DIOS NO JUEGA A LOS DADOS

Reflexiones sobre el azar

Carlos Domingo
carlosd@ula.ve

Resumen

Se discuten algunos aspectos de la vieja polémica entre los que admiten un determinismo estricto para los procesos del universo y los que suponen la existencia objetiva del azar. Se revisan puntos de vista de la Filosofía, la Teoría de Probabilidades, la Física, la Biología, la Psicología y de algunas visiones del mundo. Se destaca la relación del problema con el carácter objetivista de nuestra ciencia. Se arguye que hay problemas donde ambas posiciones no son satisfactorias, concluyendo que azar y determinismo son dos modelos referentes, de acuerdo con el problema, a una realidad que no es idéntica a ninguno de ellos. Los estudios sobre caos muestran que pueden haber variantes de estos modelos. Los de la subjetividad prometen otras soluciones.

1. Azar y Verdad

En mis clases de Estadística Elemental, al tratar de explicar que es un experimento aleatorio, acudo al clásico experimento del dado: arrojo un dado sale seis y al volverlo a arrojar el mismo dado, en la misma forma, sale un cuatro. Esto es un fenómeno aleatorio: al repetirlo en las mismas condiciones el resultado es diferente. Pero nunca falta la observación de algún alumno: "los dos lanzamientos son diferentes. Si se arrojara en condiciones exactamente iguales se obtendría el mismo resultado".

Insisto. ¿Que piensan ustedes? si se reproducen condiciones idénticas lo que ocurre ¿será lo mismo?. Nadie parece dudarlo. Esta posición, llamada determinismo, parece ser la más universal. El azar es sólo subjetivo. Es causado por nuestra ignorancia (Laplace). La dificultad comienza si pregunto porque me han contestado así. Una respuesta: "es porque creemos que es correcto, que es verdad".

Les digo entonces que no es esa la causa de la respuesta. En las circunstancias en que fue hecha la pregunta, aplicando la propia tesis, la respuesta no podría ser diferente. No parece tener mucho sentido decir que es verdadera. No podría ser otra.
¿Que pasaría si los alumnos admitieran que ocurren hechos realmente aleatorios?. Es decir si hubieran contestado: "Al reproducirse iguales las condiciones lo que ocurre puede ser diferente". Es decir existe el azar como algo objetivo. Entonces, podría ocurrir, que si repito la pregunta en iguales condiciones podrían contestar: "Al reproducirse las condiciones lo que ocurre no puede ser diferente". Pero entonces tampoco tendría sentido decir que la respuesta es verdadera. En cualquier repetición de la pregunta en las mismas condiciones no hay garantía de la misma respuesta. En resumen, si hay azar objetivo o determinismo estricto no se ve claro que quiere decir que una respuesta es correcta. Una conclusión sería un hecho, no una verdad. Para que sintamos que es una verdad debe

haber la posibilidad de elegir la respuesta entre dos o más alternativas y además debe haber un proceso por el cual justificamos la elección.
La cuestión se ha complicado, dando intervención a una libertad en la elección que parece ser un proceso que ni es estrictamente determinado ni es aleatorio ya que, si es uno de los dos, cualquier respuesta carece de fundamento, que es lo que pensamos que existe para decidir la verdad o falsedad de una afirmación.

2. Azar y libertad

Lo anterior plantea el antiguo tema de si nuestras decisiones son determinísticas o si son aleatorias o por lo menos tienen un componente aleatorio que las hace impredictibles. Las dos aseveraciones se hallan en los primeros filósofos atomistas griegos. Para ellos todo lo existente: piedras, animales, cuerpos humanos, almas, dioses, son configuraciones de átomos en el espacio vacío. Pero al discutir como se han formado hay dos opiniones. Para Demócrito (-460 -370) el movimiento natural de los átomos es la caída (en una dirección). Los átomos sólo interactúan por choque. Como los más pesado, caen más rápido chocan a los más lentos y se producen desvíos, torbellinos, uniones (por ganchos e irregularidades que tienen los átomos) formándose todo lo existente. Los movimientos de los átomos son estrictamente determinísticos, de modo que no hay nada aleatorio. La sensación de libre albedrío es sólo una ilusión. Por supuesto nadie es responsable de sus actos. No podría actuar de otra manera. Para Epicuro (-342 -270) cuyas teorías fueron difundidas por el gran poeta romano Lucrecio (-97 -54) en su famoso poema De la Naturaleza de las Cosas , en que explica, sin intervención de los dioses, la formación y evolución del mundo físico y social, no hay determinismo estricto.

El proceso que describe Demócrito es imposible pues en el vacío, no resistente, todas las cosas, aunque sean movidas por diferente peso se deben mover con igual velocidad (II-238). Por lo tanto los átomos deben tener desviaciones en su caída, que no pudiendo ser causadas por choque ni por un mecanismo interno (pues los átomos son simples) sólo pueden deberse al azar, es decir no tienen causa, son impredictibles.
Y este fenómeno atómico es el fundamento de la libertad humana. "En fin -dice Lucrecio- si todo movimiento se conexiona y se origina siempre uno nuevo de otro anterior en determinado orden, y si los elementos no ocasionan, desviándose, cierto principio de movimiento que infrinja la ley del hado para que no siga de una causa a otra desde lo infinito, ¿ de dónde viene esa libre potestad de los seres animados sobre la tierra?" II 252-60.

El argumento es sorprendente. Hace pensar que anticipación a Galileo, es introducida para refutar el determinismo de Demócrito y asegurar la libre voluntad. El ser humano queda libre no sólo de los caprichos de los dioses (que para Lucrecio existen pero para nada intervienen en el mundo ya que todo lo explica por causas físicas) sino también de la tiranía del destino que eran (dioses y hado) las principales preocupaciones trascendentes de los greco-romanos. La especulación de Bohr de que la no determinación estricta de los procesos mentales puede deberse a que en ellos los procesos energéticos están en la zona cuántica y tales procesos son aleatorios, no es muy lejana a la epicúrea. De todos modos, ya sea que nuestro mundo subjetivo esté regido por un determinismo estricto o un azar inexplicable no nos hace sentir libres. La sensación subjetiva de libertad no puede basarse en ninguna de las dos alternativas. Es un sentimiento de que las decisiones que tomamos nacen de un mecanismo interno que percibe múltiples posibilidades de escogencia y elige una por un proceso de fundamentación interno. Como ya fue observado, la afirmación de que no hay libertad hace aparecer toda afirmación como sin sentido. Por otra parte hay una especie de paradoja en cualquier reflexión filosófica que demuestre que el ser humano es necesariamente libre. Tal libertad sería obligatoria y no podríamos escoger lo contrario de ella. Como en el caso de la verdad de una afirmación, la libertad está relacionada con un proceso que no es ni determinístico ni aleatorio.

3. Azar y Probabilidad (medida del azar)

Un hecho -se piensa- o está estrictamente determinado y es necesario (debe ocurrir) o es imposible. Si no sabemos la ocurrencia de una de esas alternativas es aleatorio y entonces entre estos valores extremos de posibilidad se le puede asignar una probabilidad de ocurrencia. La forma actual de la Teoría de la Probabilidad muestra que esta disyuntiva no es verdadera. Se trata de asignar en forma subjetiva o por muchas repeticiones un número al grado de posibilidad de cada resultado esperable.
Cuando el número de posibles resultados (casos posibles) es finito y queremos saber la probabilidad de que sean de un cierto tipo (casos favorables) se ha propuesto asignarle a estos como número que mide su probabilidad el cociente

p=número de casos favorables/número total de casos posibles

cuando, por consideraciones de simetría, parecido o información todos los posibles tienen la misma posibilidad.
Si el experimento puede repetirse muchas veces se usa la misma fórmula pero ahora los casos se sutituyen por el número de ocurrencias del resultado. Si la relación tiende a un valor estable al aumentar el número de ensayos esto estima la probabilidad.
El problema se presenta cuando el número de casos es infinito.
Consideremos un segmento de longitud 1 y elijamos un punto (valor entre 0 y 1) por un método no sesgado (la probabilidad de el punto caiga en sub-segmentos cualesquiera de igual longitud es igual).
¿ Cuál es la probabilidad de que el punto caiga en el intervalo (0.0,0.5)?. La respuesta intuitiva es: 1/2. Esto resulta de definir la probabilidad como medida. El 1/2 resulta de dividir la medida del conjunto de los casos favorables (0.0, 0.5) por la medida del conjunto de los casos totales (0.0,1.0). La probabilidad, en la fundamentación de Kolmogorov, se basa en el concepto intuitivo, claro y bien definido de medida. Pero ¿es tal concepto de medida tan claro e intuitivo?.
En primer lugar, como un punto tiene medida cero la probabilidades que elijamos un cierto valor, digamos 0.35, es nula. Es incómodo que un hecho de probabilidad nula pueda ocurrir, pues es cierto lo inverso (un hecho imposible como que salga siete en un dado tiene probabilidad nula).
Se puede ver que la probabilidad de elegir un número racional es también nula, ya que los racionales son numerables (o sea que podemos ponerlos en una lista uno tras otro. Ver Apéndice 1). Entonces podemos cubrir el primero con un sub-intervalo de largo e/2,

el segundo con e/4, el tercero con e/8, etc., de modo que todo el conjunto de los racionales queda cubierto con un conjunto de medida menor o igual a la suma e/2+e/4+e/8+....=e y como e se puede tomar arbitrariamente pequeño la medida es cero. También pueden darse ejemplos de conjuntos no numerables (como el conjunto de Cantor que tiene más puntos que los racionales) que tienen medida nula. Pero hay más aún. Se puede construir un conjunto que no tenga medida.

La medida de un conjunto es un número real positivo que se puede asignar al mismo. Se define como aditiva, es decir la medida de la unión de conjuntos disjuntos es la suma de las medidas. Para conjuntos de números reales la medida del intervalo (a,b) es b-a, la de un punto es pues cero, y la medida no varía si trasladamos el conjunto. Se puede probar (ver Apéndice 2) que hay conjuntos que no tienen medida.

Por esta razón, cuando se hace la fundamentación de la teoría de la probabilidad no se puede considerar la probabilidad asociad a un conjunto cualquiera. Es decir si elijo un punto al azar sobre el intervalo (0,1) y pregunto cuál es la probabilidad de que el elegido pertenezca a un S dado por la construcción dada en el Apéndice 2, la respuesta es que no hay tal probabilidad. Es decir tal evento no puede considerarse aleatorio si exigimos que a todo evento aleatorio se le pueda asignar cierta probabilidad. Y por supuesto tampoco podemos decir que el hecho ocurrirá con seguridad.

La Teoría de Probabilidades, que es la expresión matemática rigurosa del concepto de azar no puede asignar probabilidad a eventos que intuitivamente tienen una posibilidad de ocurrir.

Algunos lectores quedarán indiferentes por lo abstruso de la construcción de tal ente ideal sin probabilidad. Pero recordemos que muchas veces los extravíos de los matemáticos (como los espacios no euclídeos o los números imaginarios) pasan a ser modelos útiles en las ciencias empíricas.

4. Azar y Física

Un interesante ejemplo del manejo de los conceptos de azar y determinismo lo ofrece la Mecánica Estadística. En la Mecánica Estadística clásica (Ver por ejemplo Khinchin) se supone que los elementos con que se trata (el ejemplo típico son las moléculas de un gas) siguen estrictamente las leyes determinísticas de la Mecánica newtoniana. Son además completamente reversibles. Si viéramos en una película los movimientos de las moléculas del gas en equilibrio entrechocándose en un movimiento aparentemene desordenado nadie distinguiría si la película se pasa normalmente o al revés. Por otra parte, es prácticamente imposible calcular los movimientos de todas las partículas para un volumen macroscópico de gas. Requería resolver un sistema de unas 10^{22} ecuaciones. Por otra parte tales volúmenes macroscópicos siguen bastante bien leyes determinísticas globales como las de Boyle y Charles. Para deducir estas leyes determinísticas de aquellas otras leyes determinísticas el físico usa un artificio muy extraño. Supone que las variables mecánicas (posiciones, velocidades) tienen valores aleatorios con ciertas distribuciones. Con ello puede deducir las leyes determínisticas macroscópicas. Pero además se explica un resultado muy notable que cae fuera del espíritu de la Mecánica Clásica. Cuando se comienzan a estudiar los fenómenos térmicos (Fourier 1822) llama la atención la aparición de fenómenos irreversibles. Si se quiere volver un sistema que se ha modificado otra vez a su estado inicial se ve que esto no ocurre espontáneamente. Si comunicamos por un conducto dos recipientes uno con gas y otro vacío las moléculas pasaran del primero al segundo hasta que se alcance un equilibrio. Si viéramos la película el proceso nada nos extrañaría. Pero si la pasan al revés sospecharíamos el truco o supondríamos que está actuando una influencia externa. Tal irreversibilidad del paso espontáneo de un estado más "ordenado" o mas "determinado" o que "se define con menos información" (todas las moléculas en un lado y vacío en el otro) al más desordenado (las moléculas moviéndose en un espacio más grande formado por los dos recipientes) y de la imposibilidad del proceso espontáneo inverso se expresa, como todos saben, por la ley de aumento de entropía (que es una medida del desorden).

Pero como lo observó Boltzman tal idea de orden y desorden tiene sólo sentido en el campo de los fenómenos aleatorios. La explicación estadística del caso de los dos recipientes es muy sencilla desde el punto de vista estadístico. Si en el primer recipiente hay una sola molécula, el fenómeno, considerado aleatorio (movimientos con igual posibilidad en cualquier sentido) es reversible. La molécula pasa al segundo recipiente y en un tiempo finito vuelve al primero. Si hay dos moléculas A y B en el primero los estados posibles después de un cierto tiempo son: A y B en el primero, A y B en el segundo, A en el primero y B en el segundo, A en el segundo y B en el primero. Cuatro casos que, con recipientes iguales, se suponen de igual probabilidad. La probabilidad de que A y B estén en el primero es pues 1/4 y, por ejemplo en una hora sucederá en tiempos que suman (con ciertas fluctuaciones) un cuarto de hora. Si hay tres moléculas se ve que la probabilidad de reversión es 1/8, si hay 4 es 1/16 y si hay 10^{22} (como en el volumen de un posillo) la probabilidad es $1/2x10^{22}$. Es decir es prácticamente imposible. No es difícil demostrar con este tipo de razonamiento que aún leves diferencias porcentuales entre los contenidos de los dos recipientes son de probabilidad despreciable. Lo notable del razonamiento de Boltzman es que prueba muy sencillamente que el fenómeno es irreversible si uno se toma en serio la aleatoreidad del movimiento, lo cual parecía un simple recurso matemático para evitar resolver el gran número de ecuaciones. Más aún, es posible que, si se resolvieran estas con ciertas condiciones iniciales, el paso al equilibrio y por ello la irreversibilidad, que es una verdad empírica, no se encontraría. Queda pues en pie la pregunta ¿es el fenómeno real determinístico o aleatorio?.

Otro aspecto del azar se presenta en la Teoría de la Relatividad. Aristóteles en su Física define el azar como el encuentro de dos líneas causales independientes. Salgo a la plaza con un cierto propósito. Me encuentro con un amigo, que también seguía su propia trayectoria de causas y propósitos. El encuentro, no previsto por ninguno de los dos puede cambiar totalmente la historia que hubiera ocurrido de no haberse dado el encuentro fortuito. Es claro que para alguien que tuviera la información completa de ambos procesos no habría tal azar. Aristóteles es perfectamente consciente de ello. Pero según la Teoría de la Relatividad tal conocimiento no es posible por la finitud de la velocidad de transmisión de las señales. Un estallido de la estrella Sirio en este momento aparecería como un hecho fortuito, en el sentido de Aristóteles, dentro de nueve años. Podría producir una serie de eventos para los cuales nos es imposible estar preparados. El azar aparece así como algo absolutamente insuperable. Pero ¿lo es absolutamente?. Si con la información vieja que tenemos ahora de Sirio hacemos un modelo de la estrella y concluimos que el estallido está ocurriendo, el evento que ocurrirá dentro de nueve años no sería fortuito y lo que ocurre allí ahora podría estar influyendo ya mismo en medidas que se tomaran sobre la Tierra. El conocimiento, que superaría en cierto modo la velocidad finita de la luz, transformaría lo fortuito en predictible. Son las señales físicas pero no la información basada en el conocimiento la que tiene esa limitación.

Pero es en la Mecánica Cuántica donde el problema del azar ha suscitado más polémicas. Según la interpretación ortodoxa la existencia del azar no puede eliminarse. De una partícula como el fotón o el electrón que se está moviendo lo que da la teoría es una función que en cada punto del espacio y el tiempo nos da la probabilidad de que allí (en ese instante y posición) la partícula pueda ser detectada. Tal función es la de una onda que se propaga. Y no pregunten en qué se soporta la onda (como las sísmicas se soportan en los materiales de la Tierra o las de sonido en el aire) porque una "onda de probabilidad" es un ente matemático que no necesita soportarse en nada. Si se pone una pantalla en el camino de tal onda para detectar o medir la posición de la partícula, la onda desaparece y la partícula aparece en algún punto sobre la pantalla donde la onda indique probabilidad no nula. La probabilidad de que aparezca en un cierto punto es igual al cuadrado del valor absoluto de la función de onda en ese punto en el momento de la interacción. La partícula que así aparece se revela por su efecto (químico, luminescente, fisiológico, etc) que produce en el punto. Preguntar donde estaba la partícula un cierto instante antes del choque está prohibido. No tiene sentido pues la teoría no indica nada al respecto ni usa tal información.

Las predicciones de esta teoría en una enorme cantidad de procesos reales están totalmente confirmadas por la observación. Es claro que sus predicciones tienen carácter estadístico. Si se considera una sola partícula el lugar de detección no está estrictamente determinado. La partícula siguiente, supuesta en condiciones idénticas de movimiento puede ser detectada en otro punto. Si se trata de muchas partículas en las mismas condiciones el resultado muestra la distribución estadística espacial de los resultados individuales.

Cualquier persona de sentido común piensa que la teoría es incompleta. Así lo pensó Einstein toda su vida. Una larga experiencia de los investigadores muestra que cuando condiciones vistas como iguales producen resultados diferentes es porque intervienen factores ocultos que hacen que las condiciones sean diferentes, y la historia de la ciencia muestra lo correcta y fructífera que es tal hipótesis.

La discusión ha tomado dos direcciones. Por una parte se ha pretendido encontrar paradojas en la interpretación ortodoxa. Pero tales paradojas han introducido en general ideas implícitas de sentido común y otras han sido aclaradas por los defensores de la interpretación ortodoxa. No podemos entrar aquí en los detalle y remitimos al lector a la excelente presentación de Lindley. Por otra parte se han intentado otros modelos que incluyen variables ocultas. Pero en general son complicados y no aportan nuevos resultados.

Para el tema que nos interesa lo que llama la atención es la persistencia de un indeterminismo objetivo, en contra de lo que era usual en el espíritu científico del análisis del mundo objetivo.

5. Azar y Caos

Desde 1970 se ha llamado la atención sobre los fenómenos del caos determinístico (ver por ejemplo Schuster). Se observa que procesos definidos por leyes estrictamente determinísticas presentan un comportamiento que el que los observa no puede predecir. No se debe a que haya que resolver infinidad de ecuaciones. El primer ejemplo, dado por un meteorólogo (Lorenz) para describir la convección en un fluido es de tres ecuaciones. Para entender, con un ejemplo sencillo, como puede suceder esto consideremos un péndulo rígido. Lo consideramos formado por una esfera con cierta masa fijada al extremo de una barra rígida. El péndulo puede oscilar en un plano. Su posición de equilibrio es la vertical con la masa abajo. Si le aplicamos un golpe el péndulo oscilará (puede dar antes varias vueltas completas si el golpe es fuerte) a ambos lados de su posición de equilibrio hasta que el roce en el punto de giro o el del aire amortigüen su movimiento. Pero ahora apliquemos una sucesión regular de golpes, o bien una fuerza periódica. Entonces para ciertos valores de los parámetros (masa, longitud, roce, intensidad y período de la fuerza) el movimiento se vuelve caótico. Es decir no podemos encontrar ninguna regularidad en él, a pesar de que, en el modelo simplificado, todo es estrictamente determinístico y, si repetimos el cálculo con las mismas condiciones iniciales, el comportamiento se repite estrictamente igual. Y nótese que es el modelo el que se comporta caóticamente, así que el caos no se debe a perturbaciones desconocidas en el mundo real.

Hay una observación que puede ayudarnos a comprender este fenómeno. En la trayectoria del péndulo hay una posición de equilibrio inestable. Es la vertical con la masa en el punto más alto. En tal posición cualquier velocidad que tenga, por pequeña que sea o, si la velocidad es cero, cualquier imperceptible desviación hacia uno de los lados, harán que el péndulo se decida descender por un lado o por el otro. Pero según el lado que tome, su comportamiento posterior será muy diferente. Y por exacta que sea una observación siempre puede haber una situación en que se conjuguen las fuerzas actuantes para que la decisión resulte impredecible. Si el péndulo está en el mundo real, una mariposa que pase cerca de él cuando está muy próximo al punto de equilibrio inestable lo inclinará a un lado o a otro según por donde pase. Y según para donde se decida el comportamiento siguiente del péndulo será muy diferente. Cuanto más próximo esté el péndulo a esa posición con una velocidad más próxima a cero su decisión de irse a uno o a otro lado será afectada por perturbaciones más y más pequeñas haciéndose más difícil de prever su historia. Para todos los fines prácticos el comportamiento es aleatorio y si queremos saber algo de él, por ejemplo cuantas veces aparecen en un lapso dado de tiempo dos vueltas seguidas completas, debemos acudir a la observación de muchos lapsos y conformarnos con determinar su distribución de frecuencia aproximada. El hecho de que sabemos que el comportamiento básico es determinístico no nos permite predecir nada con exactitud. Estos estados del sistema en que pequeñas perturbaciones los lanzan a estados muy diferentes se llaman "puntos de bifurcación".

Es notable que si simulamos el comportamiento del péndulo mediante ecuaciones diferenciales determinísticas el caos puede también presentarse, a pesar de que el computador que calcula las ecuaciones es una máquina estrictamente determinística y no hemos introducido en el modelo acciones aleatorias como mariposas, brisas u otras perturbaciones del mundo real. Esto se debe a que en el cálculo numérico de las ecuaciones que exige muchas operaciones aritméticas se introducen pequeños errores, ya que el cálculo no representa los valores exactamente (por ejemplo en una máquina que trabaje con seis cifras significativas el valor 1/3 se representará por 0.333333, mientras que el valor exacto tendría infinitas cifras y no puede representarse en el cálculo). Estos errores se combinan en los cálculos generando pequeñas desviaciones respecto a lo que sería un cálculo exacto. Cuando el péndulo representado en el modelo llega con velocidad casi cero a una posición muy cercana a la de equilibrio inestable, estos errores, que semejan un "ruido" prácticamente imposible de prever, hacen que en dos casos muy semejante harán inclinar el péndulo simulado a uno u otro lado. Es decir a situaciones casi iguales cercanas a los puntos de bifurcación el sistema se puede volcar hacia diferentes lados, dando a su historia un aspecto caótico.

Los caólogos han construido una diversidad inmensa de modelos muy ingeniosos y han observado cientos de casos prácticos en que las ideas de la teoría del caos se aplican. Los fenómenos meteorológicos, químicos, sísmicos, económicos y nuestra propia biografía, presentan aspectos caóticos.

Un modelo muy interesante para nuestro tema es el siguiente modelo teórico en el cual el tiempo se considera discreto (vale 1,2,3,...)y en cada valor sucesivo el sistema pasa de un estado al siguiente. El sistema consiste en un punto que se mueve sobre una circunferencia de perímetro de longitud 1. Fijamos su ley del movimiento diciendo que si está en el punto x (medido a partir de un punto origen fijo) en un instante, se moverá, en el instante siguiente al 10x medido desde el mismo origen, dando tantas vueltas como sea necesario. La circunferencia se divide en 10 partes que se numeran a partir del mismo origen: 0,1,2,3...9. La salida o valor observable del sistema es el número del intervalo en que cae el punto.
Supongamos que el punto sale de la posición inicial x=0.3473. La salida es 3, pues 0.3473 está en la parte **3** de la circunferencia. En el primer movimiento va al punto x=3.473, de modo que da 3 vueltas y queda, medido desde el origen en 0.473, cayendo en la parte 4, la salida es pues **4**.
La siguiente posición es 4.73, da 4 vueltas y la posición desde el origen es 0.73 de modo que la salida es **7**. En el siguiente movimiento el avance es 7.3. La posición queda 0.3, la salida es **3**. En el siguiente movimiento el avance es **3**.El punto da exactamente 3 vueltas y queda en 0 y el movimiento se detiene (se repite 0 indefinidamente).
Es decir las salidas reproducen los dígitos decimales de la posición de partida. El movimiento es estrictamente determinístico.
Consideremos ahora una sucesión infinita de dígitos aleatorios (como la obtenida al sacar, con reposición, infinitas veces una ficha de una urna con diez fichas numeradas de 0 a 9). Tal sucesión numérica, precedida de un cero y un punto es un número real entre cero y uno. Si lo tomamos como posición de partida del punto de la máquina anterior, su proceso determinístico

generará un número genuinamente aleatorio. Más aún (ver Chaitin) se ha demostrado que los números irracionales como π o e tienen sus dígitos con una sucesión aleatoria en el sentido de que cuado vemos una sección finita de sus cifras no hay una ley que permita calcular la cifra siguiente y tienen las propiedades que se exigen en Estadística para la aleatoreidad. Las excepciones como 0.10100100010000.... que son irracionales predecibles (es decir tienen una ley de formación) forman un conjunto de medida nula. Casi todos son impredictibles en base a los conocidos.

Pero basta poner como posición inicial el punto x en un número irracional no excepcional (casi todos) para que nuestra maquinita determinística nos genere tal sucesión aleatoria.
Este ejemplo parece contradecir la caracterización de sucesión aleatoria de Kolmogorof y Chaitin: una sucesión es aleatoria si el menor algoritmo que la genera es de mayor tamaño que la sucesión. Pero, cabe preguntar, ¿que tamaño tiene el algoritmo que genera la posición inicial irracional?. Tanto si incorporamos el dato inicial al algoritmo como si lo definimos mediante la definición de Cantor o la de Dedekind, se ve que tal especificación tendría un número infinto numerable de pasos (no sería, estrictamente hablando, un algoritmo).

En el caos se vuelve a encontrar una relación entre determinismo y azar que permite generar procesos que parecen aleatorios partiendo de sistemas determinísticos (como en el caso del péndulo) o bien a partir de un proceso aleatorio (como la extracción de las fichas) dar un proceso determinístico que imite estrictamente su comportamiento.
Mencionaremos un problema en la relación del caos con la cuántica. En esta teoría, hecha para las partículas elementales y sistemas con pocos estados, con niveles de energía discretos, se supone que en circunstancias de altas energías y estados muy próximos las leyes del comportamiento descritas por la cuántica tienden a las de la mecánica clásica. Pero no parecen llevar a casos caóticos. Está difícil establecer el puente entre los sistemas descritos por la cuántica y los caóticos. Tal relación, que sería de gran importancia para ambas teorías, está siendo investigada (ver Keating)

6. Azar y Biología

En la idea más aceptada sobre la evolución biológica, la tesis neo-darwinista, el azar juega un papel esencial. Un exposición popular pero magistral de tal tesis puede verse en el libro de Monod.

La idea central es que los seres vivos presentan alteraciones en sus genes por lo cual los hijos se diferencian de sus progenitores. La selección natural produce una diferencia en la tasa de reproducción que lleva a una evolución, en el sentido adaptativo, de toda la población de una especie. El proceso se complica por la relación entre especies y por las actitudes de grupos de individuos (migraciones, nuevos hábitos de vida, etc.) pero lo esencial es que las mutaciones son aleatorias y no tienen ninguna relación adaptativa con el medio.
La increíble sofisticación de las funciones vitales (asimilación, inmunización, instintos, inteligencia, relación con seres de la misma u otra especie) se forman por este

mecanismo ciego. Toda idea de propósito, sentido de la vida, finalidad, quedan excluidas.
La hipótesis de la evolución así concebida no puede demostrarse, pero su poder explicativo y la sobriedad de recursos supuestos es tal que es aceptada como un axioma por prácticamente toda la comunidad científica.
Un punto difícil de explicar (ya Darwin lo había notado) es que en la formación de una función, como la visión, es necesario que concurran muchas características orgánicas al mismo tiempo, sin que parezca que cada una de por sí dé ventajas al individuo.
Si se produjeran por separado en diferentes tiempos, al no ser ventajosas (inclusive pueden ser contraproducentes) no se conservarían por selección, y por otra parte la probabilidad de que se presenten simultáneamente para así crear la función y dar ventaja al individuo, es extremadamente baja. Salet ha tratado de calcular algunas de estas probabilidades y son extraordinariamente bajas como para que aparezcan en el lapso de los 4000 millones de años en que se supone que deben haberse formado. Un cálculo semejante de Vollmer sobre la probabilidad de formación del DNA que es la base de la herencia parece dar probabilidades menores que el límite de 10^{-200} dado por Borel para calificar un hecho como imposible.
En estos cálculos hay de todos modos, un punto oscuro. Un hecho individual, como una cierta distribución de moléculas entre los dos recipientes descritos en 3), puede tener probabilidad muy baja. Pero lo que debe considerarse es una multitud de configuraciones diferentes muy próximas. En el caso del gas esto nos permite calcular que probabilidad tiene un rango de diferencia de presión entre ambos recipientes la cual puede ser apreciable. En el caso del DNA habría que considerar una multitud de estructuras moleculares capaces de replicarse y ver que probabilidad hay de que una cualquiera de ellas se realice. Esto exige demasiado de nuestro conocimiento e imaginación. Con todo, la impresión es que la probabilidad seguiría siendo muy baja ya que las estructuras moleculares sin esa función son muchísimas más que las que tienen esa función.
Esto arroja una sombra de sospecha sobre la exactitud o al menos la completitud de la tesis neo-darwinista de la evolución.
La tesis alternativa, de un plan deliberado en la evolución o la intervención de un principio no material que la impulse como ha supuesto Bergson es vista con desconfianza por los biólogos como un salto más allá de lo científico, ya que tal ente puede transformarse en un principio explicador de cualquier proceso el cual sustituiría a la búsqueda científica mediante la observación de la realidad.
Lo notable es que en los textos de los biólogos, incluido el de Monod, casi nunca se discute que es el azar, del cual la teoría actual de la evolución hace tanto uso.

7. Azar y Psicología

Supongamos que un analista de sistemas decida hacer un modelo de simulación de un supermercado para mejorar el servicio con el mínimo de lugares de pago. En el modelo considerará las llegadas, el lapso de estadía y la duración de la atención en la caja para cada cliente. En el modelo sigue las historias individuales de un gran número de clientes sucesivos y con el cálculo de cada etapa (realizado en un computador) calcula las colas y esperas medias. Para ello trata las esperas individuales y los tiempos entre llegadas como variables aleatorias. Concentrémosnos en las llegadas. En el modelo, dada una llegada es

necesario decidir cuando ocurrirá la próxima. Este tiempo entre llegadas es una variable aleatoria. Dada una llegada el tiempo hasta la otra no es exactamente previsible varía con las. Para ver cómo varía, el analista se pone en la entrada y con un cronómetro mide gran cantidad de tiempos entre llegadas con lo cual obtiene una distribución de frecuencias de tiempos entre llegadas, es decir diversos valores posibles de los tiempos entre llegadas y las probabilidades de que ocurra cada valor. Esta distribución es la que se usará luego en el modelo. En otras palabras supone que, las llegadas se producen al azar. Es claro que si le preguntamos a un cliente porque llegó en ese momento no nos dirá que es por azar sino que nos dará una explicación en que incluirá hechos externos pero también muchos hechos subjetivos: percepción de necesidades, propósitos, información, expectativas y muchos otros. El analista sabe eso pero no le interesa para su modelo. Puede hacer el cálculo sin esas consideraciones que si se trataran de incluir en el modelo lo harían inmanejable. Por otra parte con sólo sus variables aleatorias pueden predecir bastante bien lo que le interesa. Por cierto, sabe que las llegadas se producen por ciertos motivos, pero ello no se deduce de sus datos, es sólo porque él percibe su subjetividad y la supone existente en los clientes. Pero si el analista fuera un extraterrestre sin la menor idea de lo que son los humanos y los considerara sólo como objetos móviles, sus conclusiones no serían muy diferentes de las de los físicos cuánticos: el movimiento de estos seres sería aleatorio, pero se pueden descubrir regularidades estadísticas en su comportamiento. Si el extra-terrestre tuviera una ceguera para los móviles cuando no interactúan y sólo percibiera los seres cuando llegan a la puerta, cuando llegan a la caja y cuando llegan a la puerta de salida, la analogía con el físico que estudia las partículas sería sorprendente. Y no sería difícil que concluyera que la explicación que le da su modelo probabilística es suficiente y completa, aplicando la navaja de algún Occam extra-terrestre a la complicada hipótesis de que el comportamiento de los humanos se debe a una extraña y misteriosa subjetividad, teoría que, después de todo, no es verificable y no podría explicar los hechos mejor que la probabilística.
Lo interesante es que lo que subjetivamente aparece como un proceso consciente de decisión, que como hemos supuesto en 2) no se percibe ni como aleatorio ni como determinístico, desde el exterior se ve como un proceso aleatorio. No podemos discutir mucho qué son o cómo son los procesos conscientes. La percepción y su expresión más compleja el conocimiento y la voluntad que se expresa en la acción son procesos reflexivos: puedo conocer mi conocimiento, actuar sobre mis acciones, conocer mis acciones, actuar sobre mis conocimientos y recursivamente conocer el conocimiento de mis conocimientos, etc. Este hecho ya hace a los procesos psíquicos prácticamente impredictibles.

Si a esto se agrega que la subjetividad es inespacial e inmaterial aunque está en constante interacción con el cuerpo y el mundo espacial y material, tendremos una idea de lo difícil que es desarrollar una ciencia que abarque e integre el mundo objetivo y el subjetivo. Todo esto es lo que, el analista para simplificar y el extra-terrestre por ignorancia, resumen en el (engañosamente) simple concepto de azar. Que sus modelos, hasta cierto punto, funcionen, puede indicar una profunda conexión entre el azar y lo subjetivo.

Otra visión de esta relación está en la dificultad del análisis basado en lo material, de alcanzar lo subjetivo. Imaginemos un neurólogo que tiene un conocimiento total del funcionamiento del sistema nervioso pero que, por un problema psíquico jamás ha sentido un dolor. Se le presenta un paciente que le dice que le duele una muela. Aunque el neurólogo, que jamás ha sentido un dolor no entiende que es eso, si entiende que hay un problema en una muela. La analiza y detecta una inflamación que oprime un nervio. Sigue las conexiones del impulso nervioso y ve que este termina en una zona de la corteza cerebral. Golpea otras muelas y ve que se generan impulsos que terminan en distintas zonas adyacentes del cerebro pero que, a diferencia de la que corresponde a la muela dolorida, desaparecen al corto tiempo. La inflamación parece tener el efecto de un golpe permanente. Conoce unas sustancias químicas de las que sabe, por experiencias con pulsos nerviosos, que interrumpen las conexiones de las neuronas y las aplica a alguna de las que conectan las neuronas junto a la muela a la zona correspondiente de la corteza. El dolor se detiene por un tiempo largo. Por fin aplica un anti-inflamatorio a la muela y el dolor cesa. El paciente se va feliz y el neurólogo se queda satisfecho pues además de su paga se queda con la idea de que sabe todo lo que se puede saber acerca del dolor de muelas y de cómo manipularlo. Sabemos que, a pesar de sus conocimientos y de muchos más que pueda agregar si sigue investigando el sistema nervioso y el cerebro, no llegará nunca a saber que entendemos por dolor de muelas y es imposible que lo entienda por más explicaciones que le demos. Puede seguir la conexión causal de cualquier acción externa sobre el cuerpo hasta llegar al cerebro pero algo que es la sensación subjetiva correspondiente no surge del análisis y queda como un fenómeno impredecible, un salto insalvable en una cadena de procesos fisiológicos entre cuyos pasos se puede eliminar cada vez más el carácter aleatorio profundizando el análisis bioquímico. Pero entre estos y la sensación objetiva hay un salto que el análisis científico objetivo se inhibe de alcanzar. Lo mismo pasa con el salto desde la sensación subjetiva de mi voluntad de levantar una mano hasta la serie de excitaciones de neuronas corticales que siguen a esa sensación a las cuales sigue la corriente nerviosa bien determinada y analizable que provoca la contracción muscular adecuada (Ver Eccles y Popper).

8. Azar y cambios estructurales

Desde hace muchos años me ha preocupado la naturaleza de los cambios estructurales. El Enfoque de Sistemas (ver Churchman) el máximo esfuerzo que en este siglo ha hecho la humanidad para entender y manejar la creciente complejidad de sus problemas, concibe un sistema como una totalidad donde se integran muchos entes relacionados y con un comportamiento dinámico pero que resulta de su estructura. Los cambios dinámicos son, en general, cambios cuantitativos en las características de sus entes (variables). Así, en un sistema económico cambia el ingreso de las personas, la tasa de interés y los precios, pero las relaciones entre los componentes (personas e instituciones) permanecen estables. Pero a veces cambia la estructura del sistema: se incorporan entes nuevos, otros desaparecen o salen del sistema, cambian radicalmente sus relaciones y sus comportamientos. Estos cambios pueden ser graduales o bruscos. Compárese la revolución inglesa, que entre el siglo XVII y el XX deshizo el régimen absolutista y formó el sistema democrático con la francesa, que hizo la transformación de un sólo golpe en unas pocas décadas a partir de 1789.

No hay dentro de la Teoría de Sistemas, conceptos y técnicas claras para entender y manejar estos cambios, tal como los que se dan para manejar la complejidad de las estructuras. Pero desde la década de los 80, en que a la complejidad del mundo se ha

agregado un creciente dinamismo estructural, ha aumentado la preocupación teórica sobre el problema. Por supuesto, el problema había sido tratado por filósofos, desde Aristóteles hasta Hegel, historiadores desde San Agustín a Toynbee, científicos desde Darwin a Prigogin y Kauffman e historiadores de la ciencia como Kuhn , pero no existe hasta la fecha una teoría general. Al tratar de desarrollarla, con el objeto de crear modelos y hacer simulaciones de estos procesos nos encontramos con una dificultad esencial. Tal como el cambio común de los valores de las variables es predecible, en el cambio estructural hay siempre algo de impredecible. El cambio de los valores de las variables se explica por la estructura. Cuando es ésta la que está en juego la predicción del cambio se hace insegura. Otra vez el espectro del azar. Esto es muy visible sobre todo en los cambios revolucionarios.
Se ven, a veces, muchas posibilidades, pero que estructura estable resultará de la crisis parece depender de factores imponderables y accidentales que llevarán a una u otra solución. Otra manera de decirlo es que en el sistema aparece un aspecto creativo. Al lado de la destrucción generalizada en las revoluciones o la obsolescencia crónica en los cambios estructurales graduales, se abren paso procesos formativos de nuevas estructuras.
Un ejemplo físico señalado por Prigogin es el de las celdas de Benard. Si en un recipiente con líquido se calienta levemente y uniformemente el fondo, al comienzo hay una conducción uniforme y gradual de calor (agitación molecular) hacia arriba. Si el gradiente de temperatura pasa cierto límite, bruscamente aparece un patrón de celdas de convección con corrientes ascendentes y descendentes. Se forma una estructura, un orden, con el consiguiente descenso local de entropía. Cómo y en qué punto se inicia el proceso que luego se propaga a todo el líquido, debe depender de acumulaciones "fortuitas" de movimientos de agitación de las moléculas. La analogía con las revoluciones políticas es notable. En la revolución francesa la muerte prematura del hábil conciliador Mirabeau, el nombramiento del joven Bonaparte para defender Tolón, el asesinato de Marat, son hechos individuales que pueden haber inclinado (como en el péndulo caótico) la dirección de los acontecimientos en una u otra dirección.

En general, parece ser que un determinismo estricto traba la posibilidad de muchos procesos. Sería muy difícil cruzar una avenida si los vehículos pasaran a distancias fijas cada uno del siguiente. El cruce se facilita por el carácter irregular del tránsito. Es como si, por un proceder inmanente en los procesos o por selección hayan proliferado en la naturaleza los procesos aleatorios o caóticos que llevan a la diversidad y la creatividad, mientras que los deterministas conducen al orden y al estancamiento. Por supuesto que en todo cambio estructural hay mucho de determinístico como en toda creatividad (artística, científica o social) hay mucha racionalidad. Pero la evolución de las estructuras ocurre al borde del caos como la creatividad se mueve al borde de la locura.

9. Azar y cambios en las visiones del mundo

El problema del azar, que aparece como una infección en tantas ramas del saber (¡y ni siquiera hemos mencionado la creación artística (ver Wagensberg}, los sueños y la actividad de los agentes sociales, religiosos, económicos y políticos!) y nos ha sugerido una constante relación entre lo subjetivo y lo objetivo. Azar y sentido de la verdad de una

idea, azar y libre albedrío, azar como herramienta conceptual para manejar multitudes determinísticas, azar compensado por el conocimiento, azar surgido por la observación de una partícula, azar relacionado con los objetos mentales como la medida de conjuntos y los números irracionales, azar como apariencia percibida en procesos determinísticos, azar en los fenómenos de la vida, azar como apariencia de los procesos subjetivos, azar como apariencia y como posibilitador en los cambios estructurales y creativos.
Aventuremos una hipótesis. La infección del azar en tantos campos del conocimiento y la actividad humana ¿no será la contraparte del rechazo de lo subjetivo?. Para aclarar más este problema veamos cuáles fueron las etapas que llevaron a nuestra ciencia objetivista. En alguno o en varios puntos de cambio estructural tomó la humanidad (en épocas y culturas diferentes) una serie de decisiones que llevaron, a una parte de la humanidad, a esta gloria que es el conocimiento científico y a este pantano del azar. El esquema que exponemos es, por supuesto, una extrema simplificación que no muestra la asombrosa riqueza del desarrollo de los conceptos del mundo.
La llamada “mentalidad primitiva” es integrada. El ser humano considera a los animales, plantas, objetos naturales y aún artificiales como entes iguales a él mismo. Con sus proyectos, amistades y odios. La supervivencia de esta actitud es larga. El romano que antes de entrar a su casa hacía su saludo y reconocimiento al dios Umbral o el computista que insulta a su equipo cuando se queda colgado, vuelven momentáneamente a ese concepto del mundo. En algunos casos, en este animismo primigenio, se percibe la idea de un misterioso y a veces aterrador poder universal que se extiende a todo el universo, base de la vida de todos los seres (Otto).

Tal vez la reflexión sobre la muerte produce la primera dicotomía. El ser humano, y por tanto también todos los objetos tienen una parte material y un alma, que pueden separarse. Para actuar se puede hacerlo sobre el cuerpo de los seres (actividad técnica) o sobre el alma (actividad mágica). Frazer ha descrito un impresionante cúmulo de estas actividades.
De alguna forma, relacionada tal vez con la formación de grandes comunidades, se llega a la idea de Dios, ya en germen en el animismo primitivo y en la generalización del alma. Hay entes (luego se sintetizan en uno sólo) de tipo espiritual (aunque pueden encarnar) que dirigen todos los procesos de la naturaleza y el destino humano. A la magia le suceden los sacrificios, oraciones y otras prácticas religiosas. La naturaleza en la evolución monoteísta es des-animizada y se abre la posibilidad de una ciencia objetiva: descubrir las leyes que la legalidad divina ha impuesto al mundo creado por Dios. Pero entonces aparece la contradicción entre el libre albedrío (requerido para el premio y el castigo, base de la ética religiosa) y la omnisciencia divina que puede predecir nuestras decisiones. La religión por ruptura o continuidad, evoluciona en Filosofía. Dios es des-humanizado. Es un principio mental, creador, organizador, racional (el Ser de Parménides o Hegel) del cual proceden todas las cosas. Lo subjetivo se ha objetivizado pero sin perder su esencia y rasgos subjetivos. Por último (y esto ocurre prnicipalmente en la Europa renacentista) tal principio es eliminado. Descartes-cauteloso por el reciente juicio a Galileo- dice, hablando de un trabajo no publicado en que describe el origen material de todas las cosas: "resolví dejar ese mundo de discusiones [entre los doctos, sobre el origen de este mundo] y hablar sólo de lo que podría haber ocurrido en un nuevo mundo, si Dios hubiera creado, en algún lugar imaginario del espacio, materia suficiente

para formarlo" Descartes. De su agitación caótica, la materia siguiendo sus propias leyes, formaría todo el orden universal. Unos ciento sesenta años después, cuando Laplace expone ante Napoleón su teoría de la formación del sistema planetario y el emperador le observa que no ve a Dios en su sistema, ya la ciencia atea está consolidada: "Señor-responde orgullosamente- no he tenido necesidad de esa hipótesis".
El vuelco hacia el mundo objetivo arrasa con todo. El pensamiento es una mera forma de comportarse del cerebro. Del mundo dual de Descartes, La Mettrie sólo toma el material. Los intentos unificadores de Spinoza y las advertencias de Vico son olvidadas. La ciencia aborda la descripción material de todo el universo.
La contradicción es entre el determinismo implícito en el método científico y los problemas de azar y subjetividad antes mencionados. Todo va bien hasta comienzo del siglo XX. Aparecen las teorías "no representativas". El universo tetradimensional de Einstein o la trayectoria cuántica son irrepresentables. Por otra parte el azar, lo no explicado, aparece en todos lados y los procesos creativos y de cambio estructural no encuentran una teoría adecuada.

La subjetividad parece también irreductible para la ciencia objetivista. Ilustres científicos como Eccles vuelven al dualismo cartesiano, otros como Penrose se apoyan en los fenómenos cuánticos, otros en la neurología como Crick .
Muchos han reivindicado el principio antrópico: las leyes naturales son tales que deben asegurar la aparición de la mente. Es una vuelta a ideas orientales o hegelianas en que se ve el desarrollo del universo como un proceso de auto-entendimiento.
O el principio cosmológico: lo que experimento desde aquí (un mundo dual integrado subjetivo y objetivo) es lo que se ve desde cualquier otro punto del universo, lo cual se parece al animismo primitivo.

Según Spinoza: el universo es una unidad con dos caras: pensamiento y extensión. Y "el orden y conexión de las cosas es **idéntico** al orden y conexión de las ideas"Spinoza.
Tal vez en el futuro siglo se consolide esta visión dualista-unitaria y se vea que el azar y el determinismo son modelos parcialmente explicativos de una unidad que está más allá de ambos.
Dios, por decirlo así, no juega a los dados irresponsables ni al determinismo estéril, sino, tal vez, a una continua creación con un orden que percibimos (imperfectamente) en la Ciencia, como azar o como determinismo.

Apendice 1. Numerabilidad de conjuntos infinitos

Cantor hizo frente a las paradojas del infinito que hicieron que Galileo no abordara este tema. Galileo se pregunta si hay mas números naturales (1,2,3,4…..) que pares (2,4,6,8,…). La primera respuesta es obvia: el todo es mayor que la parte; por lo tanto hay más naturales. Pero Galileo imagina esta correspondencia:

1 2 3 4 5…….. naturales
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 4 6 8 10……… pares

Por cada natural hay un par luego hay igual número de naturales que pares. Pero aún se puede hacer esta correspondencia indicada por las flechas:

1 2 3 4 5
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
4 8 12 16 20 ….. (los naturales multiplicados por 4)

La cual muestra que hay más pares que naturales pues:

1 2 3 4 5 naturales
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 (sobran pares)

Cantor no se atemorizó por esas paradojas y supuso que la regla de que "el todo es más que la parte" vale para conjuntos finitos pero no para infinitos. Definió la igualdad de conjuntos así:

Dos conjuntos son iguales cuando de alguna forma se puede establecer una correspondencia **biunívoca** entre sus elementos. Es decir una correspondencia que a cada elemento del primero le corresponda uno y sólo uno del segundo y a cada elemento del segundo le corresponda uno y sólo uno del primero. Llamó $\aleph_0$ (aleph sub cero) al número infinito de los naturales: 1,2,3,4,…….

Se preguntó si podría haber infinitos más grandes que $\aleph_0$. Se ha llamado **numerables** a los conjuntos que se pueden coordinar biunívocamente con los naturales. Es decir tiene $\aleph_0$ elementos.

El primer resultado sorprendente es que los números racionales (quebrados) son numerables. Nótese que esto no es intuitivo. Basta notar que entre dos quebrados hay infinitos quebrados pues se puede tomar el promedio de los dos que es también un quebrado y luego el promedio de este con los extremos y así sucesivamente. Para hacer la correspondencia biunívoca Cantor establece una tabla de todos los quebrados posibles:

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	. . . .
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	. . . .
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	. . . .
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	. . . .

. . . .

La tabla sigue hacia la derecha y hacia abajo indefinidamente. Es evidente que en esta tabla infinita están todos los quebrados posibles. El 234/2351 está en la fila 234 y la columna 2351 de la tabla. Cantor hace la correspondencia biunívoca con los naturales por diagonales sucesivas:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 . . . .
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1/1 1/2   2/1   1/3   2/2   3/1   1/4   2/3   3/2   4/1   1/5 . . . .

A cada quebrado le llegará su turno de correspondencia con un natural y no es difícil hallar la fórmula que nos da para un quebrado dado a cual número natural le corresponde.
¿Habrá conjuntos infinitos más grandes que el de los naturales?. Cantor encontró que los números **reales** son más que los naturales. Recordemos primero que todo quebrado se puede representar por una expresión decimal de número finito de cifras o una que entra en una parte periódica infinita. Por ejemplo:
3/4=0.75; 1/7=0.142857 142857 142857...   1470/31=4 7.4193548387096 74193548387096 74..
Hemos dejado un blanco al iniciar cada período. Esta periodicidad se ve considerando que al hacer la división el resto tiene a lo más el mismo número de cifras que el divisor, de modo que después de un cierto número de restos se llegará a cero (y el cociente quedará con número finito de cifras) o se repetirá un resto anterior (y las cifras del cociente entrarán en un período)
Se ve además en Aritmética elemental que todo número decimal que repita indefinidamente un período se puede representar por un quebrado.
Pero se ve que hay números decimales como por ejemplo:
la raíz cuadrada de 2 = 1.4142135623095…..
o π =3.14159265358…..
o el decimal 0.1010010001000010000001…….
que no son periódicos y tienen infinitas cifras. Todos los números expresables por decimales, periódicos o no se llaman números reales. ¿Será numerable el conjunto de los reales? Cantor demostró que no lo es. Supongamos que hubiéramos establecido una correspondencia biunívoca entre los números naturales y los reales entre 0 y 1 sea, para fijar ideas, la correspondencia dada en la tabla:

1	0.3333333333333…..
2	0.7500000000000…..
3	0.1011001000100…..
4	0.4142135623095…….
5	0.9090909090909…….
6	0.7639474545667…….
……………………….	

Suponemos que en la tabla están **todos los reales**. Se ve que cualquiera que sea la correspondencia siempre se puede construir un número real que no está en la tabla. Tomemos la diagonal 3 5 1 2 9 7….. y formemos un decimal con números diferentes por ejemplo sumándoles 1 y si es 9 poniendo cero. Se forma así el número decimal:
0.4 6 2 0 8………
Este número difiere del primero por lo menos en la primera cifra, del segundo por lo menos en la segunda,… y del n-simo por lo menos en la n-sima. No está pues en la tabla y dada cualquier correspondencia siempre podemos construir por ese método uno que no está. Luego tal correspondencia entre los naturales y los reales es imposible, aún considerando sólo los del intervalo (0,1). Es decir los reales son más que $\aleph_0$.
En la Teoría de los Transfinitos se demuestra que dado un transfinito hay siempre otro mayor. En particular, dado un conjunto de infinitos elementos, el número de

subconjuntos que se pueden formar con sus elementos es mayor que el número de elementos

Apendice 2. Conjunto no medible

Para ver como hay conjuntos sin medida tomemos un intervalo de largo π. Pero, para ver mejor la demostración lo tomamos circular, como perímetro de una circunferencia de diámetro 1.

Para **todo** punto p_0 de la circunferencia (es decir todo valor real entre 0 y π) consideremos el conjunto E de los puntos $p_1, p_2, p_3 \ldots p_{-1}, p_{-2}, p_{-3} \ldots$ que están a distancias 1,2,3,… hacia ambos lados de p_0. Así por ejemplo al desplazarlo 4 se da una vuelta (en el sentido del reloj) y un exceso obteniéndose el punto correspondiente al valor $4-\pi$ del origen p_0. Al deplazarlo –7 se obtiene el punto de distancia al origen igual a $7-2\pi$ en sentido inverso (se han dado dos vueltas contra el reloj) lo cual daría una distancia $\pi - (7-2\pi) = -7+3\pi$. En general las distancias son de la forma $m+k\,\pi$ con ciertos m y k enteros. Este conjunto es infinito pues si en el avance de k unidades cayéramos en un punto anterior p_n la igualdad de distancias supondría que $h\times\pi$ con h entero sería un entero q lo cual es absurdo pues π es irracional, es decir no puede ser $\pi = q/h$. Además es un infinito numerable pues sus puntos se pueden poner en una lista $p_1, p_{-1}, p_2, p_{-2}, p_3, p_{-3} \ldots\ldots$ Véase que partiendo de cualquiera de sus puntos p_i en vez del p_0, se genera el mismo conjunto pues del p_j podemos llegar al p_0 por j pasos de largo 1 en uno o el oto sentido. Por otra parte dos conjuntos P_j P_k que partan de p_j y p_k respectivamente o bien son disjuntos o coinciden totalmente. Pues si tienen un punto común se puede tomar tal punto como origen y los generados resultan el mismo. Si parten de puntos que difieren en un valor no entero no pueden coincidir y son disjuntos. Como cada conjunto le quita a la circunferencia (que tiene un número no numerable de puntos) sólo un número numerable de puntos, al considerar como origen todos los puntos tendremos todavía un número no numerable de conjuntos disjuntos P que cubrirán todos los puntos de la circunferencia. Formemos ahora el conjunto Z_0 que tiene un punto y sólo uno de cada conjunto, lo cual es posible si se acepta el axioma de elección de Zermelo: si tenemos un conjunto de conjuntos siempre podemos formar un conjunto que tenga un elemento de cada uno de aquellos.

El Z_0 es no numerable pues lo es el número de conjuntos de los que se ha formado. Podemos ahora rotar este conjunto de manera que se desplace 1. Se obtiene un conjunto desplazado Z_1 que es igual al anterior pero es disjunto con él. En efecto, un punto p_0 de Z_0 elegido de un conjunto P de los originales, va a parar, en el desplazamiento, a uno p_1 de Z_1 que pertenece al mismo P y que no puede obviamente ser p_0 pues está desplazado en 1, pero si coincidiera con otro q_0 de Z_0 habría en Z_0 dos puntos pertenecientes al mismo P, contra la definición de Z_0. Es decir Z_0 y Z_1 son disjuntos. Haciendo todos los desplazamientos posibles de Z_0 de 1,2,3,… a ambos lados obtenemos una colección numerable de conjuntos Z_j tales que uno es un desplazamiento del otro, son disjuntos y contienen todos los puntos de la circunferencia (ya que contienen todos los puntos de los P) La sumatoria de las medidas (iguales) de cada uno debe ser la longitud total π. Pero si la medida de cada uno de ellos fuera 0, tal suma sería 0, y si fuera diferente de 0, por ser su cantidad infinita numerable, superaría cualquier valor finito lo cual en ambos casos contradice la evidencia de que debe la suma debe ser π.

El absurdo sólo se salva suponiendo que no hay medida de tales conjuntos Z que sea aditiva y se conserve por desplazamiento.

Bibliografía

Aristóteles:Física II-4-196a .
Bergson.: L'Evolution Créatrice.
Borel H.: Les Probabilités et la Vie. Presses Universitaires, 1971.
Chaitin G.: Information, Randomness and Incompleteness. World Scientific Publishing Co. 1987.
Crick F.H.C.: The Atonishing Hypothesis: The Scientific Search for the Soul. Scribner, 1994.
Descartes: Discurso del método.
Domingo C. El Cambio Estructural. UCV, 1975.
Eccles J. y Popper K.: El Yo y su Cerebro. Roche, 1980.
Frazer J.G.: The Golden Bough: A Study in Magic and Religion. Mac Millan, 1974.
Hegel G.F.W.: Ciencia de la Lógica. Trad. R. Mondolfo. Librería Hachette, 1950.
Kauffman S.: The Origin of Order. Oxford, 1993.
Keating J.: The Quantum Mechanics of Chaotic Systems (in The Nature of Chaos, T.Mullin Ed., Oxford, 1993).
Khinchin A. I.: Mathematical Foundations of Statistical Mechanics. Dover, 1949.
Kolmogorov A.N.: Foundations of the Theory of Probability. Chelsea, 1976.
Kuhn T. The Structure of Scientific Revolutions. University of Chicago, 1972.
Julien Offray de La Mettrie: L'Homme machine. 1748. En edición bilingüe: Man a Machine.
Open Court 1912.
Laplace Marquis de: A Philosophical Essay on Probability. Dover, 1976.
Lindley D.: Where does that weirdness go?.Vintage, 1997.
Lucrecio Caro: De la Naturaleza de las cosas. Traducción de Lisandro Alvarado. Equinoccio,
Universidad Simón Bolívar, 1982.
Monod J.: Hasard et Necesité. Editions du Soleil,1970.
Otto R.: The Idea of the Holy. Oxford University,1958.
Penrose R.: Quantum Physics and Conscious Thought. (in Quantum Implications: Essays in
Honor of David Bohm. Methuen,1987).
Prigogin I.: Order out of Chaos. New Sciences, 1984.
Salet G.: Hasard et Certitude. Editions Scientifiques Saint-Edme, 1972.
San Agustín: La Ciudad de Dios. Ed Alma Mater, 1953.
Schuster H.G. Deterministic Chaos. VCH, 1989.
Spinoza: Etica II Prop.7.
Toynbee A.: A Study of History. Vol. I-II-III-b. Oxford University Press, 1934-1961.
Vollmert B.: La molécula y la vida. Gedisa, 1988. (Das Molekule und Leben. Rotwolt Verlag,
1985)
West Churchman C.: The System Approach. Delta, 1968.
Wagensberg J.: Ideas Sobre la Complejidad del Mundo. Metatemas, 1994.