Introducción

La teoría de números es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades aritméticas de los números enteros. Propiedades aritméticas son todas aquellas que tienen que ver con suma y producto de números. Por ejemplo, dado un número entero n, el problema de hallar todos sus divisores es un problema típico de la teoría de números. En esta introducción haremos una exposición, desde el punto de vista histórico, de cómo se ha desarrollado esta disciplina, concentrándonos en los hechos más importantes y en sus protagonistas. Es una historia muy larga, tan larga como la del hombre, pero nos enseña comó el hombre se ha planteado problemas difíciles desde el punto de vista teórico y cómo se han resuelto estos problemas con la introducción de nuevas ideas y métodos de razonamiento. Estas nuevas rutas han generado un panorama inmenso dentro de la matemática actual, debido a una evolución lenta, pero extraordinaria, del pensamiento de todos estos hombres.

Epoca Antigua

El origen de la teoría de números se remonta a los orígenes de la civilización, con los habitantes de Caldea y Babilonia hace 3500 años aproximadamente. Ellos han dejado sus conocimientos escritos en símbolos cuneiformes, los cuales han llegado bastante bien conservados hasta nuestros días. En algunas de estas tablillas se han calculado soluciones enteras de la ecuación

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como por ejemplo el triple (3, 4, 5), el cual satisface: $3^2+4^2 = 5^2$. Los babilonios conocían ésta y otras soluciones y nos dejaron una lista de más de sesenta de ellas. Sin embargo no se conoce el método empleado por ellos para llevar a cabo estos cálculos.

Con los griegos aparecen las primeras demostraciones formales en matemática, lo cual es un avance extraordinario en comparación con las culturas anteriores. Antes de ellos, los problemas se resolvían de manera particular sin dar un método general para hallar las soluciones. El espíritu de razonamiento griego, claro y riguroso, establece las bases sobre las que se ha desarrollado la matemática a través de los siglos.

Una muestra de esta capacidad de razonamiento abstracto de los matemáticos griegos son todos esos hermosos teoremas sobre geometría plana, en donde se demuestran de forma elegante, proposiciones sobre áreas de triángulos, cuadrados y polígonos, usando propiedades muy simples sobre puntos, intersección de líneas, etc.

Así vemos como **Pitágoras** (500 a.c.) nos da un método general para hallar todas las soluciones de la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

razón por la cual, se le da el nombre de Ecuación Pitagórica.

Aparte de Pitágoras, hay que mencionar a otros dos grandes matemáticos griegos, cuya contribución a la teoría de números es muy importante.

El primero de ellos es **Euclides** (300 a.c.) quien escribió uno de los libros más famosos que se conoce sobre Geometría, llamado *Los Elementos.* Este libro es un modelo del método de demostración creado por los griegos, llamado método deductivo, mediante el cual se demuestran teoremas y proposiciones a partir de otras proposiciones simples llamadas axiomas , en forma lógica y muy eficiente.

En uno de estos elementos, Euclides establece una serie de proposiciones sobre los números enteros, las cuales pueden ser consideradas como el inicio de la teoría de números. Por ejemplo, la prueba sorprendente de que existe un número infinito de números primos.

Euclides suponía que existe un número finito de primos $p_1, p_2, \ldots, p_t$, luego el número

$$x = p_1 p_2 \ldots p_t + 1$$

no está en la lista de los anteriores y por lo tanto, no es primo.

Sin embargo, usando el teorema de Factorización única de los números enteros, el cual se debe también a Euclides, se concluye que x

tiene algún divisor primo p_i . Esto nos lleva a una contradicción, pues p_i no puede dividir a $p_1 p_2 \ldots p_t + 1$.

Este método de demostración, llamado reducción al absurdo, se debe a los griegos y ha sido uno de los más utilizados en la matemática desde entonces.

Los números primos: 2, 3, 5, 7, ... han ejercido una atracción fascinante sobre todos los matemáticos desde la época de los griegos. Su distribución en el conjunto de los enteros es realmente un misterio, por la forma tan irregular como aparecen. Ellos han ocupado un papel de primera importancia dentro de la teoría de números; muchas preguntas sobre los números primos, aún hoy en día, permanecen sin respuesta.

También a Euclides se debe el algoritmo para hallar el máximo común divisor entre dos enteros, el cual es una aplicación del teorema de la división. Gracias a este algoritmo, y al teorema de factorización única, se pueden obtener muchas propiedades importantes sobre la aritmética de los enteros.

El tercer matemático griego cuya contribución a la teoría de números ha sido fundamental, fue **Diofantos de Alejandría** (250 a.c.); llamado el Padre de la Teoría de Números.

Diofantos escribió muchos libros de matemática (cerca de 12), de los cuales sólo han sobrevivido cuatro. El más importante de todos es *La Aritmética.*

Esta obra es un tratado de resolución de ecuaciones algebráicas provenientes de la solución de problemas prácticos. El método empleado por Diofantos en el tratamiento de estas ecuaciones, consiste en hacer cambios de variable muy ingeniosos para reducir el grado de éstas, así como el número de indeterminadas. Los problemas planteados son en números enteros, de cierta dificultad, y llegan a aparecer ecuaciones hasta de sexto grado con varias variables. Por ejemplo en el libro IV aparecen las ecuaciones

$$x^2 + 2 = u^3$$

$$x^2 - 4x + 4 = u^3$$

También ecuaciones más complejas con tres incógnitas, como

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^3 + x_k = u_k^3 \quad k = 1, \ldots, 3$$

En la mayoría de los casos, Diofantos obtiene una solución particular de los problemas, sin demostrar un método general. Cada ecuación es tratada individualmente haciendo uso de brillantes artificios de cálculo. Sin embargo, se sabe que muchos de los problemas planteados poseen otras soluciones de las cuales él no estaba consciente.

No obstante, Diofantos menciona tres lemas en su Aritmética, llamados Porismos, que quizás fueron demostrados. Uno de ellos dice:

Si $x + a = u^2$ e $y + a = v^2$, $xy + a = w^2$, entonces $v = u + 1$.

También se puede concluir que Diofantos conocía algunos hechos importantes de la teoría de números, pero cuya demostración se produjo varios siglos más adelante. A manera de ejemplo, Diofantos conocía :

1. Todo primo de la forma 4n + 1 es suma de dos cuadrados.
2. Ningún primo de la forma 4n + 3 es suma de dos cuadrados.
3. Ningún número de la forma 8n + 7 es suma de tres cuadrados.
4. Todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados.

Todos estos problemas fueron atacados por los matemáticos de épocas posteriores y algunos de ellos fueron resueltos en el siglo XVIII.

Otro aporte muy valioso de Diofantos fue el estudio de los números poligonales. Un número es poligonal cuando representa la suma de los puntos enteros dentro de un polígono. Por ejemplo, los números triangulares son 1, 3, 6, 10, ... etc. Diofantos obtuvo una fórmula para hallar todos los números poligonales.

La obra de Diofantos ciertamente dio inicio a la teoría de números. Sin embargo no fue apreciada en toda su magnitud por los matemáticos posteriores. Transcurren varios siglos sin haber algún hecho importante en esta área de la matemática, después del impulso vigoroso dado por los griegos. Hubo de esperar hasta el siglo XVII cuando Pierre de Fermat y otros, descubren las viejas traducciones de su obra y aprecian el verdadero valor de sus ideas.

Apartándonos un momento de la Civilización Occidental, volvamos nuestra mirada hacia la antigua China, en donde la matemática ha alcanzado un cierto desarrollo durante la Edad Media, independientemente de Occidente.

Una figura de gran relevancia en este ambiente, es sin duda el matemático, poeta y arquitecto **Ch'in Chiu-Shiao** (1202 d.c.), cuya obra más importante es el libro *Shu-shu chiu-chang* (Tratado de Matemáticas).

Dicha obra esta dividida en nueve secciones:

1. El análisis indeterminado.
2. Calendario astronómico y cálculos metereológicos.
3. Agrimensuría.
4. Métodos de triangulación en la agrimensuría.
5. Impuesto a las propiedades.
6. Economía.
7. Asuntos militares.
8. Compras y ventas.
9. El comercio de trueque.

Por esta lista tan diversa de tópicos, podemos darnos una idea del avance de la matemática en China y sus aplicaciones en aquella sociedad. Sin embargo, la parte que nos interesa es el Análisis Indeterminado en cuyo texto se exponen problemas matemáticos que conducen a sistemas de ecuaciones de congruencia. Estos problemas tienen una data muy antigua como el siguiente, que apareció en un libro de Chin en el siglo IV d.c.

Existe una cantidad de cosas que al contarlas de tres en tres, deja un residuo de dos; al contarlas de cinco en cinco deja un residuo de tres; al contarlas de siete en siete deja un residuo de dos. Hallar el número de cosas.

Este problema se puede plantear usando la notación de congruencias

$$x \equiv 2 \; mod \; 3$$
$$x \equiv 3 \; mod \; 5$$
$$x \equiv 2 \; mod \; 7$$

donde x es la cantidad de cosas.

Este es un caso especial del Teorema chino del resto, y Shao nos da la solución $x = 23$, la cual se obtiene mediante un algoritmo desarrollado por él. No se sabe si los chinos conocían el método general para resolver este tipo de problemas.

En el año 622 se inicia la expansión del imperio árabe, cuya hegemonía en Europa duró cerca de ocho siglos. En pocos años, los árabes tomaron las ciudades de Damasco y Jerusalem. En 1641 se produce la toma de Alejandría, que era el centro cultural y científico más importante de la antiguedad.

Los árabes no tenían al comienzo una cultura matemática propia, pero se dedicaron a traducir obras de los griegos, persas e hindúes a fin de asimilar esos conocimientos. Por ejemplo, de los indúes tradujeron el *Surya Siddhanta* y de los griegos el *Almagest* de Ptolomeo y *Los Elementos* de Euclides.

Hacia el año 800, el centro cultural de este imperio era Bagdad, en donde el Califa Al-Manun fundó una casa de sabiduría, la cual era centro de reunión de matemáticos y astrónomos. Uno de estos, **Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi**, se convertiría en el más famoso de todos los matemáticos árabes; siendo su influencia tan grande como la de Euclides entre los griegos.

Este matemático escribió cerca de 6 obras de álgebra y astronomía; la primera de ellas inspirada en el libro *Sindhind* de los hindúes. Su interés por la ciencia fue muy amplio pues, aparte de matemáticas y astronomía, escribió sobre astrolabios, relojes de sol y geografía. En uno de sus libros titulado *El arte de contar* se hace una exposición completa del sistema de numeración en base 10, sistema este que fue inventado por los hindúes. Dicho sistema se conoció en Europa gracias a los escritos de al-Khowarizmi, razón por la cual algunos le atribuyen a los árabes la invención de nuestro sistema de numeración actual, llamado sistema arábigo o decimal.

La palabra algorismo, empleada a partir de los árabes, en relación con las operaciones de suma y multiplicación en base 10, proviene del nombre de al-Khowarizmi.

El libro más difundido de al-Khowarizmi fue el *Al-jabr wa'l*, palabra ésta que dio origen al término álgebra. Este texto fue muy conocido en Europa y contribuyó a dar a conocer el álgebra entre los matemáticos medievales, razón por la cual se llama a al-Khowarizmi el Padre del Algebra.

Comienza este maravilloso libro con una exposición de las principales propiedades de los números enteros y fraccionarios. Luego resuelve muchas ecuaciones, en donde intervienen raíces cuadradas y potencias. Es importante mencionar la forma rigurosa y exhaustiva cómo trabaja este autor, resolviendo todos los casos posibles de ecuaciones lineales y cuadráticas en una incógnita.

También contiene muchas demostraciones geométricas de ecuaciones algebráicas, usando el método desarrollado por los griegos, el cual consistía en asociar a un número la longitud de un segmento lineal y al cuadrado de un número el área de un cuadrado.

Hacia la postrimerías de la Edad Media, otro matemático árabe **Al-Kashi** produce uno de los libros más completos de matemática elemental de la antiguedad. Esta verdadera enciclopedia, llamada *Miftah al-Hisab*, estaba destinada al uso de calculistas , arquitectos , agrimensores y comerciantes. En la parte de álgebra se destacan las fórmulas para elevar un binomio a cualquier potencia (Binomio de Newton).

También se da la construcción de los coeficientes binomiales a través del triángulo de Pascal.

En otro de los libros se estudia la teoría de ecuaciones algebráicas de grado menor o igual a cuatro. Al-Khashi obtuvo fórmulas para resolver algunas ecuaciones de cuarto grado, lo cual es realmente sorprendente para su época. Anteriormente, otro matemático árabe, **Omar al-Khayyami** había descubierto fórmulas para resolver la ecuación cúbica.

Con al-Khashi se cierra el ciclo de la matemática arábiga. Después de su muerte en 1436 el imperio musulmán comienza a desintegrarse y desaparece del panorama europeo. A partir de allí comienza una nueva corriente de la matemática, con el renacimiento, en donde comienzan a profundizarse los métodos del álgebra, motivado por la resolución de ecuaciones de grado mayor que tres.

Si bien la teoría de números no muestra ningún avance importante en este período; este desarrollo del álgebra y la geometría preparará el camino para los grandes pasos que se darán en el siglo XVII.

Epoca Moderna

Iniciando la nueva era de la matemática moderna, encontramos la figura de **Pierre de Fermat** (1601-1665) , sin duda el más grande de los matemáticos del siglo XVII en el área de teoría de números. Es en este siglo cuando se presencian los mayores avances en casi todas las áreas de matemática, con la invención del cálculo por parte de Issac Newton y Leibniz , y por otra con el descubrimiento de la geometría analítica por Descartes y el mismo Fermat.

Se conocen pocos hechos acerca de la vida privada de Fermat, quién nació en Beaumont-de-Lomagne en Francia el 20 de Agosto de 1601. Proveniente de una familia con buena posición económica, Fermat se dedicó a estudiar leyes y obtiene la licenciatura en 1631. Luego se instala en la ciudad de Tolouse en donde ejerce el cargo de Consejero del Parlamento local. Debido a esto, disponía de tiempo suficiente para dedicarse al estudio de las obras clásicas de la literatura y la matemática. Tenía un gran dominio de las lenguas: francés, italiano, español, latín y griego. También demostró cierta inclinación hacia la poesía, componiendo versos en latín.

Durante su época de estudiante en Bordeaux volcó su atención hacia la matemática, al estudiar en profundidad la obra de **Francisco Vieta**, quien fue el más grande algebrista del siglo XVI. Vieta desarrolló la notación simbólica del álgebra, lo cual facilitó considerablemente el manejo de las variables dentro de una ecuación. Fermat retoma las ideas de Vieta sobre el tratamiento analítico, de muchos problemas planteados por los antiguos de Algebra y Geometría. La teoría de ecuaciones de Vieta, en donde se analizan las relaciones entre las distintas soluciones de una ecuación y la estructura de las mismas, permitió a Fermat desarrollar un nuevo método llamado *Análisis Reductio*. Con esta herramienta resuelve muchos problemas geométricos de Pappus y Apolonio, sobre construcciones con regla y compás, planteando ecuaciones algebráicas en una variable real.

Fermat estudió profundamente la obra de Diofantos, Euclides y Apolonio, se interesó en los problemas planteados por ellos e intentó resolverlos usando los métodos modernos. Este nuevo enfoque fue muy fructífero para la teoría de números, pues Fermat pudo hallar soluciones muy generales para muchas ecuaciones Diofánticas, usando métodos de demostración suficientemente rigurosos.

Muchos de los resultados de Fermat han llegado hasta nosotros por las anotaciones que hacía sobre el margen de la Aritmética de Diofantos, traducida por el matemático Bachet. También tuvo una extensa correspondencia con otros matemáticos de su época como Mersenne, Frenicle, Pascal y Carcavi, a quienes les formulaba problemas difíciles de teoría de números a manera de reto.

El interés de Fermat en teoría de números no tenía límites: se ocupaba de los números primos, números amigables, sumas de cuadrados, ecuaciones de congruencias y otras cuestiones relacionadas con la aritmética de los enteros.

Demostrando una sagacidad muy superior a la de todos los matemáticos que le precedieron, Fermat descubrió y enunció el siguiente resultado, muy importante

Si p es un número primo, entonces

$$a^{p-1} \equiv 1 \; mod \; p$$

Este resultado, conocido como el pequeño teorema de Fermat, nos da el primer test de primalidad conocido para un número p. Hoy en día se conoce una generalización de este resultado en la teoría de grupos.

La intuición de Fermat para plantear problemas en teoría de números, es realmente maravillosa. Algunos de estos problemas los resolvió usando sus propias técnicas, otros, sin embargo, fueron resueltos por matemáticos de siglos posteriores despúes de haber sido atacados por los mejores hombres de ciencia de varias épocas.

Veamos algunos de ellos, propuestos en varias cartas a Carcavi

1. Todo número primo de la forma 4n+1 se puede escribir como suma de dos cuadrados.

2. Todo número natural se expresa como suma de cuatro cuadrados.

3. La ecuación
$$x^2 - dy^2 = 1$$
tiene infinitas soluciones.

Fermat halló demostraciones correctas para los problemas 1) y 3), sin embargo no pudo hallar una demostración general para el 2). Este fue resuelto dos siglos después por Lagrange.

El problema más famoso planteado por Fermat, quizás el más famoso de toda la matemática, es el **Gran Teorema de Fermat**. Este consiste en probar que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no posee solución para x, y, z números enteros, si $n \geq 3$.

Para n=2, esta ecuación se reduce a la ecuación pitagórica, de la cual ya hemos hablado.

Fermat dijo que él tenía en su poder una prueba maravillosa de tal teorema, pero nunca la dejó escrita. Muchos matématicos dudan que esto sea cierto debido a la dificultad del teorema, por una parte, y porque Fermat dio una demostración para el caso particular $n = 4$, de la cual se sentía muy orgulloso, en donde desarrolla un nuevo método de prueba llamado *Descenso al Infinito.*

El Teorema de Fermat ha llamado poderosamente la atención de los mejores matemáticos de todas las épocas. Si bien ha sido atacado durante más de tres siglos no ha podido resolverse completamente. En los intentos por hallar una solución a este misterio se ha producido mucha matemática, con la aparición de nuevas técnicas muy sofisticadas, como lo son la teoría de números algebráicos y la geometría algebráica, entre otras.

La demostración del caso $n = 3$, descubierta por Euler un siglo más tarde, es muy complicada y utiliza técnicas desconocidas para la época de Fermat.

En 1847, **E. Kummer** probó que el teorema de Fermat es cierto para todo $n \leq 100$. Recientemente, en 1977, S.S. Wagstaff usando métodos de computación, probó que el teorema es cierto para todo primo p , con $p \leq 125.000$. Finalmente, hay que mencionar a Andrew Wiles quien en 1993 parece haber hallado una demostración de dicho teorema.

Después de Fermat, la teoría de números permaneció sin muchos progresos por un siglo, hasta la llegada del gran matemático suizo **Leonhard Euler**, quien nació en 1707 en Basilea. A la edad de 14 años, ingresa a la Universidad de Basilea, en donde recibe clases del célebre matemático Johan Bernoulli I. Demostrando su genialidad desde temprana edad, publica su primer resultado sobre matemáticas a los 18 años.

En 1726 es llamado a la Academia de San Petersburgo, donde se le ofrece un cargo de profesor. Allí, además de enseñar matemáticas, investiga mucho en ciencias aplicadas como física, ingenieria, navegación, construcción naval y cartografía. Luego, en 1741, se traslada a la Academia de Ciencias de Berlín, invitado por el Rey Federico el Grande de Prusia. En esta academia permaneció hasta 1766 cuando la Reina Catalina II de Rusia lo llama nuevamente a la Academia de San Petersburgo, donde permanece hasta su muerte en 1783.

La vida de Euler fue una de las más fructíferas que haya tenido matemático alguno. Fue un escritor infatigable: ¡su obra completa alcanza más de 70 volúmenes! Lo más asombroso es la gran cantidad de artículos escritos en los últimos diez años de su vida cuando estaba ciego. Además de estos artículos, Euler escribió un libro llamado *Introducción al Análisis Infinito* que se puede considerar como el primer libro del análisis moderno y que tuvo mucha influencia en la evolución de la matemática posterior a él.

Gracias a Euler tenemos la notación moderna que utilizamos hoy en día en: series, números complejos, sumatorias potencias, exponenciales y muchas funciones de la matemática. Euler recopiló todos los resultados que se conocían en teoría de números, que se hallaban dispersos en cartas y pequeños artículos, dándoles una nueva apariencia con las notaciones modernas.

En el campo de la teoría de números, Euler inició una nueva etapa en esta área, al probar algunos teoremas usando métodos del análisis. Esta nueva rama iniciada por Euler se conoce con el nombre de teoría analítica de números. A manera de ejemplo, mencionaremos su demostración de la infinitud de los números primos, la cual se basa en demostrar que la serie

$$\sum \frac{1}{p}$$

diverge, donde p recorre el conjunto de los números primos.

Es importante destacar la labor realizada por Euler, al continuar la obra de Fermat, resolviendo algunos problemas difíciles planteados por este último. Así pues, Euler probó en forma general el pequeño teorema de Fermat, el cual ya hemos mencionado, y además dio un resultado mucho más general, para lo cual introdujo una nueva función en los números enteros. Si n es un entero positivo, entonces la función ϕ de Euler, aplicada a n, es un número entero positivo $\phi(n)$ el cual es igual al número de enteros x, $1 \leq x < n$ que son primos relativos con n. El teorema del cual hablamos, llamado Teorema de Euler, establece

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \; mod \; n$$

para todo entero a.

Euler poseía una capacidad de cálculo extraordinaria, muy superior a la de cualquier matématico de su época. Fermat había supuesto que todo número de la forma

$$2^{2^n} + 1$$

siempre es primo, para cualquier n.

Este resultado lo comprobó el mismo Fermat, para los valores de $n = 1, 2, 3, 4$. Sin embargo Euler probó que para n= 5 el resultado es falso, mostrando la factorización

$$2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 6.700.417 \times 641$$

resultado este, que habla por si sólo de las habilidades de Euler para factorizar números compuestos bastante grandes.

Durante el siglo XVIII, gracias a la obra de Euler y los hermanos Bernoulli, la matemática demostró su poder de aplicación a otras ramas de la ciencia como la astronomía, mecánica, hidráulica,...etc. Uno de las figuras más importantes en este período fue **Joseph Louis Lagrange**, de quien se puede afirmar, a través de sus obras, fue el más grande de los matemáticos del siglo XVIII.

Lagrange nace en Turín, Italia en 1736 y muere en Francia en 1813. Desde joven se interesó en las lenguas clásicas: latín y griego, pero también tuvo un fuerte interés en la matemática, razón por la cual, lo vemos como profesor de Artillería en Turín a los 19 años de edad. En 1766, ayudado por d'Alembert, obtiene un puesto en la Academia de Berlín, hasta 1787 cuando ingresa a la Academia Francesa en París donde permaneció hasta su muerte en 1813.

La obra de Lagrange está claramente marcada en estos tres períodos en donde fijó su residencia. Los dos primeros períodos; el de Turín y Berlín, fueron de mucha actividad científica. Comenzando en 1745 con el descubrimiento del cálculo de variaciones y la posterior aplicación de este a la mecánica en 1756. El también trabajó en mecánica celeste en esta época, estimulado por los concursos de la Academia de Ciencias de París.

En 1762 se establece una competencia científica, cuando la Academia formula la siguiente pregunta: ¿ Cómo se puede explicar físicamente que La Luna siempre presenta la misma cara hacia La Tierra? En 1763 Lagrange envía una memoria a la Academia titulada " *Investigaciones sobre la liberación de La Luna, en donde se ataca el problema propuesto por la Real Academia de Ciencias*". En este trabajo, Lagrange da una explicación satisfactoria sobre los movimientos de La Luna.

Más tarde en 1766 la misma Academia propone otra pregunta: ¿Como se explica matemáticamente, el movimiento de los cuatro satélites de Júpiter? Nuevamente Lagrange envía una memoria, dando una explicación correcta de este hecho y la cual resultó ganadora del concurso.

Durante su estadía en Berlín en 1770, Lagrange expone ante la Real Academia uno de sus mejores resultados en teoría de números: *Demostración de un teorema de aritmética*, en donde demuestra un problema que había sido planteado por Fermat, y atacado por Euler y otros matemáticos sin ningún éxito. El problema consiste en probar: Todo número natural puede ser representado como suma de cuatro cuadrados.

En esta misma línea de investigación, aparece en 1771 una demostración de un teorema propuesto por Wilson :

p es un número primo si y sólo si $(p-1)!+1$ es un múltiplo de p.

Finalmente mencionaremos los trabajos de Lagrange sobre la Ecuación de Fermat (o Ecuación de Pell)

$$x^2 - dy^2 = 1$$

Lagrange da una prueba completa de que esta ecuación posee infinitas soluciones, para lo cual desarrolla toda la Teoría de Fracciones Continuas, que había sido iniciada por Euler. Esta ecuación posee un grado de dificultad superior a las otras ecuaciones diofánticas, tratadas por Fermat y Euler. Si esta ecuación se factoriza, entonces tendremos

$$(x - \sqrt{d}y)(x + \sqrt{d}y) = 1$$

lo cual plantea la necesidad de trabajar con números de la forma $a + b\sqrt{d}$, los cuales eran un misterio para los matemáticos de la época.

Si el par (x, y) es solución y además x e y son suficientemente grandes, entonces el cociente x/y es una aproximación de $\sqrt{d}$. El método de aproximación de numeros irracionales mediante una fracción continua, nos proporciona todas las soluciones de la ecuación de Fermat, esto lo demuestra Lagrange en su trabajo. Los métodos usados por Lagrange, la forma de escribir las demostraciones en forma clara y concisa, y el empleo de una lógica rigurosa hacen de este artículo una de las páginas más brillantes en toda la teoría de números.

Los años que Lagrange pasó en París, fueron dedicados a la docencia, escritura de obras didácticas y la publicación de grandes tratados de matemática. Todo esto contribuyó a darle a esta ciencia una nueva visión, a partir del siglo XIX. Lagrange tuvo una participación muy activa en todas las reformas científicas y educativas que se originaron durante la Revolución Francesa.

En Mayo de 1790, la Asamblea Constituyente decretó la unificación del sistema de pesas y medidas, y le dio a la Academia de Ciencias la tarea de buscar un sistema con una base única y que sería usado por todos los pueblos de la humanidad. Esta comisión, en la cual estaba Lagrange junto con otros científicos notables de la época, propuso el sistema de pesos y medidas en base 10, o decimal, el cual utilizamos en la actualidad.

Lagrange fue uno de los fundadores de la Escuela Normal y de la Escuela Politécnica de París, las cuales existen hoy en día. Estos dos centros han dado grandes aportes en el campo de la matemática, tanto en el siglo pasado como en el actual.

Uno de los matemáticos contemporáneos de Lagrange, cuya obra tuvo mucha influencia en el desarrollo posterior de la teoría de números, fue **Adrien-Marie Legendre** (1752- 1833). En 1782 ganó el premio de la Academia de Berlín con una memoria sobre balística. Esta trabajo llamó la atención de Lagrange, quien se interesó de inmediato en la obra de este joven matemático.

Legendre trabajó en las áreas de funciones elípticas, mecánica celeste y teoría de números. En 1798 publicó un obra titulada *Ensayo sobre la teoría de números* en donde aparecen una serie de resultados importantes, sobre la representación de un número primo por una forma cuadrática del tipo : $x^2 + ay^2$. En este trabajo se establece por vez primera la famosa *Ley de Reciprocidad Cuadrática*, la cual fue probada en forma definitiva por Carl. F. Gauss.

Si p es un número primo y a es un entero positivo, entonces Legendre define el símbolo: $\left(\frac{p}{a}\right)$ llamado símbolo de Legendre, el cual es igual a 1, si a es un residuo cuadrático módulo p, y -1 en el caso contrario. La ley de reciprocidad cuadrática establece entonces:

Si p y q son dos números primos, se tiene

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right)}$$

Con el inicio del siglo XIX aparece la figura de uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos , quizás el más grande de todos, como lo fue el matemático alemán *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), llamado con justa razón: El Príncipe de los Matemáticos.

En 1795, bajo el patrocinio del Duque de Brunswick, entra en la Universidad de Götingen. El 30 de Marzo de 1796 a la temprana edad de 19 años, da muestra de su genio matemático al resolver uno de los problemas más antiguos (más de 2000 años) planteado por los matemáticos griegos, sobre la construcción de polígonos regulares con regla y compás. Gauss probó que se puede construir con regla y compás el polígono de 17 lados.

En forma más general, Gauss probó el siguiente resultado, usando las raíces de la ecuación

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$$

Se puede construir con regla y compás el polígono de n lados, si y solo si

$$n = 2^k p_1 \dots p_r$$

donde los p_i son primos de la forma

$$p_i = 2^{2^t} + 1$$

Unos días más tarde, el 18 de Abril de 1796, Gauss dio la primera prueba completa de la Ley de Reciprocidad Cuadrática, la cual había descubierto él mismo, independientemente de Legendre.

Otro resultado importante de Gauss, es la demostración de Teorema Fundamental del Algebra, del cual d'Alembert había dado una demostración, pero incompleta. Mediante este teorema se prueba la existencia de raíces complejas para cualquier polinomio con coeficientes en los complejos.

Su obra más famosa es *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en 1801, en donde Gauss sienta las bases de la teoría de números, como una de la disciplinas más sólidas y ricas de la matemática.

Gran parte de las *Disquisitiones*, están dedicadas al estudio de las formas cuadráticas binarias, iniciado por Legendre. Dicha teoría se expresa de manera más natural dentro de la moderna teoría de ideales de cuerpos cuadráticos, descubierta por Dedekind.

Estos cuerpos cuadráticos son de la forma

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b, \in \mathbb{Q}\}$$

Si I_d es el anillo de enteros algebráicos de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, entonces Gauss fue el primero en determinar para cuáles d negativos, I_d es un dominio de ideales principales. Esto ocurre sólo en los casos

$$d = \text{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67 y -163.}$$

Esta conjetura fue comprobada en 1975 por A.Baker y H. Stark .

Además Gauss conjeturó que existen infinitos $d > 0$ para los cuales I_d es un dominio de ideales principales. Esto no se ha podido demostrar hasta el presente.

En 1807 Gauss fue designado Director del Observatorio de Götingen, debido al éxito de sus investigaciones en astronomía, actividad ésta que compartió con la matemática durante toda su vida. En 1801 mediante unos cálculos asombrosos permitió redescubrir el planetoide Ceres, que había desaparecido de la vista de los astrónomos.

En Götingen pasó los últimos 50 años de su vida, trabajando como profesor de matemáticas e investigador, hasta su muerte en 1855. La obra de Gauss generó toda una nueva corriente de pensamiento dentro de la teoría de números, que nos conduce a la teoría de números algebráicos. Los herederos de la tradición de Gauss han sido Dirichlet, Dedekind, Kummer y Minkowsky , matemáticos éstos del siglo pasado y comienzos del actual, que generalizaron muchos de sus resultados.

La teoría de números ha tenido un desarrollo muy vigoroso a partir de entonces, con la introducción de nuevas técnicas como las teorías de ideales, formas cuadráticas, formas modulares, ... etc y ha permitido resolver muchos problemas de teoría de números elemental, que eran intratables con los métodos clásicos.