r}{r}$, es obtenida.

3.2.1. Presiones radiales de configuraciones estáticas con EELP

Ejemplo 5 (Stewart polítopo): En este ejemplo utilizamos el perfil de densidad de la ec. (3.6) para obtener:

$$P_r = \frac{3K^2\sigma}{8\pi} \left[\frac{1}{3K^2r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(e^{4Kr} + 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3} \right]^{1+\frac{1}{n}} \quad (3.25)$$

donde $K = \text{constante}$, la cual se calcula con la ec. (3.8). Esto es cierto siempre y cuando la presión se anule en la superficie $P_r(r = a) = 0$ tendremos:

$$e^{4Ka} + 8Kae^{2Ka} - 1 = 0 \quad (3.26)$$

Ejemplo 6 (Gokhroo y Mehra polítopo): Usando el perfil de densidad de la ec. (3.10) se obtiene:

$$P_r = \sigma \left(\frac{\rho_0}{8\pi} \right) \left[1 - K \frac{r^2}{a^2} \right]^{1+\frac{1}{n}} \quad (3.27)$$

con ρ_0 y $K = \text{constantes}$.

De las condiciones en la superficie $r = a$, $M = m(a)$ y $P_r(a) = 0$.

$$K = 1 \quad y \quad M = \frac{\rho_0 a^3}{15} \quad (3.28)$$

Ejemplo 7 (Wyman polítopo): Con el perfil de densidad de la ec. (3.14) obtenemos:

$$P_r = -\frac{3CK\sigma}{8\pi} \left[\frac{3 + 5x}{3(1 + 3x)^{5/3}} \right]^{1+\frac{1}{n}} \quad (3.29)$$

con $x = Cr^2$, y $K, C = \text{const.}$

Donde

$$K = \frac{(2^7 5)^{1/3} M}{3} \frac{1}{a} \quad y \quad x_1 = Ca^2 \quad (3.30)$$

La constante K ha sido obtenida con las condiciones de contorno y al evaluar la presión en la superficie ($P_r(a) = 0$) se determina la constante de integración: $C = -\frac{3}{5a^2}$.

Ejemplo 8 (Stewart 2 polítropo): Al usar el perfil de densidad de la ec. (3.18) obtenemos:

$$P_r = \sigma \rho_0 \left(\frac{1}{K^2 r^2} \left[1 - \frac{\sin(2Kr)}{Kr} + \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \right)^{1+1/n}, \text{ con } \rho_0 = \frac{K^2}{8\pi} \quad (3.31)$$

la K constante se determina por la condición de contorno $M = m(r = a)$, y al solucionar la ec(3.21). Esto es cierto siempre y cuando la presión se anule en la superficie $P_r(r = a) = 0$ tendremos:

$$1 - \frac{\sin(2Ka)}{Ka} + \frac{\sin^2(Ka)}{K^2 a^2} = 0 \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Fracturas de Configuraciones *EENL* y *EELP*

Para los modelos estudiados en la sección 3.1 con *EENL*, $P_0 = \frac{\rho_0}{3}$, esto nos permite escribir todas las variables físicas de los *ejemplos 1, 2, 3 y 4* como una función adimensional (al introducir la variable adimensional $\eta = r/a$) multiplicada por la densidad central ρ_0 y la relación masa-radio. Tomando en cuenta lo anterior dicho la ec.(2.5) se puede escribir como:

$$\tilde{R} = \frac{2}{\eta} \delta \Delta \left[\left(\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \right) \frac{3\delta\rho}{2\delta\Delta} - 1 \right] \quad (4.1)$$

Debido a que nuestro objetivo es comparar las fracturas generadas al perturbar las configuraciones *no locales* y *locales*, la ec.(4.1) también podrá ser utilizada en los modelos con *EELP*, al exigir que $\sigma = \frac{1}{3}$.

4.1. Fracturas en configuraciones no locales

Para todos los modelos de la sección 3.1, calculamos la fuerza radial inducida con la ec.(4.1).

Así para el modelo de Stewart (ejemplo 1), obtuvimos:

$$\tilde{R}_{Stewart\ NL} = \frac{2}{\eta} \delta \Delta \left[c\eta \frac{(e^{2c\eta} - 1)}{(e^{2c\eta} + 1)} \frac{3}{2} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} - 1 \right] \quad (4.2)$$

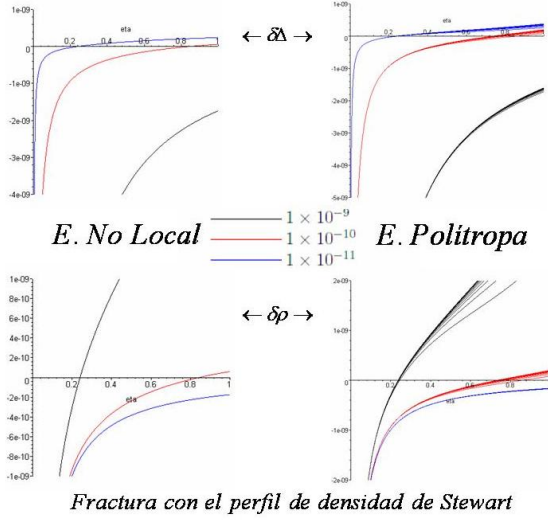


Figura 4.1: La fuerza radial inducida con el perfil de densidad de Stewart. El lado izquierdo corresponde a el modelo no local, mientras que el lado derecho corresponde a la familia de ecuaciones politropas para diferentes valores del índice polítripo, n .

con $c = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]$. Su gráfica se muestra en la figura 4.1.

Para el ejemplo 2, la fuerza radial perturbada (4.1) es:

$$\tilde{R}_{G\&M\ NL} = \frac{2}{\eta} \delta \Delta \left[\frac{3\mu\eta^2 \left(1 - \frac{6}{5}K\eta^2\right)}{\left(1 - \frac{3}{5}K\right) - 2\mu\eta^2 \left(1 - \frac{3}{5}K\eta^2\right)} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} - 1 \right] \quad (4.3)$$

con $K = \frac{5}{9}$ y $\mu = \frac{M}{a}$. La gráfica para la ecuación (4.3) se muestra en la figura 4.2.

La fuerza perturbada para el ejemplo 3, se escribe como:

$$\tilde{R}_{Wyman\ NL} = \frac{2}{\eta} \delta \Delta \left[\frac{-k\eta^2}{(1 + 3\eta^2)^{2/3} + k\eta^2} \left(\frac{1 + \eta^2}{1 + 3\eta^2} \right) \frac{3}{2} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} - 1 \right] \quad (4.4)$$

con $k = -2^{7/3} \left(\frac{M}{a}\right)$. La gráfica para la ecuación (4.4) se muestra en la figura 4.3.

Finalmente del ejemplo 4, la expresión para $\tilde{R}_{Stewart_2\ NL}$ puede ser escrita como:

$$\tilde{R}_{Stewart_2\ NL} = \frac{2}{\eta} \delta \Delta \left[\left(\frac{c\eta}{\sin(c\eta)} \right)^2 \left(\frac{\sin^2(c\eta)}{c^2\eta^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2c\eta)}{c\eta} \right) \frac{3}{2} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} - 1 \right] \quad (4.5)$$

donde $c = Ka$, es solución a la ec.(3.21). Esta se representa gráficamente en la figura 4.4.

4.2. Fracturas en configuraciones locales

Igual que en la sección 4.1, calculamos la fuerza radial inducida en los ejemplos de la sección 3.2.1 con la ec.(4.1).

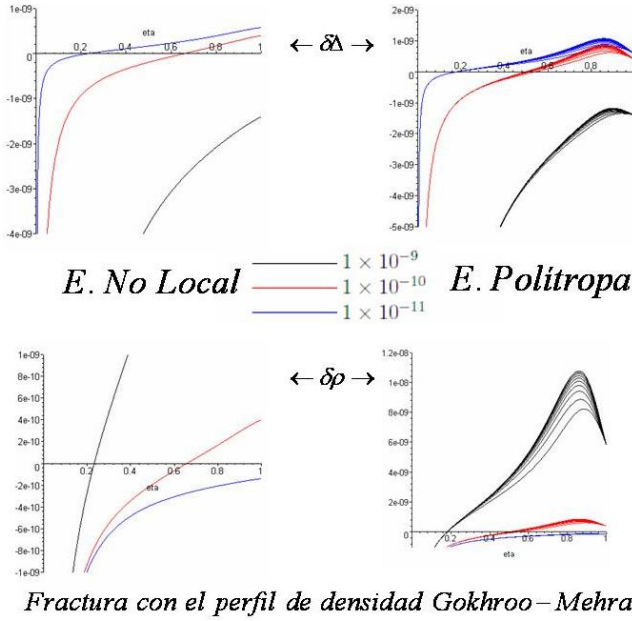


Figura 4.2: La fuerza radial inducida con el perfil de densidad de Gokrhoo-Mehra. El lado izquierdo corresponde a el modelo no local, mientras que el lado derecho corresponde a la familia de ecuaciones politropas para diferentes valores del índice politropo, n .

Para el modelo de Stewart (ejemplo 5), la expresión $\tilde{R}_{Stewart\ Politropo}$ puede ser escrita como:

$$\tilde{R}_{Stewart\ Politropo} = \frac{2}{\eta} \delta\Delta \left[\left(\frac{e^{2c\eta} + 1}{2e^{c\eta}} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{e^{2c\eta} - 1}{e^{2c\eta} + 1} \right)^2 + \right. \right. \quad (4.6)$$

$$+\frac{3}{2}c^2\eta^2\sigma\left[\frac{1}{3c^2\eta^2}\frac{(e^{2c\eta}-1)(e^{4c\eta}+8c\eta e^{2c\eta}-1)}{(e^{2c\eta}+1)^3}\right]^{1+\frac{1}{n}}\left[\frac{\delta\rho}{2\sigma\delta\Delta}-1\right]$$

con $c = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]$. Su gráfica se muestra en la figura 4.1.

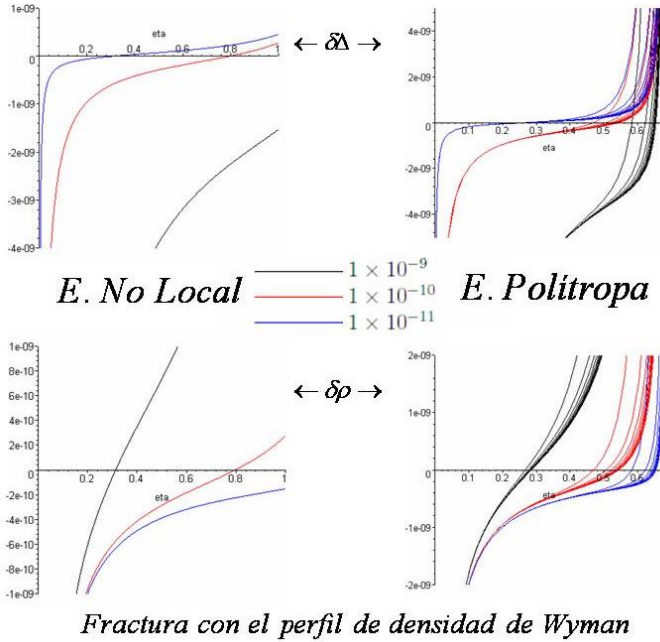


Figura 4.3: La fuerza radial inducida con el perfil de densidad de Wyman. El lado izquierdo corresponde a el modelo no local, mientras que el lado derecho corresponde a la familia de ecuaciones polítropas para diferentes valores del índice polítropo, n .

La fuerza radial total inducida para el modelo polítropo de Gokhroo y Mehra es:

$$\tilde{R}_{G\&M \text{ Polítropo}} = \frac{2}{\eta}\delta\Delta \left[\frac{\mu\eta^2}{\left(1 - \frac{3}{5}K\right) - 2\mu\eta^2 \left(1 - \frac{3}{5}K\eta^2\right)} \right] \left(\right.$$

$$1 - \frac{3}{5}K\eta^2 + 3\sigma [1 - K\eta^2]^{1+1/n} \left) \frac{3}{2} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} - 1 \right] \quad (4.7)$$

$K = 1$, con $\mu = \left(\frac{M}{a}\right)$. La gráfica para la ecuación (4.7) se muestra en la figura 4.2.

La expresión para $\tilde{R}_{Wyman \text{ Politropo}}$ puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{Wyman \text{ Politropo}} = & \frac{2}{\eta} \delta\Delta \left[\frac{-Kx(1+3x)^{2/3}}{(1+3x)^{2/3} + Kx} \left(\frac{1}{(1+3x)^{2/3}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3\sigma \left[\frac{3+5x}{3(1+3x)^{5/3}} \right]^{1+1/n} \right) \left(\frac{3}{4} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} \right) - 1 \right] \quad (4.8) \end{aligned}$$

con $x = -\frac{3}{5}\eta^2$ y $K = \frac{(2^{75})^{1/3}}{3} \frac{M}{a}$. La gráfica para la ecuación 4.8 se muestra en el figura 4.3.

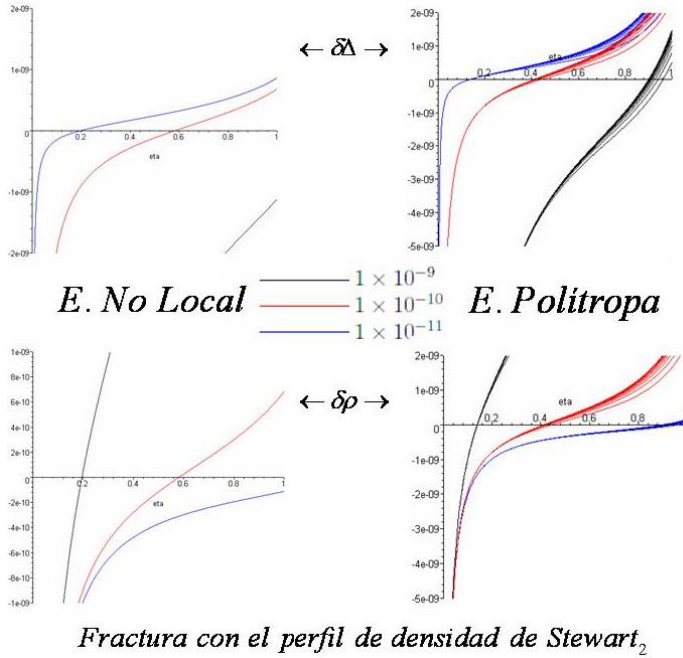


Figura 4.4: La fuerza radial inducida con el perfil de densidad de Stewart 2. El lado izquierdo corresponde a el modelo no local, mientras que el lado derecho corresponde a la familia de ecuaciones polítropas para diferentes valores del índice polítropo, n .

Finalmente la $\tilde{R}_{Stewart_2 \text{ Politropo}}$, se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{Stewart_2 \text{ Politropo}} = & \frac{2}{\eta} \delta \Delta \left[\left(\frac{c\eta}{\sin(c\eta)} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin^2(c\eta)}{c^2\eta^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sigma c^2 \eta^2 \left[\frac{1}{c^2\eta^2} \left(1 - \frac{\sin(2c\eta)}{c\eta} + \frac{\sin^2(c\eta)}{c^2\eta^2} \right) \right]^{1+1/n} \right) \frac{3}{4} \frac{\delta\rho}{\delta\Delta} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $c = Ka$, es solución a la ec.(3.21). Esta se representa gráficamente en la figura 4.4.

4.3. Analisis de resultados

La metodología para estudiar las influencias de la fractura y su incidencia de la ecuación de estado (en las configuraciones de las secciones 4.2 y 4.1) es la siguiente:

- Fijamos un valor para la perturbación en la densidad ($\delta\rho = 1 \times 10^{-10}$), al mismo instante estaremos variando la perturbación de la anisotropía en $\delta\Delta = 1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-11}$. Para estos valores estudiaremos si existe o no existe fractura (o inversión) en el modelo.
- El segundo paso es muy similiar al primero, y consiste en fijar un valor para la perturbación de la anisotropía ($\delta\Delta = 1 \times 10^{-10}$), simultaneamente variamos el valor de la perturbación en la densidad en $\delta\rho = 1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-11}$. Y al igual que en el caso anterior, estudiaremos si ocurre la aparición de fractura (o inversión) en el modelo.
- Para la familia de ecuaciones polítopas obtenidas para las fracturas, el índice polítopo estara tomando los siguientes valores

$$n = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$$

En las gráficas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4, se muestran las respectivas las fracturas generadas con las dos familias de ecuaciones de estado consideradas, en el lado izquierdo de cada una de ellas corresponde al modelo no local y el lado derecho corresponde a la familia de ecuaciones polítopas. Para estas encontramos que la única manera de obtener fracturas en el interior de la configuración , es que ambas perturbaciones posean el mismo signo $\delta\rho > 0 \wedge \delta\Delta > 0$

o $\delta\rho < 0 \wedge \delta\Delta < 0$. De las mismas podemos darnos cuentas que perturbaciones muy pequeñas en la anisotropía resultan más convenientes para generar inestabilidad, decimos esto al notar que para este tipo de perturbaciones la configuración se fractura cada vez mas cerca del su centro, que es donde los valores de las variables físicas como las presiones y la densidad son máximos. Para las variaciones en la densidad notamos que ocurre totalmente lo contrario, es decir se genera inestabilidad con valores en la perturbación cada vez más grandes, esto se nota claramente en las partes inferiores de las gráficas.

Por ultimo para las ecuaciones de las fracturas de los configuraciones no locales y locales, la aparición de la fractura (cambio de signo en las \tilde{R}), proviene directamente de la perturbación de la densidad, ya que la perturbación en la anisotropía es la misma para todas las configuraciones.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos explorado la influencia que originan las fluctuaciones de densidad y anisotropía sobre la estabilidad de algunas configuraciones de materia en Relatividad General. Para las cuales encontramos que al salir del equilibrio se puede conducir a la aparición de fracturas (o inversiones), y que esto se encuentra relacionado no solo a fluctuaciones en la anisotropía local, sino necesariamente también a fluctuaciones de la densidad. De hecho, por lo menos para las familias de ecuaciones de estado que consideramos, la manera de obtener fracturas en el interior de la configuración, ambas perturbaciones deben tener el mismo signo, es decir $\delta\rho > 0 \wedge \delta\Delta > 0$ o $\delta\rho < 0 \wedge \delta\Delta < 0$.

Para estudiar el efecto de estas perturbaciones implementamos el concepto de Fracturas de configuraciones de materia anisótropa autogravitante, desarrollado por Herrera y colaboradores en una serie de publicaciones [36, 37, 38, 39, 40]. Este fue introducido para describir el comportamiento de una distribución de fluido en el preciso momento en que ésta sale del equilibrio dinámico, cuando aparecen fuerzas radiales de diferente signo en la distribución. Como establecimos en el capítulo 2 cada vez que la fuerza radial perturbada ec.(2.5) está dirigida hacia el centro en la región más interna de la esfera y cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial, se dice que hay una Fractura. En el caso opuesto, cuando la fuerza está dirigida hacia afuera en la parte interior y cambia de dirección en las regiones más externas de la esfera, diremos que hay un inversión (“overturning”).

A fin de comparar los efectos de estos tipos de perturbaciones, consideramos dos familias de ecuaciones de estado las cuales difieren en sus relaciones entre la presión radial y la densidad. El primer tipo, conocida como ecuación de estado no local (ver referencias [24, 25, 27]) proporciona, en un punto

dado, la presión radial no sólo como una función de la densidad en ese punto, sino como un funcional que considera la contribución de toda la configuración de materia encerrada hasta ese punto. La segunda familia de ecuaciones de estado es la ecuación local polítropa anisótropa ec.(3.23). Los dos tipo de modelos tienen la misma descripción física y perfiles de densidad equivalentes, ((3.6), (3.10), (3.14) y (3.18)).

Como podemos apreciar de las figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 los efectos de las perturbaciones en la densidad y la anisotropía local son cualitativamente diferentes. Es evidente que al ser más grandes las fluctuaciones en la densidad tenemos, mayor posibilidad de fracturar la esfera. Inversamente, la estabilidad de las configuraciones revelan que poseen mucha sensibilidad para pequeñas perturbaciones en la anisotropía de las presiones. Perturbaciones muy pequeñas en la anisotropía resultan más efectivas para generar inestabilidad en las configuraciones. Además, de las expresiones para la fuerza radial total inducida(ecuaciones (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9)), está claro que el cambio de signo proviene de la perturbación en la densidad (y no de la perturbación de la anisotropía) porque la contribución de la anisotropía a la inestabilidad es equivalente para todos los modelos. Sin embargo, debe existir alguna perturbación en la anisotropía para que la Fractura ocurra.

Por último, ésta claro que nuestra comprensión del comportamiento de estrellas compactas ultradensas está íntimamente relacionada con el entendimiento de la física de densidades supranucleares. Las propiedades de la materia en tales estados son esencialmente desconocidas, en gran parte debido a la imposibilidad actual de corroborar experimentalmente las teorías que describen la microfísica del sistema. En particular, se desconoce aún la ecuación de estado propuesta a partir de extrapolaciones de datos de aceleradores de altas energías. De allí, la importancia de explorar lo que está permitido o no por las leyes de la Física en este contexto.

Bibliografía

- [1] Bondi, H. (1964), *Proc. R. Soc. London*, **A281**, 39.
- [2] Bowers, R & Liang, E.P. (1974), *Astrophys. J.*, **188**, 657.
- [3] Ruderman, M. (1972), *Ann. Rev. Astr. Ap.*, **10**, 427-476.
- [4] Canuto, (1973), *Neutron Stars: General Review* (Solvay Conference on Astrophysics and Gravitation, Brussels, 1973).
- [5] Kippenhahn, R. & Weigert, A. *Stellar Structure and Evolution* (Springer, Berlin, 1990).
- [6] Sokolov, A.I. (1980), *JEPT*, **79**, 1137 – 1140.
- [7] Sawyer, R.F. (1972), *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 382 – 385.
- [8] Binney, J. & Tremaine, J.S., *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987).
- [9] Letelier, P. (1980), *Phys. Rev. D*, **22**, 807 – 813.
- [10] Bayin, S.S. (1982), *Phys. Rev. D*, **26**, 1262 – 1274.
- [11] Heintzmann H. & Hillebrandt, W. (1975), *Astron. Astrophys.* **38**, 51–55.
- [12] Hillebrandt, W. & Steinmetz, K.O. (1976), *Astron. Astrophys.* **53**, 283 – 287.
- [13] Cosenza, M., Herrera, L., Esculpi, M. & Witten, L. (1981), *J. Math. Phys.*, **22**, 118 – 125.
- [14] Herrera, L., Ibañez, J. & Di Prisco, A. (1991), *Gen. Rel. Grav.*, **23(4)**, 431.

- [15] Carot, J. & Núñez, L.A., (2005), *Hydrodynamics in Class B Warped Spacetime*, <http://lanl.arxiv.org/abs/gr-qc/0507066>.
- [16] Gokhroo, M.K. & Mehra, A.L. (1994), *Gen. Rel. Grav.*, **26**, 75.
- [17] Martínez, J., (1996), *Phys. Rev. D*, **53**, 6921.
- [18] Bethe, H.A., Börner, G. & Sato, K. (1970), *Astron. Astrophys.*, **7**, 279.
- [19] Bondi, H. (1992), *Month. Not. R. Astron. Soc.*, **259**, 365 – 368.
- [20] Chan, R., Herrera, L. & Santos, N.O. (1993), *Month. Not. R. Astron. Soc.* **265**, 533 – 544.
- [21] Herrera, L. & Santos, N.O. (1995), *Astrophys. J.* **438**, 308 – 313.
- [22] Herrera, L. & Santos, N.O. (1997), *Phys. Reports*, **286**, 53 – 130.
- [23] Delgaty, M.S.R. & Lake, K. (1998), *Comput. Phys. Commun.*, **115**, 395. <http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9809013>.
- [24] Hernández, H. & Núñez, L.A. (2004), *Can. J. Phys.*, **82(1)**, 29.
- [25] Hernández, H., Núñez, L.A. & Percoco, U. (1999), *Class. Quantum Grav.*, **16**, 871.
- [26] Stewart, B.W. (1982), *J. Phys. A. Math. Gen.*, **15**, 2419 – 2427.
- [27] Herrera, L., Di Prisco, A., Ospino, J. & Fuenmayor, E., (2001), *J. Math. Phys.* **42**, 2129 – 2143.
- [28] Muñoz, A. & Núñez, L.A. (2006), *Sup. Rev. Mex. de Física*, **S52**, 112.
- [29] Mak, M.K. & Harko, T. (2003), *Proc. Roy. Soc. Lond.*, *A459*, 393.
- [30] Dev, K. & Gleiser, M. (2004), *Int. J. Mod. Phys.*, **D13**, 1389.
- [31] Chaisi, M. & Maharaj, D. (2006), *A New Algorithm for Anisotropic Solutions*, <http://lanl.arxiv.org/abs/gr-qc/0601030>.
- [32] Chaisi, M. & Maharaj, D. (2006), *Anisotropic Static Solutions in Modelling Highly Compact Bodies*, <http://lanl.arxiv.org/abs/gr-qc/0602030>.

- [33] Darmois, G. *Mémorial des Sciences Mathématiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1927) Fasc.25.
- [34] Lichnerowicz, A., *Theories Relativistes de la gravitation* (Masson, Paris, 1955).
- [35] Bonnor, W. & Vickers, (1981) *Gen. Rel. Grav.*, **13**, 29.
- [36] Herrera, L. (1992), *Phys. Lett.*, **A165**, 206.
- [37] Herrera, L. (1994), *Phys. Lett.*, **188**, 402.
- [38] Di Prisco, A., Fuenmayor, E., Herrera, L. & Varela, V. (1994), *Phys. Lett.*, **A195**, 23.
- [39] Di Prisco, Herrera, L. & Varela, V. (1997), *Gen. Relativ. Grav.*, **29**, 1239.
- [40] Senjanovic, G., Herrera, L. & Jiménez, J. (1996), *II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica*, Edited by Héctor Rago, (Meritec C.A., Mérida-Venezuela).
- [41] Demianski, M. *Relativistic Astrophysics*, in International Series in Natural Philosophy, Vol 110, Edited by D. Ter Haar, (Pergamon Press, Oxford.) p,45.
- [42] Florides, P.S. (1974), *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A337**, 529.
- [43] Wyman, M., (1949), *Phys. Rev.*, **75**, 1930.
- [44] Korkina, M.P. (1981), *Sov. Phys. J.*, *24*, 468.
- [45] Durgapal, M.C. (1982), *J. Phys. A. Math. Gen.*, **15**, 2637.
- [46] Kuchowicz, Br (1970), *Acta. Phys. Polon.*, **B1**, 437.
- [47] Adler, R.J. (1974), *J. Math. Phys.*, **15**, 727. (Erratum (1976), *J. Math. Phys.*, **17**, 158).
- [48] Adams, R.C. & Cohen, J.M. (1975), *Astrophys. J.*, **198**, 507.
- [49] Tooper, R. (1964), *Astrophys. J.*, **140**,434; Tooper, R. (1965), *Astrophys. J.*, **142**, 1541; Tooper, R. (1966), *Astrophys. J.*, **143**, 465.