

**UNA MAQUINA DE ESTADO FINITO MEDIANTE UNA FUNCION DE ABSTRACION
CUALITATIVA DE UN SISTEMA DINAMICO**

Wladimir Rodríguez Graterol

Universidad de los Andes, Doctorado en Ciencias Aplicadas,
Mérida, Venezuela, 0058
wladimir@ula.ve

y

Hernando Castañeda Marín

Universidad de Pamplona, Estudiante de Doctorado Ciencias Aplicadas,
Mérida, Venezuela, 0057
hcastaneda@unipamplona.edu.co

Abstract

Modeling and simulating dynamical system is an autonomous problem in sciences and engineering. General methodologies have been proposed in the following fields sciences, general system theory, the control theory, the economy and lately in artificial intelligence. These different methodologies are necessary because of the granularity and consistency problems. The scientific systems' approximation is based in the mathematical formulation of the dynamical systems, whose strength is based in the modeling an automatic quantitative simulation, which maintains a precise description of the physical systems, to guarantee consistency.

Keywords: Sistemas Dinámicos, Teoría de la Computación, Control Inteligente, Inteligencia Artificial.

1. Introducción

En la teoría de sistemas de control se especifican propiedades cualitativas y también se modela cualitativamente los sistemas, en la visión científica el principal interés por los sistemas es por ejemplo la estabilidad la observabilidad y la controlabilidad.

Esta es una línea de interés para algunas investigaciones basadas en el problema de particionar el espacio de estados en regiones definidas por las propiedades asintóticas de las trayectorias del sistema como una aproximación comportacional.

Esta clase de partición consiste de regiones abiertas delineadas mediante "trayectorias limitantes" que reciben el nombre de hipersuperficies que difieren en diversas formas. La principal diferencia esta en que solo se hacen particiones en el espacio de estados sobre la base de su dirección, el proceso de entrada no es incluida y sin embargo el problema de consistencia del proceso de particionar diferentes espacios del sistema es inexistente. El proceso de entrada es especialmente importante por considerar no-solo la evolución libre en el tiempo del sistema dinámico sino por el análisis de su

comportamiento cuando se aplica el proceso de control de la entrada, también se puede considerar aspectos relacionados con la variación en el tiempo (bifurcaciones) de los sistemas dinámicos.

El ejemplo que ilustra este documento se mostrara como los estados, entradas y salidas de un autómata de estados finitos pueden ser asignados a subconjuntos en el espacio de un sistema dinámico cuantitativo así que la representación sea consistente y sin embargo el resultado del razonamiento cualitativo sea sostenible en el sistema cuantitativo.

En el ejemplo se inicia con una partición en un intervalo explicito de la variable de salida, induciendo una partición del espacio de estados a través de la función inversa de la salida, la cual a la vez induce una partición del proceso de entrada por el espacio de estado inicial a través de la función inversa de transición de estados

Los bordes de las particiones reciben el nombre de hipersuperficies criticas, mientras que las funciones que mapean un sistema cuantitativo en una representación cualitativa reciben el nombre de función de abstracción cualitativa. Las hipersuperficies criticas y las funciones de abstracción cualitativa son equivalentes. Se

demonstrara que el establecimiento de hipersuperficies criticas , las cuales particionan espacios de sistemas dinámicos generales, entregan particiones de las salidas del sistema.

Cuando el sistema que sé esta modelando esta sujeto a ruido, un mecanismo para tratar con la incertidumbre producida por el ruido tiene que ser incorporado en el modelo o sistema de control. Este mecanismo puede ser la teoría de los conjuntos difusos, pero lo difuso puede estar alrededor de las hipersuperficies, por ejemplo alrededor de las paredes de la caja. Esto puede ser acoplado mediante tratamiento de las hipersuperficies ya sea mediante variables aleatorias o difusas.

Una forma de evitar problemas con la consistencia, es utilizar representaciones que tienen imprecisiones como propiedades inherentes, en esta clase de representaciones se usan métodos basados en la probabilidad y los conjuntos difusos.

Dos significados populares usados para subdividir el espacio del sistema son los conjuntos difusos y los hitos puntuales. Estas dos aproximaciones tienen características comunes: la forma básica de particionar un intervalo un espacio unidimensional, un rectángulo en un espacio bidimensional, un paralelepípedo rectangular en un espacio tridimensional y una hipercaja en un espacio multidimensional. Cuando se divide el espacio en hitos puntuales los bordes entre las cajas son crisp, mientras que si consideramos la aproximación de conjuntos difusos, los bordes son difusos, pero la forma principal en ambos caso es que son cajas.

Los bordes de las particiones reciben el nombre de hipersuperficies criticas, mientras que las funciones que mapea un sistema cuantitativo en una representación cualitativa reciben el nombre de función de abstracción cualitativa. Las hipersuperficies criticas y las funciones de abstracción cualitativa son equivalentes. Se mostrara que el establecimiento de hipersuperficies criticas , las cuales particionan espacios de sistemas dinámicos generales, entregan particiones de las salidas del sistema. Cuando el sistema que sé esta modelando esta sujeto a ruido, un mecanismo para tratar con la incertidumbre producida por el ruido tiene que ser incorporado en el modelo o sistema de control. Este mecanismo puede ser , los conjuntos difusos, pero lo difuso puede estar alrededor de las hipersuperficies por ejemplo alrededor de las paredes de la caja. Esto puede ser acoplado mediante tratamiento de las hipersuperficies ya sea mediante variables aleatorias o difusas.

Una forma de evitar problemas con la consistencia es utilizar representaciones que tienen imprecisiones como propiedades inherentes, en esta clase de representaciones se usan métodos basados en la probabilidad y los conjuntos difusos.

Dos significados populares usados para subdividir el espacio del sistema son los conjuntos difusos y los hitos puntuales. Estas dos aproximaciones que tienen características comunes: la forma básica de particionar un intervalo un espacio unidimensional, un rectángulo en un espacio bidimensional, un paralelepípedo rectangular en un espacio tridimensional y una hipercaja en un espacio multidimensional. Cuando se divide el espacio en hitos puntuales los bordes entre las cajas son crisp, mientras que si consideramos la aproximación de conjuntos difusos, los bordes son difusos, pero la forma principal en ambos caso es que son cajas.

2. Sistemas Dinámicos Generales

Un sistema dinámico difuso, es el nombre sugerido, a los sistemas dinámicos clásicos fusificados. Sin embargo hay diferentes tipos de sistemas dinámicos clásicos y su fusificación puede ser diferente de un tipo a otro. Se introducirá el clásico concepto de sistema dinámico general, bajo el cual todos los tipos de sistemas dinámicos crisp son considerados.

Un sistema dinámico general[2],[5][7], δ , es una estructura matemática que es capturada mediante una octo-tupla

$$\delta = (X, W, Q, T, \leq_T, P, f, g,) \quad (1)$$

Donde:

X, W, Q Son conjuntos de entrada, salida y estados internos de un sistema, respectivamente,
 T Es el conjunto del tiempo. \leq_T Es un total ordenamiento del conjunto del tiempo T .

P Es un conjunto de funciones de tiempo $p: T \rightarrow X$, la cual requiere ser cerrado bajo una composición que es llamado *concatenacion* - τ y definida como se muestra a continuación: cualquier $u, v \in U$ y $\tau \in T$, la *concatenacion* - τ $u \circ_{\tau} v$ es una función definida como:

$$E[u \circ_{\tau} v] = \begin{cases} u(t) & \text{cuando } t < \tau \\ v(t) & \text{cuando } t \geq \tau \end{cases} \quad (2)$$

f Es una función de transición de estado global $f: TxTxQxP \rightarrow Q$, el cual es requerido para tener las siguientes propiedades:

a) $f(t, t, Q, P) = Q$ (consistencia)

b)

$$f(t_3, t_1, Q, P) = f[t_3, t_2, f(t_2, t_1, Q, P), P]$$

para cualquier $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ (propiedad de

sustitución de estado) o propiedad (semigrupo)

$$c) f(t_2, t_1, Q, P) = f(t_2, t_1, Q, P) \quad \text{cuando} \\ u(t) = v(t) \text{ para } t_1 \leq t \leq t_2.$$

Para sistemas invariantes en el tiempo $f: TxQxP \rightarrow Z$ y $t_0 = 0$.

g Es una función de respuesta (o una función de salida), $g: TxQ \rightarrow W$ para sistemas invariantes en el tiempo $Q \rightarrow W$

En el caso general (multivariado) $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ y $Z = Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, el conjunto de salida es típicamente considerado unidimensional. Los conceptos de entrada, salida y estado hacen referencia a espacio de entradas, espacio de salidas y espacio de estados respectivamente. El espacio del sistema se refiere al producto escalar entre dichos espacios.

La definición de un *SDG* es construido de tal forma que refleja algunas de las características generales de todos los sistemas dinámicos. Tipos especiales de sistemas dinámicos son obtenidos cuando algunas de las propiedades de los ocho componentes de δ son modificados o adicionadas propiedades según determinados requerimientos. Cuando, por ejemplo, se obtiene un sistema dinámico discreto. Cuando adicionalmente los conjuntos X, Y, Z son finitos y las funciones de transición son remplazadas con funciones de transición local $s: ZxX \rightarrow Z$ (por ejemplo, el comportamiento de un sistema es invariante en el tiempo) se obtiene un autómata finito. Mas adelante se explicara como estos sistemas dinámicos especiales pueden ser fusificados.

Cuando $T \in \mathbb{R}$ o $T \in \mathbb{R}^+$ para algunos enteros $n, m, q \geq 1$. En esta importante clase de sistemas dinámicos, las funciones de transición son expresadas en términos de apropiadas ecuaciones diferenciales que son en general variante en el tiempo y no lineal. Una forma de fusificar estos sistemas es mediante el uso de las aproximaciones lingüísticas. Otra forma es aplicar el principio de extensión directamente a la ecuación diferencial involucrada. Esto requiere en algún sentido, el desarrollo del cálculo diferencial difuso.

La propiedad de *concatenación* - τ del proceso de entrada permite la flexibilidad de seleccionar cualquier estrategia de control para un sistema dado en cualquier punto en el tiempo. Un típico escenario de control ocurre cuando la variable de control es una función escalón. El espacio de estado Q de un SDG es el más importante elemento en la definición. Cada estado $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ representa la historia del sistema por lo que es necesario computar la salida actual del sistema como respuesta del estado de la entrada.

La propiedad de consistencia de la función de transición de estados asegura que estas transiciones no son instantáneas, la propiedad de semigrupo concierne tanto al estado como a la función de transición, esta propiedad significa que el estado del sistema en cualquier instante en el tiempo puede ser computado directamente en el intervalo $[t_0, t]$ o indirectamente haciendo dos computaciones en los intervalos $[t_0, t_1]$ y $[t_1, t]$. Más general, esta propiedad permite descomponer la computación del estado en muchas etapas finitas. La propiedad de causalidad significa que el valor del nuevo estado depende solo de la función de entrada u restringida al intervalo $[t_0, t]$.

La función de transición de estado s en la definición (1) es llamada "función de transición global" para sistemas discretos, donde el tiempo es representado mediante un conjunto de enteros y tiene sentido hablar de actual y próximo tiempo. En este caso, es posible remplazar la función de transición global s por una función de transición local f que computa el estado y una instancia de próximo tiempo dando el estado actual y el valor de la entrada x en el instante de tiempo. La función de transición local se especifica como:

$$f: TxQxX \rightarrow Q \quad (3)$$

Cuando el sistema es invariante en el tiempo se reduce a:

$$f: QxX \rightarrow Q \quad (4)$$

Para sistemas de tiempo continuo, la existencia de tal función de transición local puede garantizar solo que el sistema es suficientemente "spot". En tal caso la función de transición (sistema invariante en le tiempo) es expresada usando una ecuación diferencial

$$\dot{Z} = f(Q(t), X(t)) \quad (5)$$

En los ejemplos se utiliza la función de transición local.

3. Sistemas dinámicos cualitativos (QDS)

Un autómata finito (también llamado maquina de estados finitos o maquina secuencial) FSA es un sistema dinámico operando en tiempo discreto que transforma secuencias de estados entradas (estímulos) convirtiéndolas como entradas del sistema a secuencias de estados de salidas (respuestas) producidas como salidas del sistema. Las secuencias tienen que ser finitas o infinitamente contables.

Un autómata de estado finito[3],[5] Σ , es un sistema relacional definido por la quintupla

$$\Sigma = (\Lambda, \Omega, \Theta, \theta, \gamma) \quad (6)$$

Donde:

- Λ Es un conjunto de eventos de entrada.
- Ω Es un conjunto de estados internos
- Θ Es un de estados de salida.

- θ Es una función de transición de estados cualitativos de la forma $\theta : \Theta \times \Lambda \rightarrow \Theta$
- γ Es una función de salida cualitativa de la forma $\Theta \rightarrow \Omega$

3.1 Función de Abstracción Cualitativa

Una abstracción es definida entre un par de sistemas formales y es un mapeo completo que relaciona el lenguaje de los dos sistemas. Uno de los sistemas recibe el nombre de sistema fundamental y el otro sistema abstracto.

Dos de las características de la abstracción son: “conservación de algunas propiedades deseables” específicamente en que representación esta probablemente correlacionada con la estructura del sistema dinámico, que significa que las conclusiones a cerca de las transiciones de estado y salidas del sistema derivan con la representación cualitativa es muy sostenible con el sistema dinámico cuantitativo. Y “Detalles del lanzamiento”. Ya que se utiliza la abstracción para representar un sistema dinámico de cuantitativo de estado infinito que es un autómata finito.

Se define “sistema dinámico cualitativo” QDS como un autómata de estado finito FSA el cual relaciona la estructura de un sistema dinámico general. Se establece una relación entre el GDS y QDS y es donde se establece el concepto de “función de abstracción cualitativa”

Definición: sea S un conjunto e I un conjunto finito. Una función $\chi : S \rightarrow I$ recibe el nombre de función de abstracción cualitativa si esta es total y es una relación de muchos a uno.

Un ejemplo típico de función de abstracción es:

$$sign : W \rightarrow (-1, 1, 0)$$

Cuyo valor esta determinado por el signo de la salida W del sistema (esto es -1 para valores negativos de W , 1 para el positivo y 0 para $W = 0$). El razonamiento cualitativo en inteligencia artificial, W es considerado una variable de salida o la derivada de una variable.

Las variables Λ , Θ y Ω de QDS esta relacionado con el sistema dinámico general GDS a través de las funciones de abstracción cualitativa

$$\chi = (\chi_{TQX} : \chi_Q : \chi_W) \quad (7)$$

Consistente de tres funciones de abstracción

$$\chi_{TQX} : TxQxX \rightarrow \Lambda, \chi_Q : Q \rightarrow \Theta \text{ y}$$

$$\chi_W : Q \rightarrow \Omega$$

Donde $(\chi_{TQX} : \chi_Q : \chi_W)$ reciben el nombre de función de abstracción de eventos de entrada cualitativa, estado cualitativo y salida respectivamente.

La Fig. 1 Ilustra las funciones de abstracción cualitativa entre un GDS y un QDS

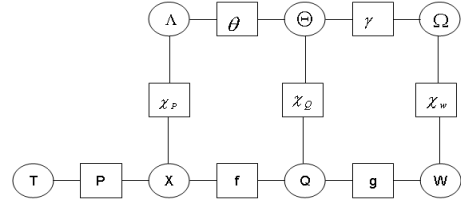


Fig. 1. Funciones de abstracción cualitativa entre GDS y QDS

3.2 Suposiciones Derivadas de la Función de Abstracción Cualitativa

Es necesario poner atención de cómo generar particiones o equivalentemente abstracciones cualitativas del espacio del sistema. La pregunta principal es si se puede particionar uno de los espacios del sistema en subconjuntos cualitativos independientes del resto de este espacio. Es naturalmente sospechoso que los postulados establecidos por [7] pueda restringir la flexibilidad en seleccionar particiones para particulares espacios de sistemas por lo que se establece dos estrategias: (1) Una partición en el espacio de salida produce un particionamiento único en el espacio de estados Q y (2) las particiones del espacio de estados singularmente definen las particiones $TxQxX$.

Teorema 1. Sea $W_\pi = W_1 : \dots : W_n$ una partición finita de un espacio de salida W de un GDS, dado la función inversa de abstracción $\chi_w^{-1} : \Omega \rightarrow W_\pi$. Sea Q_π quien describe una partición de Q definida como una imagen inversa de W_π a través de $g : Q_\pi = g^{-1}(W_\pi)$ y sea TQX_π describe la partición de $TxQxX$ definida como una imagen inversa de Q_π a través de $f : TXQ_\pi = f^{-1}(Q_\pi)$.

Se prueba entonces:

- a) Q_π es una partición máxima admisible de Q
- b) TXQ_π es una partición máxima admisible de $TxQxX$.

En aplicaciones prácticas, las suposiciones de continuidad de las funciones son significativamente típicas., Así como es la suposición de partición de una variable en un intervalo. Como ejemplo se puede limitar ciertas consideraciones para tales sistemas donde:

1. Una función f y g son continuas, excepto para un número finito de puntos.
2. El sistema dinámico es un sistema de simple salida (el espacio de salida es una sola variable)
3. Las particiones de las variables están dadas mediante una secuencia de puntos (Reciben el nombre de puntos distinguidos). Esto resulta de particionar la variable de salida W en una secuencia de intervalos abiertos y puntos.

$$W = (-\infty, w_1) \cup w_1 \cup \dots \cup (w_{k-1}, w_k) \cup (w_k, \infty) \cup [\inf]$$

El símbolo \inf es introducido para representar un punto extra que puede ser adicionado en la línea de los reales como consecuencia para compactar. \inf Representa ∞ y $-\infty$. Se considera punto distinguible, similarmente las w_i .

Los tipos de restricciones de los espacios del sistema y las consecuencias de tales restricciones de las particiones de los espacios de los GDS son materia de la topología. Para analizar esto se necesita prestar atención a las propiedades dinámicas de los sistemas dinámicos.

Por ejemplo las clases cualitativas del espacio de estados Q obtenidos a través de la aplicación de g^{-1} en intervalos abiertos de W , son regiones en Q que son abiertos y conectados. Similarmente la aplicación de f^{-1} en estas regiones resulta en una colección de regiones abiertas y conectadas en $TxQxX$, reciben el nombre de hipersuperficies críticas. Dependiendo del tipo de función f y g se puede obtener solo una pocas o un número infinito de regiones.

Las hipersuperficies críticas en Q es una imagen de un punto distinguido en W a través de g^{-1} . Una hipersuperficie critica en $TxQxX$ es una imagen de una superficie critica en Q a través de f^{-1} .

El comportamiento de un sistema puede estar representado como una trayectoria en cada espacio. El proceso de entrada más la trayectoria del estado inicial, la trayectoria del espacio de fase y la trayectoria del espacio de salida. Cada una de estas trayectorias puede atravesar una hipersuperficie critica. Si estas superficies

críticas están dadas por puntos distinguidos en las variables de salida del sistema, entonces el evento de cruzar una hipersuperficie en un espacio del sistema coincide con el cruce de una hipersuperficie critica en todos los espacios del sistema.

El comportamiento cualitativo puede ser caracterizado por la trayectoria por ejemplo por series de entradas cualitativas (eventos) en Λ , estados cualitativos en Θ o salidas cualitativas en Ω . Se pueden considerar las hipersuperficies críticas como hitos distribuidos.

4. Sistema Dinámico Difuso.

El sistema dinámico difuso recibe también el nombre de maquina de estados finitos[4],[5] es equivalente en su estructura a un sistema dinámico pero las funciones de transición de estados y la función de salida son remplazadas por relaciones difusas.

La transformación es acoplada por el concepto de cambios dinámico de los estados internos. En cada instante discreto, la respuesta del sistema es determinada con base en recibir él estímulo y el estado interno del sistema. Al mismo tiempo, un nuevo estado interno es determinado, el cual reemplaza al predecesor. El nuevo estado interno es almacenado en el sistema para ser usado en la evolución del sistema. Un autómata es llamado autómata difuso cuando los estados son caracterizados por conjuntos difusos y la producción de respuestas y nuevos estados es facilitada por apropiadas relaciones difusas.

Un autómata finito difuso Σ , [5] es un sistema relacional difuso definido por la quintupla

$$\Sigma = (\Lambda, \Omega, \Theta, R, S) \quad (9)$$

Donde:

- Λ Es un conjunto de eventos de entrada no vacío (estímulos)
- Ω Es un conjunto finito no vacío de estados internos
- Θ Es un conjunto finito no vacío de estados de salida (respuestas)
- R Es una relación difusa $\Theta \times \Omega$.
- S Es una relación difusa $\Lambda \times \Omega \times \Omega$

Se asume que $\Lambda = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$\Omega = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$W = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ y sea A^t, B^t, C^t, E^t denota los conjuntos difusos que

caracterizan, respectivamente, los estímulos, las respuestas, los estados internos actuales y los estados internos emergentes (próximo estado) del autómata en el tiempo t .

La idea básica del autómata difuso es: Dado A^t y C^t en algún tiempo t , la relación difusa R y S permite determinar B^t y C^t . Un conjunto difuso C^1 , el cual caracteriza el estado interno inicial, tiene que ser dado para hacer operar el autómata difuso. Entonces $C^t = E^{t-1}$ para cada tiempo $t \in \mathbb{N} - \{1\}$. La ecuación

$C^t = E^{t-1}$ se asume que será implementado por el bloque llamado almacenamiento. Su rol es almacenar el conjunto difuso producido E^t en cada instante t y la descarga de la próxima t bajo la etiqueta C^t .

Dada una secuencia A^1, A^2, \dots y la caracterización inicial C^1 de un estado interno, la relación difusa R y S permite generar las correspondientes secuencias B^1, B^2, \dots y $C^2 = E^1, C^3 = E^2, \dots$. Debido a los roles de las relaciones R y S , es razonable llamar a R una relación respuesta y a S una relación de estado de transición.

Asumiendo las operaciones de conjuntos difusos estándar, el autómata difuso opera como se explica a continuación:

Para cualquier estado de entrada difusa dada A^t , la relación de transición de estado terciaria S es convertida en una relación binaria S_{A^t} en $\Theta \times \Theta$ mediante la formula:

$$S_{A^t}(z_i, z_j) = \max_{k \in \mathbb{N}} \left(\min \left[A^t(x_k), S(x_k, z_i, z_j) \right] \right) \quad (10)$$

Para todos los pares $(z_i, z_j) \in Z \times Z$. Entonces se asume que el presente estado difuso C^t esta dado, el próximo estado difuso E^t y el estado de salida difuso B^t son determinados por la composición máx.-min.

$$E^t = C^t \circ S_{A^t} \quad (11)$$

$$B^t = C^t \circ R$$

Las ecuaciones anteriores son suficientes para manejar la secuencia de estados difusos.

Cuando todos los estados del autómata difuso son definidos crisp y R, S son relaciones crisp, se obtiene un autómata crisp que generalmente no es determinístico. Adicionalmente cuando todos los estados son singleton soporta que los conjuntos Λ, Ω, Θ y las relaciones R y S sean determinísticas, se obtiene un clásico autómata determinístico tipo Moore.

Las operaciones min. y máx. Que se emplean pueden en curso remplazarse por *norma-t* y

conorma-t respectivamente. Para cada reemplazo se obtiene un autómata de diferente tipo. Cuando min. Es remplazado con el producto y máx. Es remplazado con la suma algebraica se requiere adicionalmente estados de entradas singleton y se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{z_i \in Z} C^1(z_i) = 1$$

$$\sum_{y_i \in Y} R(z_i, y_i) = 1 \text{ para cada } z_i \in Z.$$

$$\sum_{z_j \in Z} S(x_k, z_i, z_j) = 1 \text{ para cada } (x_k, z_i) \in X \times Z$$

Se obtiene un clásico autómata probabilístico tipo Moore.

5. Ejemplo

Para clarificar las ideas presentadas, se considerara un ejemplo muy sencillo de sistemas dinámicos.

Los sistemas de primer orden son aquellos que poseen un único nivel en su estructura. Están formados, por bucles de retroalimentación positiva o por retroalimentación negativa, cuya división es importante ya que caracterizan el comportamiento dinámico del sistema, dando lugar a estructuras de crecimiento o de autorregulación respectivamente.

El estudio de sistemas de control proporciona una gran cantidad de ejemplos de sistemas con retroalimentación negativa[1]. La estructura de este sistema esta formado por:

- El valor del nivel (estado) deseado u objetivo.
- El error o discrepancia
- La acción correctora o flujo
- El nivel o estado del sistema.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema son:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t * F(t)$$

$$F(t) = FT * D(t) \quad (13)$$

$$D(t) = OB - N(t)$$

A continuación se ilustra el sistema mediante un diagrama causa efecto.

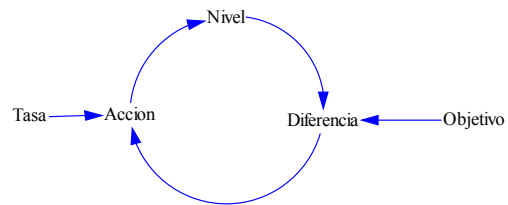


Figure 3. Diagrama Causal del sistema

Las condiciones iniciales son $N(0)$ y $F(0) = OB$ donde N es el nivel o estado del sistema y F es la acción correctora o flujo en t . En la terminología de los GDS, el espacio de estado Q es representado por un par de variables de estado (N, F) , el estado inicial esta representado por (N_0, F_0) .

Supóngase también que la salida del sistema esta dada por $w = g(t) = \frac{N(t)}{F(t)}$

La función de transición f esta dada por dos ecuaciones que pueden ser fácilmente obtenidos de la ecuación diferencial.

$$\frac{dN}{dx} = F(t) = FT^*[OB - N(t)] \quad (14)$$

$$N(t) = OB + [N(0) - OB]e^{(-FT^*t)}$$

El espacio de salida W consiste de los siguientes intervalos.

$$W = -\left\{ (0, w^*), [w^*], (w^*, OB), [Inf] \right\}$$

Supóngase que la función de abstracción cualitativa para el espacio de salida

$$\chi_w(w) = \begin{cases} w_{-1} & 0 < w < w^* \\ w_0 & w = w^* \\ w_1 & w^* < w < \infty \\ w_{\infty} & w = Inf. \end{cases} \quad (15)$$

El espacio de salida cualitativa Ω consiste de cuatro elementos :

$$\Omega = \{w_{-1}, w_0, w_1, w_{\infty}\}$$

La Grafica a continuación muestra el comportamiento de $g(t)$ que es la función de salida.

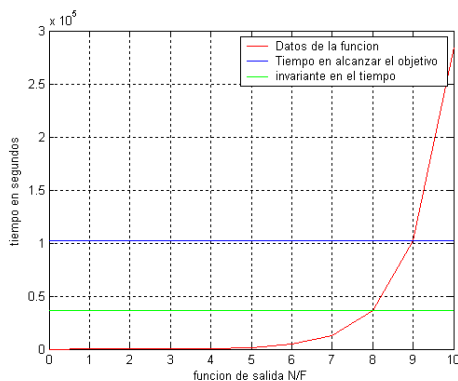


Figure 3. Función de salida $g(t)$

El espacio de estados cualitativos consiste de cuatro estados, especificados así:

$$\Omega = \{\theta_{-1}, \theta_0, \theta_1, \theta_{\infty}\}$$

La función de abstracción cualitativa del espacio de estado esta dada mediante la expresión:

$$\chi_{TQX} = \begin{cases} \lambda_0, F_0 = \frac{M_0 e^{-\tau t}}{w^*} \\ \lambda_{\infty}, F_{\infty} = \frac{M_{\infty} e^{-\tau t}}{w^*} \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t < w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t < w^* \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} < M_0 e^{-\tau t} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} < M_0 e^{-\tau t} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} > M_0 e^{-\tau t} \wedge t < w^* \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} > M_0 e^{-\tau t} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t > w^* \end{cases}$$

El espacio de eventos de entrada cualitativa Λ consiste de cuatro valores cualitativos.

$$\Lambda = \{\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_{\infty}\}$$

Los eventos de entrada cualitativos de la función de abstracción χ_{TQX} esta dada por:

$$\chi_{TQX} = \begin{cases} \lambda_0, F_0 = \frac{M_0 e^{-\tau t}}{w^*} \\ \lambda_{\infty}, F_{\infty} = \frac{M_{\infty} e^{-\tau t}}{w^*} \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t < w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t < w^* \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} < M_0 e^{-\tau t} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} < M_0 e^{-\tau t} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} > M_0 e^{-\tau t} \wedge t < w^* \\ \lambda_1, F_1 > \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} > M_0 e^{-\tau t} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t > w^* \\ \lambda_1, F_1 < \frac{OB + [M_1 - OB]e^{-\tau t}}{w^*} \wedge t > w^* \end{cases}$$

El significado de las entradas cualitativas (eventos) es tal que λ_{-1} causa una conmutación cualitativa al estado θ_{-1} , λ_0 Conmuta el estado θ_0 , λ_1 al estado θ_0 , λ_{∞} al estado θ_{∞} . Esto se representa en la figura 4.

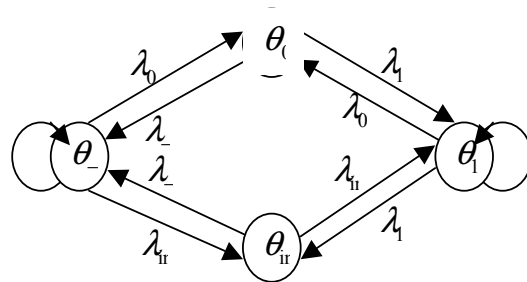


Figure 3. Transiciones de estado cualitativo

Ahora se considera el autómata difuso con $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ y $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ cuyas relaciones de salida R y

relaciones de estado de transición S están definidas respectivamente, mediante la matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ .5 & 1 & .3 \end{bmatrix}$$

La matriz tridimensional :

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & .4 & .2 & 1 \\ .3 & 1 & 0 & .2 \\ .5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ .2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & .3 & 0 & .6 \end{bmatrix}$$

Para describir como el autómata difuso opera. Los conjuntos difusos que describen la entrada, salida y estados internos en el tiempo t están definidos por los vectores.

$$A^t = [A^t(x_1), A^t(x_2)]$$

$$B^t = [B^t(y_1), B^t(y_2), B^t(y_3)]$$

$$C^t = [C^t(z_1), C^t(z_2), C^t(z_3), C^t(z_4)]$$

Si el estado inicial difuso del autómata es $C^1 = [1 \ .8 \ .6 \ .4]$ usando la ecuación (10) se obtiene la matriz:

$$S_{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & .4 & .4 & 1 \\ .3 & 1 & 0 & .4 \\ .5 & 0 & 0 & 1 \\ .4 & .3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular el próximo estado difuso E^1 y el espacio de salida B^1 del autómata se utiliza las ecuaciones (11) respectivamente:

Si la entrada del estado difuso es $A^1 = [1 \ .4]$ se produce $E^1 = [.5 \ .8 \ .4 \ 1]$ y $B^1 = [1 \ .8 \ .6]$.

Si la nueva entrada del estado difuso es $A^2 = [1 \ .4]$ se produce $E^2 = [1 \ .3 \ .5 \ .8]$ y $B^2 = [.5 \ 1 \ .4]$.

Similarmente, se puede producir una larga secuencia de estados internos y salidas difusas para cualquier secuencia de estados de entrada.

6. Conclusiones y trabajos futuros.

Este documento presenta un ejemplo de un sistema dinámico con retroalimentación negativa bajo un esquema de representación simbólica que recibe el nombre de modelo dinámico cualitativo cuya estructura es representada mediante un autómata de estado finito. Una de las principales ideas que provee consistencia es la interpretación de los eventos de entrada cualitativa como elementos de la partición de los productos cartesianos entre las entradas y los conjuntos de estados iniciales y tiempo. Una de las formas de evitar problemas con la consistencia es el uso de representaciones que contengan imprecisión como propiedad inherente, en esta clase de representaciones se utilizó métodos basados en los conjuntos difusos.

Este esquema puede ser fácilmente generalizado a otras aplicaciones como son los sistemas de control híbrido ya que en las operaciones del generador se basa en el principio de fronteras, las cuales son superficies críticas en el espacio de estados.

Referencias

- [1] Aracil S. J. Introducción a la dinámica de sistemas, Alianza Editorial S. A. Madrid 1979.
- [2] Carrol J, Lond .D: Theory of Finite Automata with an Introduction to Formal Language. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [3] Floyd, R.W. The Language of Machines: An Introduction to Computability and Formal Languages. Nueva York: Freeman, 1994.
- [4] Hopcroft J.E., Motwani R, Ullman J: Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, 2a.ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1979.
- [5] Klir G.J, Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Published by Prentice Hall PTR. Upper Saddle River, New Jersey 07458.
- [6] Knuth, DE: On the Translation of Languages from Left to Right, Information and Control 7: 207-223,1964.
- [7] Mieczyslaw M.K. On Consistent Symbolic Representation of General Dynamic System. NSF grants IRI-8915057. IEEE Symposium on Intelligent Control. Glasgow. January 1992.
- [8] Polderman J.W, Willems J.C. Introduction to Mathematical System Theory: A Behavioral Approach. Springer, New York, 1998.
- [9] Sipser M: Introduction to the theory of Computer of Computation. Boston, MA: PWS, 1997
- [10] Stephen P.L, Mieczyslaw M.K, Zbigniew K. Q^2 Symbolic Reasoning about Noisy Dynamic System. Submitted for publication IEEE Trans. On system, Man and Cybernetics. January 1996.
- [11] Yager R.R, Filev D.P. Essentials of Fuzzy Modeling and Control. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1994.