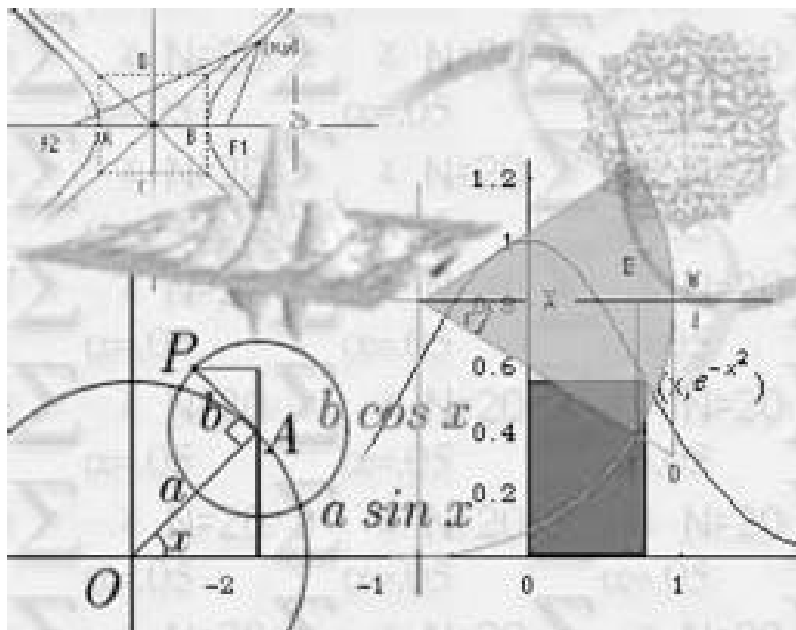


# Newton y la Matemática

CARLOS DOMINGO



La consideración matemática del mundo plantea conflictos de la concepción que podemos resumir en varias oposiciones;

- 1) La oposición entre lo aritmético (o algebraico) y lo geométrico (o topológico).
- 2) La oposición entre lo finito y lo infinito.
- 3) La oposición entre el descubrimiento intuitivo y la demostración formal.
- 4) La oposición entre el conocimiento teórico y sus aplicaciones.

La historia del pensamiento matemático puede verse como una serie evolutiva de rupturas y compromisos de estas oposiciones. En Newton se presentan en forma extrema estos conflictos. Además de ser un creador máximo en la concepción físico-matemática del Universo es un gran geómetra y algebrista y uno de los creadores del Cálculo Infinitesimal, la concepción grandiosa y propia de la cultura europea donde confluyen la Geometría griega, el Álgebra hindú, y el manejo de las ideas de infinito de griegos, hindúes y renacentistas.

Para entender la obra de Newton es pues necesario recapitular cómo se venían planteando estos conflictos y qué soluciones por él conocidas habían sido ensayadas.

La matemática egipcia y babilónica había acumulado hasta el siglo VI a.C. una gran cantidad de conocimientos matemáticos expresados en forma de recetas para la solución de problemas matemáticos, operaciones básicas con enteros y fracciones, extracción de raíces, soluciones de ecuaciones de primer grado y algunos casos de segundo y tercero. Se conocía el uso de la semejanza de triángulos, el teorema de Pitágoras, construcción de figuras regulares, cálculo de áreas y volúmenes de triángulos, polígonos, paralelepípedos y pirámides. En los textos conservados siempre se explican los métodos usados mediante ejemplos particulares. No se dan enunciados generales y por lo tanto no hay demostraciones, ya que estas suponen la expresión general de las propiedades usadas y deducción de ellas a partir de principios más generales.

Los pitagóricos desde el año 550 AC. intentan una unión estrecha entre la geometría y la aritmética. La suposición básica, que inicia la concepción matemática del Universo, es que las formas de la naturaleza y las formas más abstractas están hechas de “puntos”. Una línea es una sucesión de un número finito de puntos. Entonces la relación entre dos segmentos se puede expresar, por la relación de dos números (y sólo son números los enteros positivos). En general dos magnitudes de la misma especie (longitudes, áreas, volúmenes) son “conmensurables”, es decir siempre existe una magnitud de la misma especie que multiplicada

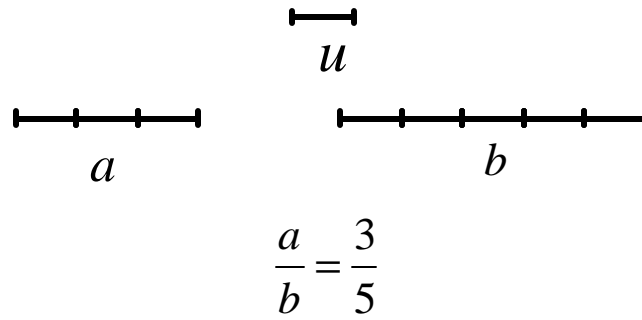


Figura 1

por otro entero es igual a la segunda. Tienen una “unidad” común.

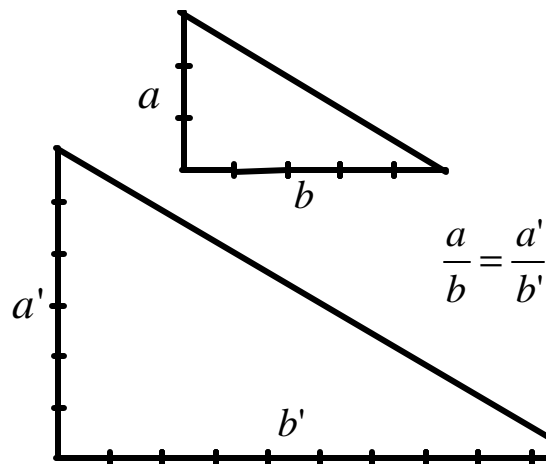


Figura 2

Creían que siempre era posible hallar tal unidad. Con esa idea desarrollaron la teoría de la semejanza de figuras poligonales. Los lados homólogos de figuras semejantes están en la misma relación.

Esto permitió a Thales obtener la altura de una pirámide por su sombra midiendo la altura y sombra de una vara suponiendo que hay una unidad común para todas las magnitudes del problema:

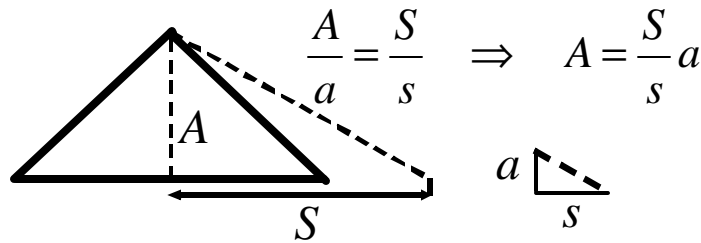


Figura 3

Se abrió así la posibilidad de medir distancias a puntos inaccesibles y esto fue aprovechado más tarde por Aristarco, Hiparco y Eratóstenes en las primeras estimaciones de las distancias a la Luna y el Sol y las estimaciones del tamaño de la Tierra.

Con esta teoría los pitagóricos lograron resolver una serie de problemas de triángulos y polígonos, demostrar el teorema de Pitágoras y construir el pentágono regular.

Por otra parte, desde Thales se comienzan a enunciar proposiciones y métodos generales y a demostrarlos a partir de proposiciones más evidentes. Se inicia la Matemática formal.

La crisis de la síntesis pitagórica se presentó al querer hallar la unidad común del lado de un cuadrado y su diagonal.

En su desarrollo de la teoría de la divisibilidad hallaron un método para calcular el máximo común divisor de dos números. Para hallar por ejemplo el mcd de 72 y 30 se divide 72/30. Da 2 con resto de 12. Se divide el anterior divisor por el resto 30/12.

Da 2 y resto 6. Se divide el anterior divisor por el resto  $12/6$ . Da 2 y resto 0. Cuando un divisor no da resto, éste divisor 6 es el mcd de los dos números originales. Los pitagóricos conocían el algoritmo y demostraron que siempre funciona.

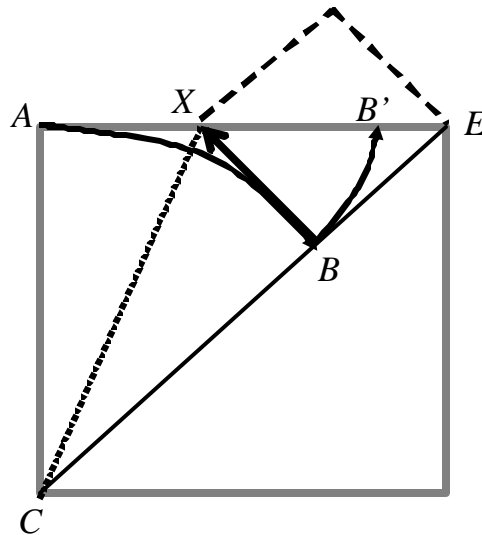


Figura 4

Al intentar aplicar esta idea para hallar la unidad común del lado y la diagonal sucede algo sorprendente. Se comienza llevando el lado AC sobre la diagonal para ver cuantas veces el lado (divisor) cabe en ella. Se ve que cabe una vez y hay un resto BE.

Hay que ver cuantas veces el resto cabe en un lado (que era el anterior divisor). Para ello trazamos  $BX$  perpendicular a  $CE$ . Se ve que  $AX = BX$  pues los triángulos  $ACX$  y  $CXB$  son iguales (tienen dos lados iguales,  $CA = CB$ , el  $CX$  común y ángulos rectos iguales en los vértices  $A$  y  $B$ ). Además  $BX = BE$  (pues el triángulo  $BXE$  es isósceles por ser rectángulo con un ángulo mitad de un recto).

Así se ve que el resto  $BE$  (o  $AX$ ) cabe por lo menos una vez en  $AE$ . Si con centro en  $X$  llevamos sobre  $AE$ , vemos que cabe dos veces y hay un resto  $B'E$ . Hay que ver cuantas veces cabe  $B'E$  en el divisor anterior  $BE$ . Pero entonces se ve que estamos repitiendo la primera construcción con un cuadrado de lado menor. Se ve completando el cuadrado de lados  $BX$ ,  $BE$ . Por lo tanto la construcción se repite hasta infinito y el resto se achica pero nunca se anula. No hay pues unidad común (máximo común divisor) de la diagonal y el lado. Los segmentos  $AC$  y  $CE$  son pues inconmensurables. La suposición de conmensurabilidad choca con la idea de divisibilidad al infinito presente en la construcción geométrica. Este descubrimiento produjo una crisis en el trabajo de los pitagóricos. Estos se basaban en que una relación entre magnitudes es siempre una relación entre números. Pero ahora hay dos magnitudes (la diagonal de cualquier cuadrado y su lado) que no tienen unidad común y por lo tanto no pueden representarse como números enteros en una cierta unidad. Por lo tanto su relación no puede representarse por una relación numérica. Se cae así la síntesis pitagórica de Geometría y Aritmética y con ella la concepción matemática del Universo queda cuestionada.

El otro problema que llevó a los griegos al problema del infinito es el de hallar el perímetro y el área de figuras curvas. Para hallar la longitud de una circunferencia o el área de un círculo, o mejor dicho la relación entre tales magnitudes y el radio, el método es inscribir en la circunferencia polígonos regulares de cada vez más lados. Para ellos se conoce la relación entre área y radio. Se supone que al crecer el número de lados los polígonos se van acercando más y más a la circunferencia y por lo tanto sus perímetros al de la circunferencia y sus áreas a la del círculo. Pero esto lleva a un problema lógico. ¿Qué significa un polígono de infinitos lados? ¿Es lícito saltar de un polígono, por más lados que tenga, a un círculo?

Si se acepta este salto se puede demostrar que los perímetros  $C$  y  $c$  de dos círculos están en la relación que sus radios  $R$  y  $r$ .

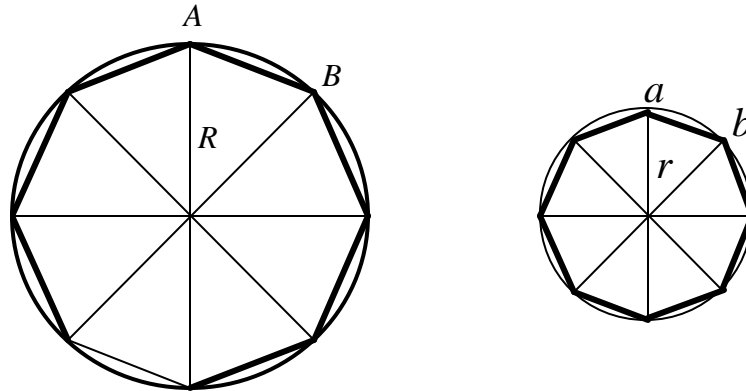


Figura 5

Si se inscriben en circunferencias de radios  $R$  y  $r$  polígonos de 8 lados, se tiene por la semejanza de  $OAB$  y  $oab$ :

$$\frac{AB}{ab} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{8AB}{8ab} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{P}{p} = \frac{R}{r}$$

Es decir los perímetros  $P$  y  $p$  de los polígonos están en la misma relación de los radios.

Es evidente que la relación vale si usamos polígonos de 16, 32,.. lados. Pero estos polígonos se aproximan más y más a la circunferencia.

Así, debe valer:  $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$

De un modo análogo resulta para las áreas  $A$  y  $a$ :

$$\frac{A}{a} = \frac{R^2}{r^2}$$

Pero el argumento no es claro. Por el hecho de que dos curvas se aproximen no se concluye que sus longitudes se aproximen también. Es famoso el ejemplo del triángulo equilátero de lado  $L$  en el cual se traza una quebrada  $BMNQC$  por los puntos medios de los lados. La longitud de tal quebrada es  $2L$ . Repitiendo el proceso para cada subtriángulo

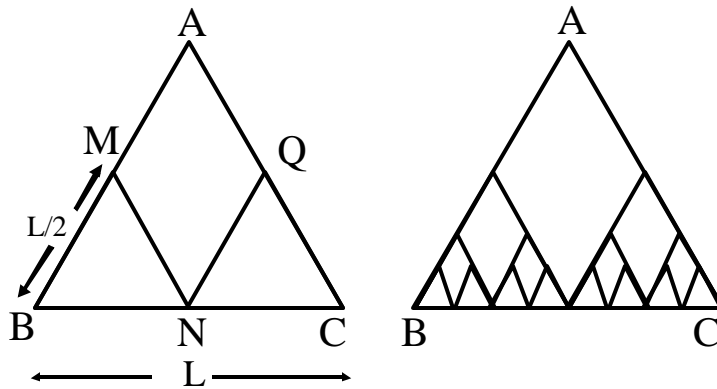


Figura 6

formado se van obteniendo quebradas que siempre tienen largo  $2L$  pero se acercan todo lo que se quiera á lado de largo  $L$ .

Aparte de este problema queda el de los inconmensurables:

La relación de longitudes  $R/r$  ó  $C/c$  pueden no están definidas.

Los problemas del infinito y de la infinita divisibilidad fueron utilizados por los filósofos de la escuela eleática (Parménides, Zenón y Meliso) en sus demostraciones de la inconsistencia del concepto de movimiento.

En uno de sus conocidos argumentos, Zenón dice que es imposible recorrer una cierta distancia. Para hacerlo se tendría que recorrer primero la mitad de la misma, luego la mitad de lo que resta, luego la mitad de lo que resta, y así indefinidamente. Pero nunca se recorre la distancia completa. Hay que recorrer infinitos tramos y ello es prácticamente imposible. Cuando Diógenes el Cínico intentó refutarlo recorriendo a pie una distancia prefijada, Zenón contestó: “*Yo pienso con la cabeza, tú con los pies*”, queriendo significar que sólo reconocía como verdadero aquello que no tenía contradicciones, ya que para él, los sentidos nos engañan y sólo la razón es segura.

El problema de los inconmensurables es resuelto por Eudoxo poco después del año 400 AC.

El razonamiento de Eudoxo puede haber partido de la evidencia de que dos magnitudes (por ejemplo dos segmentos)  $a$  y  $b$  son conmensurables si y sólo si hay dos enteros  $m$  y  $n$  tales que repitiendo  $m$  veces una de ellas y  $n$  veces la otra se obtienen magnitudes iguales.

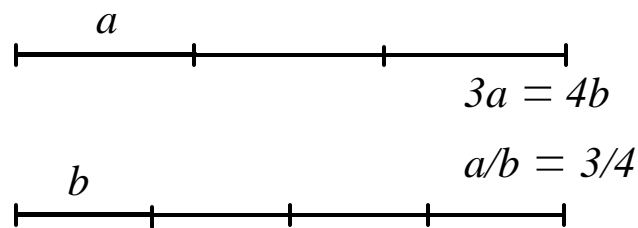


Figura 7

Por lo tanto, si dos segmentos son inconmensurables tomando múltiplos de uno y otro nunca se obtienen dos segmentos iguales.

La idea de Eudoxo es que un par de segmentos  $a$  y  $b$  están, por definición, en la misma relación que otro par  $a'$  y  $b'$  cuando al tomar un múltiplo  $m$  del primero y  $n$  del segundo del primer par se obtiene una igualdad o una desigualdad de igual sentido que al aplicar los mismos múltiplos al segundo par. Es decir, cualesquiera que sean  $m$  y  $n$ :

Si  $ma > nb$  entonces  $ma' > nb'$

Si  $ma < nb$  entonces  $ma' < nb'$

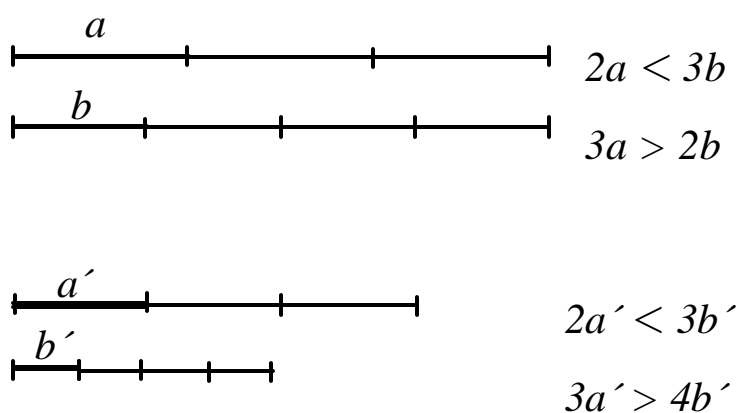


Figura 8

y si para ciertos  $m$  y  $n$  tales que  $ma = nb$ , entonces  $ma' = nb'$ .

Tomando todos los enteros posibles si cuando en una desigualdad se obtiene  $>$  en otra también, y si en una resulta  $<$  en la otra también, entonces, por definición:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Si hay un caso de  $m$  y  $n$  tal que  $ma = nb$  y  $ma' = nb'$  los segmentos son conmensurables. Si no, son inconmensurables pero se ha definido la igualdad de sus reacciones. También se puede definir la desigualdad. Si hay ciertos enteros  $m$  y  $n$  para los cuales se cumple

$$ma < nb \text{ y } ma' > nb' \text{ entonces } \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$$

Nótese que Eudoxo no afirma que  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{a'}{b'}$  sean números, pero logra definir igualdad y desigualdad entre relaciones de magnitudes, relaciones que habían dejado de tener sentido por la crisis de la concepción pitagórica. También se pueden demostrar las propiedades que se conocían para las relaciones

$$\text{(por ejemplo si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ etc.)}$$

Nótese que la definición de un número real por cortaduras que hizo Dedekind a fines del siglo XIX se basa formalmente en esta idea de Eudoxo. Con nuestra idea de que la relación  $a/b$  es un número (real) y que los  $m/n$  son también números (rationales) podemos ver la definición de Eudoxo diciendo que existen dos clases de racionales o fracciones aquellas  $m/n$  que hacen  $ma > nb$

y aquellas  $m'/n'$  que hacen  $m'a < n'b$ . Esta clasificación de las fracciones es para Dedekind un número real sea  $a/b$  o su igual  $a'/b'$ . Si se da el caso  $ma = nb$ , la clasificación corresponde a un número racional, si no se da, corresponde a un irracional. El formalismo lo tomó Dedekind de Eudoxo. Pero la interpretación es muy diferente. Para Dedekind las relaciones son números y debe resolver el problema de cómo operar con tales clasificaciones, demostrando además que los números enteros y racionales caen dentro de su definición de número real.

Una vez definidas relaciones entre inconmensurables se pueden reconstruir todos los hallazgos de los pitagóricos en una nueva síntesis de aritmética y geometría. Será esta la obra de Euclides unos cuarenta años después.

Es importante recordar que toda esta solución de la crisis no tuvo mayor importancia en la matemática práctica de los griegos. En los cálculos comerciales y de ingeniería se seguían usando los métodos egipcios y babilonios y los resultados de los pitagóricos. La Matemática formal griega queda separada pues de sus aplicaciones.

El problema de la aproximación indefinida fue resuelto también por Eudoxo mediante el llamado *Principio de Exhaustión*. Este principio afirma que si de un ejemplar de una magnitud se extrae la mitad o más, y de lo que resta se extrae la mitad o más, y se prosigue de ese modo, entonces lo que resta puede hacerse menor que cualquier otro ejemplar previamente dado de esa misma magnitud, en un número finito de restas.

En este principio está la idea de límite, pero nótese que no es numérica. Se aplica a magnitudes cualesquiera.

Eudoxo demuestra el principio a partir de un axioma más evidente (hoy conocido como *axioma de Arquímedes*). Este axioma dice que si tenemos dos ejemplares de una magnitud y el menor

se agrega a sí mismo repetidas veces, entonces en un número finito de agregaciones llega a superar al mayor.

Para demostrar el principio de exhaución se parte de dos ejemplares  $a$  y  $e$  (en la figura son dos segmentos).

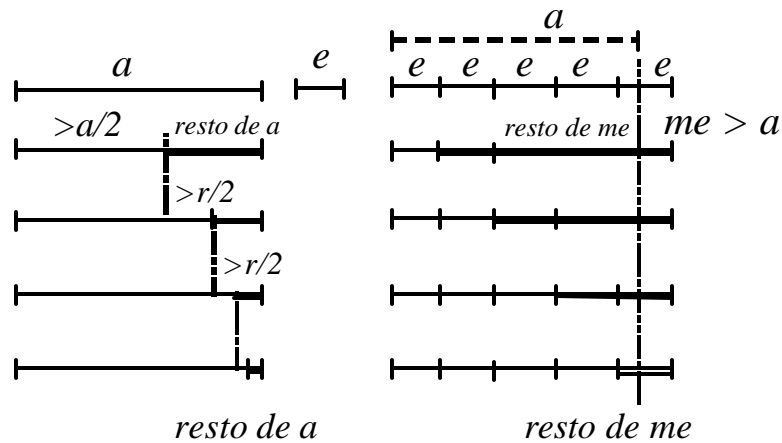


Figura 9

Se agrega  $e$  a sí mismo hasta que supere a  $a$ . Ésto, por el axioma, ocurre en un número finito de pasos, formando un agregado de segmentos  $e$ . Ahora se hacen una serie de pasos de extracción en  $a$  y en el agregado. En cada paso se quita de  $a$  (y luego de lo que reste) la mitad o más. Y a la vez en el agregado de los  $e$  se quita un  $e$  en cada paso. Se ve que en cada paso, lo que queda de  $a$  es menor que lo que queda del agregado. En el peor caso, si el agregado es de  $2e > a$  y la parte que se quita de  $a$  es la mitad, quedan  $e$  y  $a/2$ , siendo  $e > a/2$ . Por último, cuando en el agregado queda un solo  $e$  lo que resta del  $a$  es menor que  $e$ . Es decir, extrayendo sucesivamente la mitad o más de lo que queda llegamos a un resto menor que  $e$ .

Con este principio se puede refutar el argumento de Zenón. Si  $AB$  es la distancia a recorrer y, suponiendo, como concluye Zenón, que no es posible llegar a  $B$ , debe haber un  $X$  inalcanzable en tiempo finito. Por el principio de exhaustión se puede ver que se sobrepasa ese punto en un tiempo finito. Si  $t = AB/v$  donde  $v$  es la velocidad, se ve que el punto  $M$  se alcanza en  $t/2$ . El  $N$  en  $t/4$  más, etc., y esta suma es menor que  $t$ . Es decir, todo punto  $X$  en  $AB$  se alcanza en menos de  $t$ . De modo que en un tiempo  $t$  se han recorrido todos los puntos de  $AB$ .

Esta aclaración se basa en el concepto de límite que es en esencia la idea de Eudoxo. Un tratamiento alternativo del problema se basa en el análisis “no estándar” de Robinson y Nelson: el móvil pasa sólo por los puntos “estándar” observables. El desarrollo es una restauración de los infinitésimos en vez de usar el límite (ver Mc Laughlin, 1994).

Es importante ver cómo la definición de relación y el principio de exhaustión son utilizados por Euclides, puesto que este modo de razonar condiciona toda la matemática griega. Los matemáticos del Renacimiento hacen un intento de buscar otra forma de abordar los problemas, una forma más sencilla y general de la síntesis de aritmética y geometría y de los problemas del infinito. Los esfuerzos culminan en la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal. En el año 300 a.C. aparece la monumental obra de Euclides: Los Elementos, donde se trata de fundar toda la Matemática sobre unos pocos axiomas y reglas de deducción. Sus antecedentes son los Elementos de Hipócrates de Kíos (obra perdida) y la silogística de Aristóteles. No entraremos aquí en una discusión de esa obra. Veamos cómo Euclides aplica la teoría de las reacciones de Eudoxo aun caso sencillo: demostrar que las áreas de dos triángulos de igual altura están en la relación de sus bases. Se supone demostrado que dos triángulos de igual base y altura tienen igual área (viendo que estas áreas son cada una la mitad de rectángulos iguales). La

figura aclara la demostración. Basta ver que los triángulos de bases  $ma$  y  $nb$  son respectivamente  $m$  y  $n$  triángulos originales. Superponiendo las bases se ve la desigualdad.

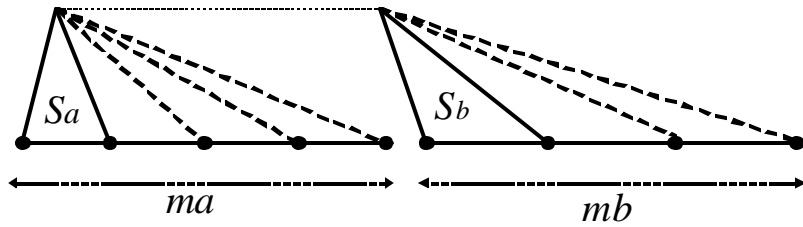


Figura 10

Como se ve, no interesa aquí si las bases son o no conmensurables. Su relación siempre está definida y se ve que es igual a la relación de las áreas. Euclides reconstruye con demostraciones semejantes a ésta toda la teoría de las relaciones de los pitagóricos. Una aplicación del principio de exhaustión puede verse en la demostración de Arquímedes de que el área de un círculo es igual a la de un triángulo que tiene por base el perímetro y por altura el radio.

Arquímedes circunscribe polígonos de 4, 8, 16, ... lados alrededor del círculo y demuestra cuidadosamente mediante la exhaustión que dada cualquier área  $F$ , existe un polígono (el  $m$ -simo de la serie) tal que su área  $S_m$  difiere del área del círculo  $C$  en menos de  $F$ , es decir:  $S_m - C < F$ .

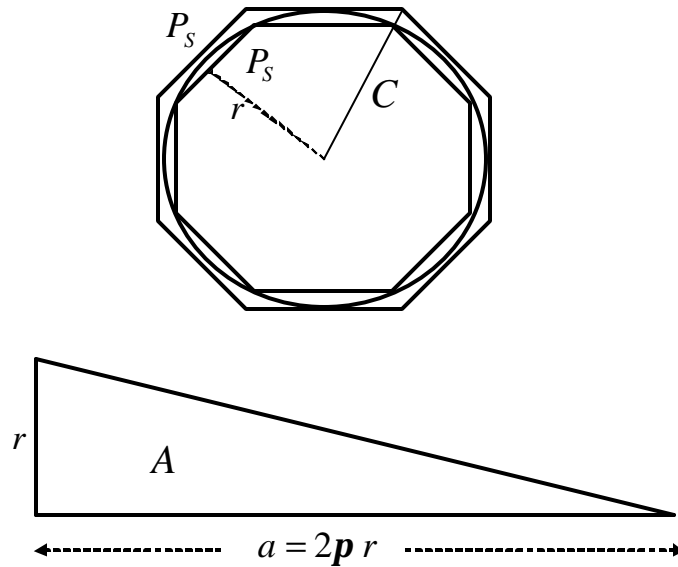


Figura 11

Análogamente, para los polígonos inscritos hay un  $n$  en que  $C - S_n < F$ . Se usa en lo que sigue el  $n$  que resulta mayor.

Sea  $a$  el perímetro del círculo y  $r$  su radio. Sea  $A$  el área del triángulo de base  $a$  y altura  $r$ .

Supongamos que  $C > A = ar/2$ . Podemos encontrar un polígono inscrito de área  $s_n$  y perímetro  $P_n$  tal que:

$$C - s_n < C - A \text{ o sea } s_n > A.$$

Es decir  $P_n r/2 > ar/2$  de donde  $P_n > a$ . Es decir, el perímetro del polígono inscrito es mayor que el de la circunferencia, lo cual es absurdo.

Si suponemos  $C < A$  podemos encontrar un polígono circunscrito de área  $S_m$  y perímetro  $P_m$  tal que:

$S_m - C < A - C$  o sea  $S_m < A$ , es decir  $P_m r/2 < ar/2$  y por tanto  $P_m < a$ .

Es decir, el perímetro del circunscrito es menor que el de la circunferencia, lo cual es absurdo. Luego, debe ser  $C=A$ .

Este es un ejemplo del método de Euclides y Arquímedes con el cual lograron notables resultados como el área de la esfera. Pero es sumamente trabajoso y difícil para problemas más complejos. La Matemática griega posterior (Apolonio, Pappus) resuelve muchos problemas con estas ideas, en particular una teoría muy detallada de las cónicas, pero no aporta nuevas ideas básicas.

En cuanto al Álgebra griega, es totalmente geométrica. Resuelve problemas geométricos que equivalen a la solución de casi todos los casos de las ecuaciones de primer y segundo grado con soluciones positivas. Ni se les ocurre representar la nada (cero) y menos aun lo que es menos que nada (negativo). Por otra parte, los griegos sólo le ven sentido a los productos de dos o tres segmentos que dan áreas y volúmenes respectivamente. Más allá de esto no hay significado en los productos. Por último, no hay un desarrollo de la Física Matemática. Aparte de los intentos pitagóricos de matematizar la acústica y de los trabajos de Arquímedes en estática y flotación, casi no hay aplicaciones a áreas fuera de la Geometría y la Astronomía.

El modelo del mundo de Eudoxo y Aristóteles consistía en una serie de esferas concéntricas giratorias con centro en la Tierra. Los ejes de unas se apoyan en las más exteriores. A ellas están fijos los astros. Desde los movimientos circulares perfectos de las estrellas fijas impulsadas por el motor inmóvil (Dios) el movimiento se degrada a movimientos más irregulares en las esferas de Saturno,

Júpiter, Marte, el Sol, Mercurio, Venus y la Luna. En el mundo sublunar en que vivimos los movimientos son caóticos y no admiten representación matemática. El sistema de Hiparco y Ptolomeo con sus epiciclos conserva esta idea del mundo sublunar que inhibió la aplicación de la Matemática a los movimientos sobre la Tierra. Sólo era aplicable a la Astronomía.



Ptolomeo

Así, al concluir la Matemática griega en el siglo IV d.C., ésta se halla en un punto de gran dificultad para desarrollarse. La unión de la Geometría con la Aritmética es imperfecta por no existir números que representen relaciones y direcciones (negativos). No se aplican magnitudes no geométricas, no se aplica a los fenómenos físicos, está disociada de la Matemática práctica de la ingeniería, su notación numérica no tiene decimales ni es posicional (en esto es inferior a la babilónica) y su manejo de los

problemas de relaciones y límites si bien es riguroso es muy complicado.

Las contribuciones hindúes son: el cero, la notación posicional, los valores negativos, las primeras notaciones algebraicas, los algoritmos de cálculo numérico, y la solución de ecuaciones de segundo grado, junto con las ideas de un infinito estático llegan a Europa en el siglo XIII a través de los Árabes que hacen sus propias contribuciones, principalmente por el libro de Al Joarismi. La síntesis con la herencia griega es lenta y dificultosa.

Hacia el fin de la Edad Media nace un aporte totalmente original y que revela un nuevo espíritu: la representación geométrica de los procesos de cambio. Se origina en una discusión escolástica de las ideas de cambio en Aristóteles. Su expresión más acabada se halla en Nicolás de Oresme (1325-1382). Este considera que para entender el cambio es necesario representar geoméricamente las magnitudes cambiantes. Así representa un movimiento uniforme (velocidad constante) sobre dos líneas perpendiculares, una para representar el tiempo y otra para la velocidad. La representación es una recta horizontal. El área bajo ella representa el espacio recorrido.

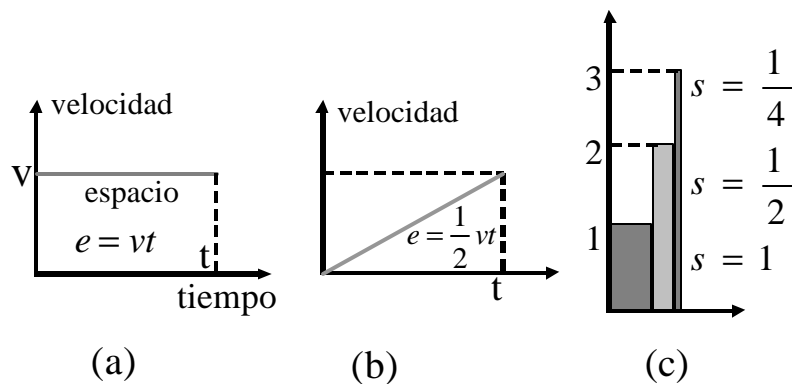


Figura 12

Si el movimiento es de velocidad creciente la representación es una figura triangular.

El camino recorrido está dado por el área del triángulo  $C = vt/2$ . De hecho, Oresme realiza la primera integración de la función lineal 250 años antes que Galileo que obtiene el mismo resultado por un método similar. También está aquí la idea cartesiana de representar magnitudes no geométricas por segmentos. Con ello resuelve problemas de movimientos complicados. Baste citar el de un móvil que en el primer medio segundo tiene velocidad  $v$  en el cuarto que sigue  $2v$ , en el octavo que sigue  $3v$ .

La suma de áreas es  $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$

El camino recorrido es finito, observa Oresme, a pesar de que las velocidades crecen más allá de todo límite.

Nota que si una magnitud pasa por un máximo sus incrementos decrecen hasta cero y luego sus decrementos son cada vez mayores, tiene pues la idea de anulación de los incrementos en el máximo.

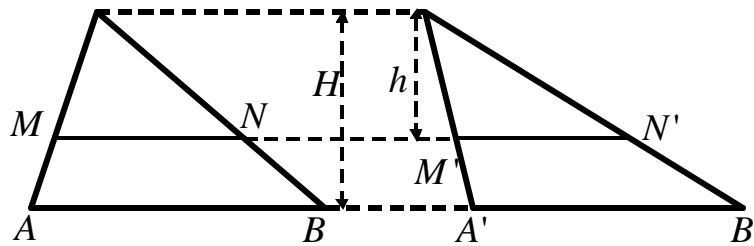
Demuestra también la divergencia de la serie  $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$  por el método que es usual en los textos actuales.

En el manejo de las ideas del infinito se destaca el Cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464). Concibe la verdad absoluta (Dios) como infinita y nuestras verdades relativas como aproximaciones finitas a aquella, de la misma manera que los polígonos son aproximaciones imperfectas, pero infinitamente perfectibles al círculo. Con esta idea observa que de la fórmula del área del polígono inscrito  $S = pa/2$  donde  $p$  es el perímetro y  $a$  la apotema, resulta la del círculo pues al tender a infinito el número de lados,  $p$  tiende a  $2pr$  y  $a$  tiende a  $r$ . De esta forma tan

sencilla llega al resultado trabajosamente (pero rigurosamente) obtenido por Arquímedes.

Las ideas de Oresme y Nicolás de Cusa permanecen sin ser desarrolladas plenamente hasta el siglo XVII. pero sus intuiciones revelan que se superaban las limitaciones de los griegos.

Otro paso notable en la búsqueda de nuevos métodos es el de Cavalieri, discípulo de Galileo. Introduce un principio con el cual logra hallar áreas y volúmenes de una forma muy simple. La idea es que figuras o cuerpos que se pueden descomponer en igual cantidad de elementos iguales tienen magnitud igual. Así para demostrar que triángulos de igual base y altura son iguales, basta ver por semejanza de triángulos, que si trazamos paralelas a las bases los segmentos que interceptan estas paralelas con los lados son iguales. Trazando infinitas paralelas, como uno de los triángulos está formado por los segmentos  $MN$  y el otro por los  $M'N'$  iguales, resulta que ambas figuras tienen igual área.



$$AB = A'B' \quad \frac{AB}{MN} = \frac{H}{h} \quad \frac{A'B'}{M'N'} = \frac{H}{h} \quad \Rightarrow MN = M'N'$$

Figura 13

El argumento hubiera sido inaceptable para los rigurosos matemáticos griegos que no podían admitir que elementos sin área, como los segmentos, pudieran formar una figura con área. Pero, con ciertas precauciones el método funciona y permite hallar fácilmente volúmenes y áreas complicadas como la del hiperboloide de revolución que halló Torricelli.

En particular el resultado del triángulo se generaliza sin dificultad para demostrar que pirámides de igual base y altura tienen igual volumen resultado ya obtenido por Euclides con un largo razonamiento basado en el método de exhaustión.

Galileo entra en la polémica que se inicia en tomo a esta correspondencia entre conjuntos infinitos (los elementos de Cavalieri deben ser la misma cantidad) encontrando las célebres paradojas del infinito. Galileo se pregunta si hay más números naturales o pares. Pareciera que hay menos pares, pues éstos son una parte de los naturales. Sin embargo, puede establecerse una correspondencia:

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots \\ 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots \end{array}$$

que demuestra que hay igual cantidad. O bien,

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, \dots, n, \dots \\ 4, 8, 12, 16, \dots, 4n, \dots \end{array}$$

que demuestra que hay más pares que naturales pues 2, 6, 10, 14, ... son pares que quedan sin correspondientes.

Es decir, en los conjuntos infinitos la parte puede ser mayor que el todo. Galileo pensó que no se podía desarrollar una

Matemática del infinito y sus resultados hacen dudoso el método de Cavalieri

Como se sabe, el problema fue retomado a fines del siglo XIX por Cantor, dando lugar a la teoría de los transfinitos.

Un avance decisivo en la nueva síntesis de la Matemática (ahora ya generalizada en Álgebra) y la Geometría lo produce Descartes (1596-1650) con su *Geometría*. Este libro es una parte de su famoso *Discurso del Método*. Descartes observa que no hay ninguna dificultad en representar por segmentos cualquier magnitud, inclusive productos de varios segmentos. Basta tomar una unidad que permita representar cada segmento por un número, entero o con decimales (los decimales, esbozados en la matemática árabe habían sido descritos con toda claridad por Stevin en 1585). El producto de varios segmentos se representa haciendo el producto de sus números y representando el número resultante por un nuevo segmento. Entonces la relación de dos variables  $x$  y  $y$  en una relación algebraica como  $0.5x^2 - x$  se puede representar en un gráfico de dos ejes no paralelos.

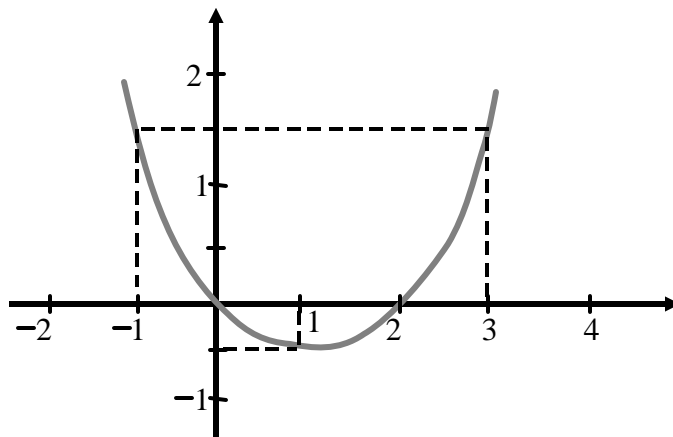


Figura 14

Por lo tanto toda relación algebraica que a todo número de un intervalo haga corresponder otro (o en ciertos casos varios números) puede representarse por un gráfico. Los problemas algebraicos (solución de ecuaciones, máximos y mínimos de funciones, etc.) pueden traducirse a problemas geométricos y estos (intersección de rectas y curvas, trazado de tangentes a curvas) a problemas algebraicos. La solución puede hacerse en el campo en que sea más fácil y pasarse al otro.

Uno puede preguntarse cómo algo tan sencillo e importante no se le ocurrió a los griegos. Parece que no es falta de imaginación (Apolonio, en su tratado de las cónicas, está muy cerca de la expresión por ejes coordenados) sino más bien exceso de rigor. Descartes pasa por alto, aunque no podía ignorar, que no todo segmento puede representarse por un número entero o fraccionario. Por ejemplo, la diagonal de un cuadrado de lado unidad, como lo descubrieron los pitagóricos, no tiene número ni fracción asociados. No sabemos qué respuesta hubiera dado Descartes a tal objeción a su idea de correspondencia completa entre segmentos y números. Pero es cierto que el concepto de *número* aunque no estaba claramente definido no era ya el de los griegos. Los números con decimales ampliaban la representación y podía haber números con infinitos decimales (como por ejemplo  $1/3 = 0.3333$ ). Pero aun vivía la discusión de si valores como la raíz de 2, cuya expresión decimal parecía no tener periodicidad alguna y no podían reducirse a quebrados para operar con ellos, eran o no números. Descartes mismo parece inclinarse por la afirmativa y en tal caso estaría justificada su presunción de que a todo segmento corresponde un número. Pero nadie había definido rigurosamente las operaciones entre tales números.

Descartes con su método de las coordenadas resuelve interesantes problemas. Para hallar, por ejemplo, la línea tangente trazada desde un punto a una curva escribe las ecuaciones de las

rectas que pasan por el punto y la de la curva. En la ecuación de las rectas hay un parámetro no fijado que es su pendiente. A diferentes valores del parámetro corresponden rectas de diferente pendiente que pasan por el punto. Combina ambas ecuaciones en una que tiene varias soluciones, correspondientes a los puntos de intersección de la recta con la curva. Busca entonces qué valor del parámetro hace que las soluciones coincidan (puede haber más de uno). Ese valor sustituido en la ecuación de la recta nos da la ecuación de la tangente. Las ideas de Descartes y su elaboración por Fermat y Wallis le dan a la Geometría Analítica su forma actual y se imponen en los siglos XVII y XVIII donde son ampliamente explotadas por todos los matemáticos.

Entretanto, muchos de los esfuerzos de los matemáticos se concentran en dos problemas:

- a) Dada una curva por su ecuación hallar la tangente. Encontrar un método más general y sencillo que el de Descartes.
- b) Dada una curva por su ecuación encontrar el área limitada por esa curva la abscisa y dos paralelas a la ordenada.

Para esta época (hacia 1660) ya se han consolidado una serie de tendencias que definen la nueva matemática:

- Unión de la Geometría y Álgebra (Oresme, Descartes, Fermat).
- Énfasis en resultados prácticos y aplicaciones (Galileo, Stevin).
- Énfasis en la creación y exploración más que en el formalismo.
- Cierta manejo del infinito (Oresme, Nicolás de Cusa, Cavalieri, Torricelli).
- Unión de la Matemática con la Física (Galileo, Kepler, Descartes).

Esta era la situación cuando, en 1661, el joven Newton entra a la Universidad de Cambridge. Allí, como todos los alumnos, debe aprender la Escolástica aristotélica; pero entre los estudiantes circulaban textos heterodoxos, como los de Descartes, que Newton lee y comenta, Gassendi que resucita el atomismo de Lucrecio y Demócrito, Moore que difunde el platonismo y se interesa en la Alquimia. Entre sus notas de clase figura un cuaderno de cuestiones filosóficas en el que anota los problemas y reflexiones que le sugieren sus lecturas. La encabeza parafraseando el dicho de Aristóteles sobre Platón: *“Soy amigo de Sócrates, soy amigo de Aristóteles, pero mi mejor amigo es la verdad”*.

Además de leer la Geometría de Descartes y los elementos de Euclides, atiende las lecciones de matemáticas de Barrow.

Hacia 1650, Barrow propone un método para el cálculo de tangentes que es, en esencia, el que desarrollan Newton y Leibniz 20 años después. El método aunque publicado en sus Geometrical Lectures en 1670 circulaba como manuscrito desde mucho antes.

Consiste en lo siguiente, según el propio ejemplo de Barrow:

Sea la curva que pasa por  $M$  y sea  $MT$  la recta que la toca en dicho punto  $M$  (tangente). Para hallar el segmento  $PT = t$  tomemos un arco muy pequeño  $MN$  y tracemos  $NR$ . Sea  $MP = m$ ,  $MR = a$ ,  $QR = e$ , y  $AP = p$ . Comparar  $a$  con  $e$  observando las reglas siguientes:

- Omitir en la ecuación de la curva con variable  $p - e$ , términos con potencias de  $a, b$  o sus productos, pues nada valen.
- Omitir términos que no contengan  $a$  o  $e$  (se eliminan restando la ecuación original).
- Deducir la relación  $a/e$ . Esta es igual a  $t/m$ , lo cual permite hallar  $t$ .

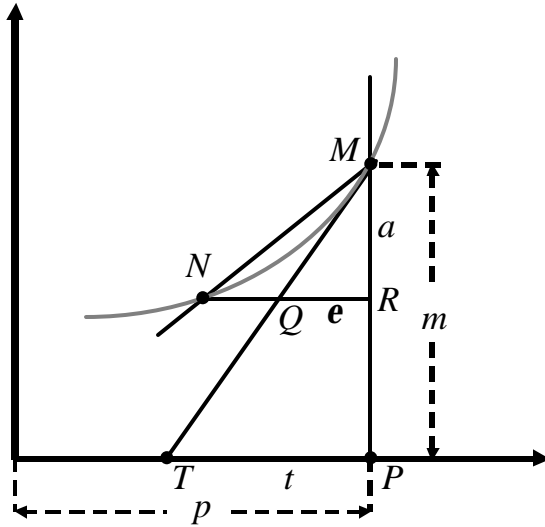


Figura 15

Barrow considera el ejemplo de la ecuación de variables  $p, m$  :

$$p^2(p^2 + m^2) = h^2m^2$$

Incrementando  $p$  en  $-e$  y  $m$  en  $-a$ , obtenemos,

$$(p - e)^2[(p - e)^2 + (m - a)^2] = h^2(m - a)^2,$$

desarrollando y despreciando los términos con cuadrados de  $a, e$  y con el producto  $ae$ , y los que no tienen  $e$  ni  $a$ , resulta,

$$2p^3e - 2p^2ma - 2p^3e - 2pm^2e - 2h^2ma = 0$$

de donde podemos despejar fácilmente,

$$\frac{e}{a} = \frac{2h^3 m - 2p^2 m}{2p^3 - 2pm^2}$$

como  $e/a = t/m$  entonces  $t = em/a$  lo cual permite determinar el punto  $T$ .  $MT$  es la recta tangente. Como se ve, Barrow determina la subtangente  $PT$ .

Si observamos la deducción vemos que la receta de Barrow se corresponde exactamente con el método actual de calcular la derivada. Actualmente designamos  $p, m, e, a$  por  $x, y, -dx, -dy$ .

Es decir, la derivada es  $a/e$  (Barrow calcula  $e/a$ ) cuando  $e$  y  $a$  se hacen cero de manera que “nada valen”.

La idea de Barrow es que siempre  $e/a = t/m$  se mantiene cuando  $e$  y  $a$  se hacen cero. Newton y Leibniz, con diferentes notaciones, procederán de la misma forma.

En muchos textos de historia del Cálculo se dice que estos matemáticos no tienen clara la idea de límite que subyace detrás del cálculo de las derivadas. No creemos en esto. La idea de límite está clara para todos los que hayan leído atentamente a Euclides y Arquímedes y no hay duda que Barrow, Newton y Leibniz conocen la idea. Lo que buscan es un algoritmo para manejar la división y la suma de cantidades que se puedan hacer menores que cualquier número prefijado (en los términos de Leibniz: *tan pequeñas como se quiera*) y sin duda, tanto en Barrow con su método como en los procedimientos de Newton y Leibniz se hallan esos métodos. La obra de Cauchy y sus continuadores lo que hace es fundamentar

en la idea griega de límite los algoritmos que aquellos autores desarrollaron. En el ejemplo anterior si no se desprecian potencias de  $a$ ,  $e$  y el producto  $ae$ , se llega a la expresión:  $a/e =$  términos no dependientes de  $e$  y  $a$ , más términos con  $e$  y  $a$  como factores.

Al tomar  $e$  y  $a$  más y más pequeños la relación  $a/e$  se acerca al primer término mientras el segundo se hace inferior a cualquier cantidad que se fije. El límite de  $e/a$  es, pues, el primer término. No hay duda de que esto estaba en la mente de los autores que usan el método, aunque no se hubieran preocupado de expresarlo en forma consistente. Si no fuera así no habría podido manejar correctamente el cálculo. La fundamentación rigurosa se hace cuando ya las aplicaciones más importantes del cálculo habían sido hechas por los Bernoulli, Euler, D' Alembert, Lagrange, Gauss y otros. No aporta, pues, nuevos métodos para resolver problemas. Tal obra apunta en otra dirección: buscar principios generales de los cuales se deduzcan todos los conceptos y métodos establecidos. Es decir, realizar el viejo programa de Euclides. Estos esfuerzos de ordenación se alternan con los de creación y ambos son fundamentales para el desarrollo de la Matemática. Pero es un hecho que en el siglo XVII predomina la creación como en el nuestro ha dominado la ordenación.

Barrow hace otra contribución fundamental, pero no la desarrolla. Hace notar que el problema de la tangente (*hallar la tangente a una curva dada por su ecuación*) y el del área (*hallar el área bajo una curva dada por su ecuación*) son inversos el uno del otro. Esta idea es la central del Cálculo Infinitesimal y es la que faltaba para poder desarrollar los algoritmos básicos. Barrow ni siquiera expresa esta idea algebraicamente, pero no es difícil reconstruir su pensamiento.

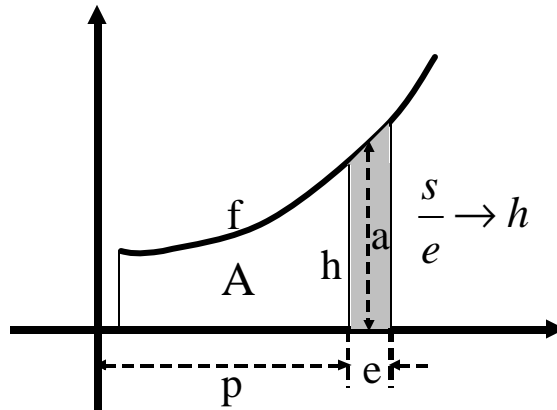


Figura 16

Considerando el área  $A$  bajo una curva como dependiente del valor  $p$  que la limita por la derecha, podemos buscar la tangente de  $A$  puesto que (en nuestro lenguaje)  $A$  es función de  $p$ . Si incrementamos  $p$  en  $e$ , el área se incrementará en  $s$  y la tangente a la curva representativa de  $A$  se aproximaría por  $s/e$ . Pero esta relación es la altura media  $a$  del trapecio curvilíneo y al disminuir  $e$  tiende al valor  $h$  de la curva en  $p$ .

Es decir, la tangente del área bajo una curva nos da el valor de la ordenada de la curva. Como si al hallar el área bajo ella y luego la “tangente de dicha área» nos volviera a dar la curva. La operación de hallar área y de hallar tangente aplicadas a una función se destruyen una a otra como la suma y la diferencia.

Newton, discípulo de Barrow y heredero en su cátedra de Matemáticas, conocía perfectamente estos resultados. Su aclaración y desarrollo son el Cálculo Infinitesimal.

Para ver cómo Newton expresa tal idea en un caso especial pero de mucho alcance conviene ver primero su generalización

del desarrollo de la potencia de un binomio. Para potencias enteras esto era conocida por Pascal, Tartaglia y los árabes, encontrándose en Omar Kayam (1048-1122). El desarrollo conocido era,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{1}{2!}n(n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

Las coeficientes son los números combinatorios de Pascal. El desarrollo tiene  $n + 1$  términos.

Newton aplica la fórmula para  $n$  fraccionario:

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1} b + \frac{1}{2!} \frac{p}{q} (p-1) a^{\frac{p}{q}-2} b^2 + \dots$$

la serie obtenida es infinita, pues no se llega a una potencia de  $a$  que sea cero. Así por ejemplo:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128} x^4 + \dots$$

si  $x < 1$  esta fórmula sirve para calcular raíces cuadradas.

Newton aplica ahora esta fórmula generalizada del binomio para hallar la curva que encierra un área. Sea la curva tal que el área bajo ella limitada por el eje  $X$  y la vertical en el punto  $x$  viene dada por,

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Demos a  $x$  un incremento representado por  $e$ , con lo cual  $z$  experimenta un incremento que se puede escribir  $e y$ , siendo  $y$  una variable. Se tiene pues,

$$z + e y = \frac{n}{m+n} a (x + e y)^{\frac{m+n}{n}}$$

$$= \frac{n}{m+n} a \left[ x^{\frac{m+n}{n}} + \frac{(m+n)}{n} x^{\frac{m}{n}} e + \frac{1}{2!} \frac{(m+n)m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} e^2 + \dots \right]$$

donde siguen términos con potencias superiores de  $e$ .

Restando de ésta la ecuación anterior, dividiendo por  $e y$  y haciendo luego  $e$  igual a cero, obtenemos finalmente,

$$y = a x^{\frac{m}{n}}.$$

Esta es, pues, la ecuación de la curva buscada, bajo la cual el área es  $z$ .

Recíprocamente, si nos dan la curva dada por la ecuación de arriba, el área bajo ella entre 0 y  $x$ , es

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Se ve pues una relación clara entre el cálculo del cociente de incrementos y la cuadratura. Newton llama a la variable  $z$  “*fluente*” y llama “*fluxión del fluente*” a  $y$ , notando que ésta es el incremento del fluente por unidad de tiempo (en general de la variable independiente). La expresión  $e y$  es el incremento de la fluxión en el intervalo de duración  $e$ . Newton la llama momento. Es,

pues, lo que Leibniz llamará diferencial de la función  $z$ . Usando la notación actual, escribiríamos  $dz = z' dx$ .

Newton suele llamar al valor  $y$  así obtenido al dividir  $e$  y por  $e$  despreciando luego los términos con  $e$ , la “última razón” de los incrementos de la fluxión y la variable.

Newton notó que pueden calcularse fluentes de fluentes, fluxiones de fluxiones, etc. Calcula fluxiones de funciones fluentes implícitas complicadas como por ejemplo la de  $z$  en

$$x^3 - x y^2 + az + b = 0$$

poniendo incrementos:  $ex'$ ,  $ey'$ ,  $ez'$ , desarrollando, restando la original y despreciando los términos que contienen  $e$ , obtiene,

$$3x^2x' - y^2x' - 2xyy' + az' = 0$$

En este ejemplo está implícita la derivada del producto.

La idea práctica es hacer una tabla de funciones (fluentes) y de sus derivadas (fluxiones). Leída al revés permite resolver el problema de las cuadraturas mucha más fácilmente que por el uso del método griego y con más generalidad que los métodos especiales desarrolladas por Cavalieri, Fermat, Wallis y otros precursores.

Es interesante ver lo que escribe Newton en su libro básico Principias Matemáticas de Filosofía Natural, sobre el “*desprecio*” de los términos que contienen  $e$  después de haber dividido por  $e$ :

“Quizá puede objetarse que no hay última razón de cantidades que desaparecen, porque la razón, antes que las cantidades desaparezcan no es última, y cuando ya han desaparecida no existe (tal razón).

Las razones últimas en las cuales las cantidades se anulan no son realmente las razones de las últimas cantidades, sino los límites hacia las cuales las razones de las cantidades, decreciendo indefinidamente, siempre se aproximan y a las cuales ellas (las razones) se aproximan más que cualquier diferencia dada pero que no pueden alcanzar antes de que las cantidades son disminuidas indefinidamente”.

Así, está claro que Newton ve las objeciones lógicas que pueden hacerse a su procedimiento. Al aclarar qué entiende por última razón da en esencia una explicación igual a la actual: es el límite al que tiende el cociente de las dos cantidades cuando ellas tienden a cero (decrecen indefinidamente) del cual la razón actual (cuando no son cero) puede diferir en menos que cualquier cantidad. No es raro que tenga claro este concepto que hemos visto manejar a Eudoxo, Euclides y Arquímedes, estos dos últimos bien conocidos por Newton. Es claro también que Newton no desarrolló un lenguaje o una notación apropiada para expresar su idea del límite, remitiéndose a explicaciones verbales como la vista. Más interesado en los algoritmos y aplicaciones que en el rigor lógico propuso algoritmos objetables, pero nunca cometió errores en los resultados, lo cual prueba que tenía bien en claro la idea. La obra de crear una notación que permitiera reunir la fundamentación rigurosa de los griegos con los algoritmos del cálculo es obra de los matemáticos del siglo XIX. Pero véase que esto se hace cuando las principales aplicaciones ya han sido hechas por los Bernoulli, Euler, D’Alambert, Lagrange, Laplace, Gauss y Fourier.

Otra idea importante de Newton es su uso de las series infinitas para hallar funciones derivadas y primitivas. Para calcular por ejemplo la primitiva (flujo) de  $1/(1+x^2)$  desarrolla esta fracción en serie por división:

$$\frac{1}{(1+x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

y hallando la primitiva de cada término obtiene,

$$1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Nota que para que la fórmula valga debe ser  $-1 < x < 1$ , pero no ataca los problemas de convergencia cuyo examen comienzan Bernoulli y Euler y que en este caso requiere uso de variable compleja.

Otra idea de mucha importancia práctica desarrollada por Newton es la de radio de curvatura de una curva cualquiera. Considera dos normales en  $A$  y  $B$ . En la intersección  $C$  alza la vertical y toma un segmento unidad hasta  $G$ .

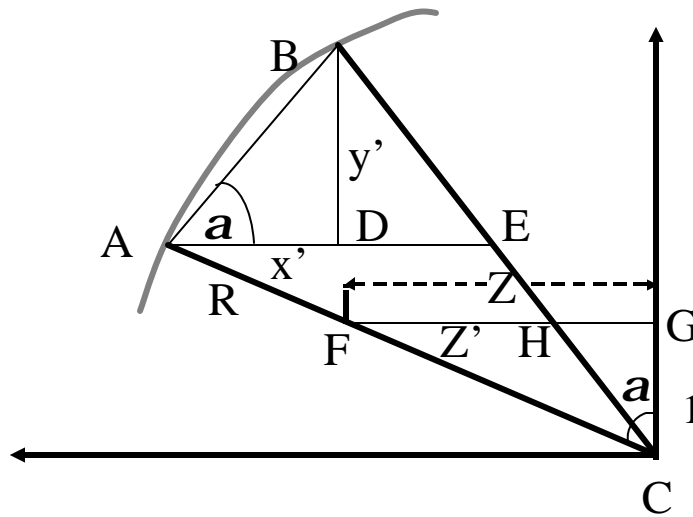


Figura 17

De la semejanza de los triángulos  $ABD$  y  $CGF$  resultan las igualdades,

$$\frac{z}{1} = \frac{y'}{x'} \quad y \quad y'^2 = x' \cdot DE$$

La segunda de ellas por ser  $y'$  la altura de  $ABE$ , siendo  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , las fluxiones de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Por la semejanza de  $AEC$  y  $FHC$ ,

$$\frac{R}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{DE+x'}{z'}$$

de donde,

$$R = \frac{\sqrt{1+z^2} \left( \frac{y'^2}{x'} + x' \right)}{z'} = \frac{x'(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{z'}$$

en nuestra notación  $y' = \operatorname{tg} a = z$  y  $x' = 1$  de modo que el radio de curvatura  $R$  resulta ser

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Esta demostración aparece en su Método de las Fluxiones, donde aparece también el cálculo de máximos y mínimos por anulación de la derivada y el cálculo de los puntos de inflexión.

Newton se ocupó de muchos problemas prácticos y es famoso su método de solución de ecuaciones que ilustra con un ejemplo:

Consideremos la ecuación

$$y^3 + 2y - 5 = 0$$

que tiene una raíz aproximada igual a 2 .

Se supone como verdadera  $2 + p$  . Sustituyendo en la original, obtenemos,

$$(2 + p)^3 + 2(2 + p) - 5 = 0$$

Desarrollando las operaciones, obtenemos una ecuación para  $p$  :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 ,$$

despreciando potencias cuadráticas y superiores,

$$10p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = 0.1$$

Sustituyendo ahora en la ecuación para  $p$  el valor  $p = 0.1 + q$  obtenemos una ecuación para  $q$ .

Desarrollando y despreciando las potencias superiores de  $q$  obtenemos,

$$11.23q = 0.061 \Rightarrow q = 0.054$$

Se puede proseguir hasta la precisión deseada. Hasta ahora

$$y = 2 + 0.1 + 0.054 = 2.154.$$

Este método es la base de los métodos iterativos de convergencia cuadrática para ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales tan usados hoy en cálculo numérico.

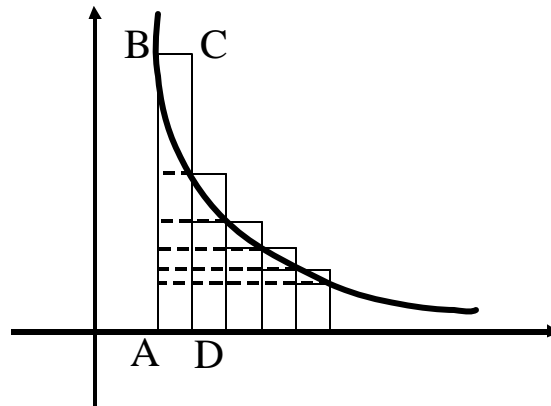


Figura 18

En su obra capital sobre el sistema del mundo *Principios Matemáticos de Filosofía Natural* (1686), Newton hace un amplio uso de los métodos infinitesimales. Después de exponer las leyes básicas de la dinámica establece que el área de una curva es el

límite de las figuras escalonadas inscritas y circunscritas cuando el ancho de todos los escalones disminuye indefinidamente al aumentar infinitamente su número. Esto se ve considerando que la diferencia de las figuras escalonadas (usando intervalos iguales) es igual al rectángulo  $ABCD$  y el área de este tiende a cero cuando el número de divisiones crece infinitamente.

Otro resultado importante es que la relación última del arco la cuerda y la tangente es una relación de igualdad cuando el ángulo decrece indefinidamente.

Luego entra al estudio de las fuerzas centrales. Apoyado en los métodos infinitesimales muestra que si un punto es atraído hacia un centro, entonces las áreas barridas por el radio que lo une al centro son proporcionales al tiempo. Es decir, generaliza la ley de Kepler para fuerzas centrales cualesquiera. Luego, para el caso del movimiento circular, muestra que las fuerzas hacia el centro ejercidas sobre puntos que giran son proporcionales a los cuadrados de las velocidades e inversamente proporcionales a los radios. Es decir,

$$F = a \frac{v^2}{r}$$

donde  $a$  es una constante. Aplicando la tercera ley de Kepler que afirma que los cuadrados de los tiempos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios,  $T^2 = br^3$  ( $b$  es constante) y recordando que  $v = 2\pi r/T$  podemos concluir que

$$F = \frac{k}{r^2}$$

donde  $k$  es otra constante. Es decir, la fuerza centrípeta de atracción ejercida hacia el centro es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Es fácil dar vuelta el argumento y tomando esta fuerza como hipótesis demostrar la tercera ley de Kepler (las otras dos son obvias para este caso circular).

Newton pasa de este simple caso circular al caso general demuestra, basándose en propiedades conocidas de las cónicas, que si un punto se mueve sobre una cónica la fuerza centrípeta esta dirigida a uno de los focos y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco. Recíprocamente, si un punto está sometido a una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro, entonces su trayectoria es una cónica. El paso genial de Newton en Física fue el de identificar esa fuerza hipotética entre cuerpos celestes con la gravedad terrestre. La distinción aristotélica entre mundo astral y sublunar quedaba así destruida y confirmada la apertura galileana a una Física universal.

Luego pasa al caso de dos cuerpos puntuales con masa que se atraen y muestra que describen figuras semejantes alrededor de su centro de masa. Y si las fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia las trayectorias son elipses, y las áreas barridas son proporcionales a los tiempos.

En el tratamiento de la atracción de cuerpos esféricos parte de la consideración de la atracción de una superficie esférica con masa sobre un punto interior. Por la equivalencia como razón última entre la cuerda  $C$  y el arco de centro  $O$ , o de su proyección  $A$  sobre la circunferencia se tiene,

$$\frac{R}{A} = \frac{r}{a}$$

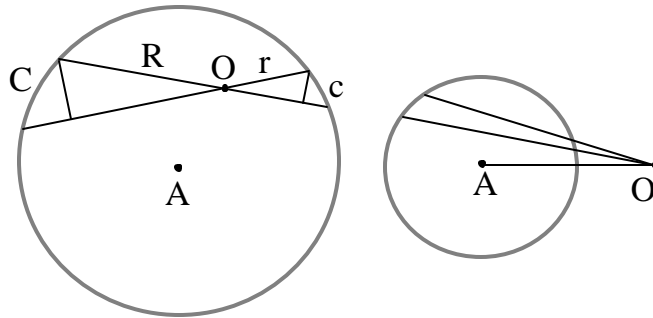


Figura 19

Las áreas correspondientes  $S$  y  $s$  interceptadas por el ángulo sólido con centro en  $O$ , están en la relación de los cuadrados de los radios,

$$\frac{R^2}{S} = \frac{r^2}{s}$$

Si suponemos que las fuerzas ejercidas por las áreas  $S$  y  $s$  son proporcionales a su superficie (o masa) e inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias resulta,

$$F_S = k \frac{S}{R^2} \quad \text{y} \quad F_s = k \frac{s}{r^2}$$

que combinada con la anterior permite concluir que  $F_S = F_s$

y como son de sentido opuesto se anulan. Extendiendo todos los elementos de área resulta que la fuerza total sobre  $O$  es cero.

De forma análoga se ve que si el punto  $O$  es exterior a la superficie, la fuerza sobre él es igual a la que ejercería toda la masa de la superficie concentrada en su centro. Esta demostración es mucho más complicada y es una de las obras maestras del *Principia*.

Con esto demuestra que la atracción entre dos esferas de masa homogénea (o dependiente sólo del radio) puede calcularse suponiendo toda la masa concentrada en su centro.

Todo este desarrollo que es la base de su ley de gravitación universal, Newton lo apoya en los conceptos básicos de integración y razón última.

Las ideas del cálculo fueron desarrollados simultáneamente por el filósofo y matemático alemán Godofredo Guillermo Leibniz. Esta coincidencia dio lugar a una agria polémica sobre la prioridad del descubrimiento. Si se ve cómo llegó Leibniz a la idea básica del Cálculo resulta claro que ninguno de los dos puede haber plagiado al otro. Por otra parte muchas de las ideas estaban en el ambiente a mediados del siglo XVII y muchos resultados y aplicaciones eran obvias (para mentes como la de Newton o Leibniz) una vez captada la idea esencial de integración y derivación.



Godofredo Guillermo Leibniz

Para dar brevemente una idea de cómo llegó Leibniz a las ideas del cálculo hay que remontarse a su tesis doctoral: el *Ars Combinatoria* (1666) donde propone un método general de razonamiento. Sostiene que todo razonamiento es reductible a una combinación ordenada de símbolos y por lo tanto puede desarrollarse por transformaciones en esa ordenación realizada por reglas precisas. Es el germen del actual procesamiento de información computarizada. En un ejemplo de esa disertación, Leibniz observa que las diferencias sucesivas de los números cuadrados se eliminan al llegar a las diferencias segundas:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\
 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\
 & & 2 & 2 & 2 & 2
 \end{array}$$

y observa que si suma el valor inicial y las  $n$  primeras diferencias obtiene el término  $n+1$  de la serie original ( $1+3+5=9$ ).

Esto le sugirió la idea de que tomando las diferencias que luego se sumarían se podrían reconstruir los valores originales de la función.

En especulaciones posteriores (1670) generaliza esta idea notando que si se suman las diferencias (crecimientos) de las ordenadas por unidad de abscisa se obtiene el valor final de la función (la ve para la función lineal pero luego lo generaliza). En la notación de Leibniz:

$$\int \left( \frac{dy}{dx} \right) dx = y$$

Si se suman las diferencias de las áreas por unidad de abscisa (es decir los rectángulos) se obtiene el valor del área,

$$\int y \, dx = \text{área}$$

Por otra parte  $dy/dx$  es la pendiente de la función lineal. Esto se generaliza para cualquier función Si consideramos  $dy/dx$  cuando  $dx$  tiende a cero. Se ve pues que

$$\int y' \, dx = y$$

El razonamiento de Leibniz se aclara en la figura siguiente.

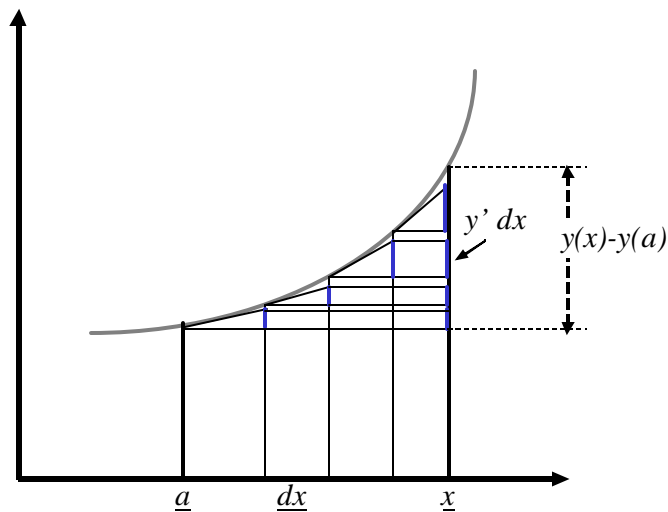


Figura 20

Al sumar los segmentos  $y' dx$ , (donde  $y'$  es la derivada, la pendiente de la tangente en el punto considerado) se aproxima el valor de  $y$ ,

$$\sum y' dx \rightarrow y$$

y cuando el número de intervalos crece y todos se aproximan a cero,

$$\int_a^x y' dx = y(x) - y(a)$$

Como se ve, mientras el énfasis de Barrow y Newton es que la derivada de la función es la integral, el de Leibniz es que la integral de la derivada es la función. Ambos son equivalentes.

Si se ve que  $y$  y  $y'$  son funciones de  $x$ , se ha dado en el resultado obtenido por Barrow. La explotación de esta idea para hallar tangentes y cuadraturas sigue el mismo camino que hemos visto en Newton.

Leibniz supera a Newton en calidad y adecuación de la notación, que es la que usamos actualmente. No se preocupa mucha por el rigor de la idea de límite y da la sensación de que está pensando en infinitas sumas de tamaño nulo pero cuya suma infinita puede ser finita, una concepción acorde con su teoría filosófica de las mónadas pero que no pudo formalizar con la lógica de su época. Actualmente el Análisis “*no estándar*” parece revivir sobre nuevas bases lógicas las intuiciones leibnizianas.

La superioridad de Newton estriba en la aplicación de los conceptos del Cálculo a la mecánica y en ese sentido abre el camino a los grandes matemático-físicos del siglo XVIII que llevaron al virtuosismo el paradigma del Cálculo Infinitesimal.

Entre los trabajos de Álgebra de Newton recordamos el establecimiento de las relaciones entre las raíces de una ecuación polinómica y sus coeficientes que dará origen a la teoría de las funciones simétricas y el teorema sobre acotación de las raíces de tales ecuaciones: un número  $a$  es una cota superior de las raíces reales de  $f(x) = 0$ , si al sustituirla en  $f(x)$  y en sus derivadas produce siempre valores del mismo signo.

En resumen: Newton mantiene una unidad permanente de lo geométrico y lo algebraico. Tiene una concepción dinámica del infinito y de lo infinitamente pequeño que maneja con certera intuición a falta de un lenguaje riguroso. Se preocupa mucho más por la fecundidad de sus métodos que por las elucubraciones teóricas y mantiene una constante relación entre teoría y aplicaciones. Su paradigma mecánico del mundo domina hasta el siglo XX al comienzo del cual la Teoría Cuántica y la Relatividad cambian radicalmente su enfoque.