Capítulo 4

Apéndice 1.

4.1. Variedades y coordenadas. Una aproximación informal.

Existen dos aproximaciones a la idea de variedad:

1. Una variedad es la generalización de la idea de superficie (bidimensional) en el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$. Se puede demostrar que cualquier variedad (analítica) de dimensión n se puede considerar como una superficie en un espacio euclideo $\mathbb{R}^N$ con $n \leq N \leq n(n+1)/2$, entonces el espacio $\mathbb{R}^N$ se llama **espacio ambiente** de la variedad en cuestión.
2. Una variedad n-dimensional se puede 'ver' como un conjunto de puntos que localmente (i.e.: en entornos pequeños alrededor de cada punto) se parece al conjunto de puntos $\mathbb{R}^n$ (espacio euclideo n-dimensional), aunque globalmente puedan ser muy distintos.

El primer punto de vista tiene la ventaja de que en $\mathbb{R}^N$ podemos definir coordenadas cartesianas globalmente (con todo lo que ello supone) y restringir después a la variedad en cuestión. Las superficies en $\mathbb{R}^3$ son desde luego variedades 2-dimensionales:

> **Ejemplo 1:** Utilizando coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ la esfera S^2 (centrada en el origen y de radio 1) se puede definir como
> $$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
> podemos utilizar las coordenadas cartesianas para coordenar puntos de la esfera; así por ejemplo, un punto del hemisferio norte tendrá coordenadas $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, con lo que tan sólo son precisas dos coordenadas (x e y por ejemplo) para describir los puntos de la esfera, de acuerdo con la idea de superficie como un conjunto de puntos bidimensional, esto es: con *dos grados de libertad*.

Ver la superficie (la esfera en el caso anterior) como un subconjunto del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$ y utilizar coordenadas cartesianas allí tiene ventajas; por ejemplo, los vectores (flechas) con origen en un punto $p \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (lo que llamaremos $T_p\mathbb{R}^3$; i.e.: vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ con origen en p) tienen componentes, según la base cartesiana de ese espacio, iguales a la diferencia entre las coordenadas del extremo de la flecha y el origen de ésta (p); sin embargo, resulta difícil ver si un determinado vector de $T_p\mathbb{R}^3$ lo es tambien de T_pS^2 para un punto p sobre la esfera; esto es: si una flecha con origen en p es o no tangente a la esfera. Además, uno tiene que estar refiriéndose todo el tiempo al espacio ambiente.

El segundo punto de vista es **intrínseco**; esto es: considera la variedad por si misma, y no como subconjunto de algún espacio ambiente. En general, no podremos definir coordenadas cartesianas, pero todo lo que digamos estará ya directamente referido a la geometría de la propia variedad. El punto clave está en el concepto de **localmente como** $\mathbb{R}^n$. Así diremos, por ejemplo, que la esfera es una variedad 2-dimensional porque localmente (en un entorno alrededor de cualquier punto):

(a) Podemos coordenar todos los puntos de ese entorno de manera continua utilizando tan sólo dos coordenadas (por ejemplo: longitud y latitud).

(b) En ese entorno la geometría es parecida a la de $\mathbb{R}^2$ (por ejemplo, para nosotros, habitantes de la Tierra -considerándola como una esfera perfecta-, ésta nos parece plana, como $\mathbb{R}^2$, en un entorno de nuestra posición). Esta segunda condición es lo que significa el adjetivo **diferenciable**; esto es: la superficie no puede tener 'puntas' o 'crestas':

> **Ejemplo 2:** un cono incluyendo el vértice no sería una variedad diferenciable, ya que en un entorno del vértice, las cosas no son como en $\mathbb{R}^2$; por ejemplo: el vector tangente a cualquier curva que pasara por ese vértice es discontinuo en el vértice (esto es: la derivada de la representación paramétrica de la curva no existe en ese punto, la curva **no es diferenciable** en ese punto), y eso no ocurre para ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

Para entender mejor el significado de las coordenadas en una variedad cualquiera, consideremos a continuación el caso de coordenadas definidas sobre una superficie de $\mathbb{R}^3$.

4.1.1. Coordenadas en una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Consideremos un punto $p \in \Sigma$ cualquiera y un abierto, que llamaremos O_p, contenido en Σ y que contenga ese punto; esto es: $p \in O_p \subseteq \Sigma$.

Figura 1

Diremos que $x^a = \{x^1, x^2\}$ son **coordenadas** válidas en la región O_p si existe un abierto de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función x de O_p en U:

$$\begin{array}{rcl} x : O_p \subseteq \Sigma & \to & U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ q & \mapsto & (x^1_q, x^2_q) \end{array}$$

tal que

1. x es biyectiva (i.e.: inyectiva y exhaustiva).
2. x es continua.
3. x^{-1} (que existe porque x es biyectiva) es también continua.

Parafraseando: $\{x^1, x^2\}$ son coordenadas válidas en la región O_p si a todo punto $q \in O_p$ de esa región se le pueden hacer corresponder dos números reales (x_q^1, x_q^2) que llamamos **coordenadas del punto** q, de manera que

(1) biyectividad de x: a puntos distintos corresponden valores distintos de sus coordenadas y fijado un punto p sus coordenadas (x_p^1, x_p^2) son únicas.

(2) continuidad de x: al variar continuamente los puntos de O_p (i.e.: al pasar de un punto de O_p a otro infinitamente cercano), los valores de (x^1, x^2) varían continuamente (i.e.: pasan de un valor a otro infinitamente cercano)

(3) continuidad de x^{-1}: al variar los valores de x^1, x^2 de manera continua, obtenemos una variación continua de puntos de Σ.

Nota 1. Dado que x es biyectiva y tanto ella como su inversa son continuas, también hubiéramos podido definirla como una función de $U \subseteq \mathbb{R}^2$ en $O_p \subseteq \Sigma$, esto es:

$$\begin{array}{rcc} x : U \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & O_p \subseteq \Sigma \\ (x_q^1, x_q^2) & \mapsto & q \end{array}$$

en algunos libros las coordenadas se definen de este modo y en otros del otro. En cualquier caso, el abierto U de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los valores posibles de las coordenadas x.

Nota 2. Las funciones $x : O_p \to U$ es lo que en Física llamamos **sistemas de coordenadas** (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio O_p y recorrido U); en Matemáticas se llaman normalmente **cartas coordenadas**.

Sobre los conceptos topológicos.

En la revisión anterior de la definición de coordenadas en una superficie, aparecen dos conceptos topológicos importantes: el de *conjunto abierto* y el de *función continua.* Antes, conviene decir que los conjuntos que consideraremos (variedades, superficies, etc.) se llamarán genéricamente **espacios**, y sus elementos (los elementos de estos conjuntos) se llamarán **puntos**.

Conjunto Abierto Es el concepto que permite introducir las ideas de proximidad (o vecindad) entre puntos, separación entre puntos, etc. Así por ejemplo, dos puntos puntos "son vecinos"si están contenidos en un mismo abierto (que no sea el espacio total); están separados si existen dos abiertos, conteniendo cada uno de ellos uno de esos puntos, que son disjuntos (i.e.: su intersección es vacía). Expresiones tales como *entorno de un punto p* tienen una definición precisa que coincide con la idea intuitiva que sugiere la propia expresión (i.e.: el puno p y sus puntos vecinos).

En todo momento, el modelo a seguir es el de los abiertos en $\mathbb{R}$, i.e.: conjuntos tales como los intervalos abiertos (a, b), las uniones de un número cualquiera (finito o infinito) de intervalos de este tipo, las intersecciones de un número finito de intervalos de este tipo, el espacio total $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío $\emptyset$. En este caso, la noción de proximidad, separación, etc., es muy clara porque tenemos la noción de **distancia** entre dos números $d(a,b) = |a-b|$ que coincide con la noción habitual de distancia, y por tanto conceptos tales como proximidad, separación, etc. son claros. En el caso general sin embargo, podemos no tener una noción de distancia y es por eso que se definen los conjuntos abiertos, de una manera formal.

Así, un espacio M en el que tenemos definida una colección de subconjuntos de M, que designaremos $\{O_\alpha\} = \mathcal{T}$, se llama **espacio topológico** (y $\mathcal{T}$ se llama **topología** sobre M) si se verifican las tres propiedades siguientes:

1. $M, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. La unión de un número cualquiera (finito o infinito) de subconjuntos $O_\alpha \in \mathcal{T}$, está también en $\mathcal{T}$.
3. La intersección de un número finito de subconjuntos $O_\alpha \in \mathcal{T}$, está también en $\mathcal{T}$.

Los conjuntos O_α se llaman **abiertos** (de M o de la topología $\mathcal{T}$). Todas las variedades son espacios topológicos.

Función Continua Entre dos espacios X e Y es una función $f : X \to Y$ (i.e.: una asignación de puntos de Y a puntos de X) de modo que a puntos de X próximos entre si les corresponden (al "aplicarles" f), puntos de Y que también están próximos entre si. La definición en términos de abiertos es que la anti-imagen o pre-imagen por f de un abierto de Y es un abierto de X. El modelo a tener en cuenta en todo momento es el de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

De manera precisa, dados dos espacios topológicos X e Y (con topologías $\mathcal{T}_X$ y $\mathcal{T}_Y$), una función $f : X \to Y$ es **continua** si para todo abierto $U_\beta \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{T}_X$; esto es: la anti-imagen de un abierto de Y es un abierto de X.

Las definiciones formales de estos conceptos, así como ejemplos y algunos desarrollos de interés que se basan en éstos, pueden encontrarse en cualquier libro de topología y/o de geometría diferencial. Véase también `http://www.uib.es/depart/dfs/GRG/index.html` el apartado[1] de "Notas de clase", el Tema 3 de "Ampliación de Métodos Matemáticos".

[1]Aunque los títulos están en catalán, las notas están escritas en español.

4.2. Variedades y coordenadas. Una aproximación formal.

Como ya hemos dicho, una variedad es la generalización a una dimensión cualquiera del concepto de superficie, o también la imagen de que una variedad está hecha de trozos que son como conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, 'cosidos' entre si sin formar puntas, crestas, etc., esto es: "suavemente".

A continuación damos la definición tal y como viene en la mayor parte de textos. Utilizaremos el lenguaje establecido en la sección anterior: abiertos, funciones continuas, etc.; todo ello en una dimensión n arbitraria.

Una **variedad real diferenciable (C^∞) n-dimensional** M es un conjunto de puntos junto con una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\} = \mathcal{T}$, que son sus abiertos[a], de modo que:

1. Para cada O_α existe una función $x_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, donde U_α es un abierto de $\mathbb{R}^n$, de modo que la función x_α (que tendrá n componentes):

$$x_\alpha(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p)) \in U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

   es biyectiva, continua y la inversa es también continua[b].

2. Si dos subconjuntos O_α, O_β se solapan; i.e.: $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, la función f definida como $f = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$; i.e.:

$$f \equiv x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow x_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$$

   es tal que f y f^{-1} (que son funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$) son C^∞. Notemos que f es lo que llamamos un **cambio de coordenadas**.

[a] $\mathcal{T}$ es una topología y entonces M es un espacio topológico; en particular esto implica que cada punto $p \in M$ está contenido en al menos un subconjunto O_α y que los $\{O_\alpha\}$ forman un recubrimiento de M.

[b] En matemáticas, una función biyectiva, continua y con la inversa también continua se llama **homeomorfismo**, y si además ella y su inversa son C^∞, se llama **difeomorfismo**.

Figura 2

Nota 1. Las funciones $x_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$ se llaman en Física **sistemas de coordenadas** (y normalmente, no nos molestamos demasiado en especificar el dominio O_α ni el recorrido U_α); mientras que en Matemáticas se llaman **cartas coordenadas**. Nosotros utilizaremos indistintamente un nombre u otro.

Nota 2. En la definición anterior se requiere que el recubrimiento $\{O_\alpha\}$ y la familia de cartas (o sistemas de) coordenadas $\{x_\alpha\}$ sea maximal, esto es: que todos los sistemas de coordenadas posibles y compatibles con los requisitos (1) y (2) de la definición estén incluídos. Ni que decir tiene que esto no supone ninguna complicación para los desarrollos que vienen a continuación y no debe preocuparnos. (Esto se hace parae evitar que podamos 'fabricar' variedades nuevas introduciendo un nuevo sistema de coordenadas, o introduciendo un abierto $O_{\gamma'} \subset O_\gamma$ y definiendo allí nuevas coordenadas).

Nota 3. Si los cambios de coordenadas son continuos simplemente (ni siquiera diferenciables) hablamos de variedades topológicas, si son diferenciables tan sólo n veces, de variedades C^n. Nosotros supondremos siempre que nuestras variedades son C^∞ (suaves: 'smooth' en inglés) y las llamaremos simplemente **variedades** (en lugar de variedades diferenciables); éste es desde luego el caso de la Física, donde las variedades de interés son, en muchos casos, de dimensiónes bajas: dimensión 2 (superficies en $\mathbb{R}^3$ incluyendo el plano $\mathbb{R}^2$), dimensión 3: el propio espacio $\mathbb{R}^3$ (o alguna región abierta de éste), dimensión 4: diferentes tipos de espacio-tiempo (sobre los cuáles está formulada la Teoría de la Relatividad). Hay otros casos de interés en que los puntos de la variedad no son necesariamente o directamente identificables como puntos en el sentido geométrico (i.e.: elementos de $\mathbb{R}^3$ o de alguna superficie contenida allí, o incluso puntos del espacio-tiempo): por ejemplo dado un sistema holónomo en mecánica clásica, el conjunto de todas las configuraciones posibles, tiene estructura de variedad diferenciable (es el llamado **espacio de configuraciones** del sistema) siendo sus coordenadas las coordenadas canónicas $q = (q^1, \cdots, q^n)$ donde n el número de grados de libertad del sistema.

Ejemplo 3: Consideremos la esfera $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$.
No es posible encontrar una función continua continua, biyectiva y cuya inversa sea también continua, que vaya de S^2 a (alguna región abierta de) $\mathbb{R}^2$ (i.e.: no existe ningún sistema de coordenadas global sobre la esfera); pero sí que es posible 'coser' diferentes trozos de esfera entre si 'suavemente' (sin puntas, crestas, etc.):
Consideremos los seis hemisferios abiertos siguientes:

$$\begin{array}{ll}
O_1^+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \ : x^1 > 0\}, & O_1^- = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \ : x^1 < 0\} \\
O_2^+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \ : x^2 > 0\}, & O_2^- = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \ : x^2 < 0\} \\
O_3^+ = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \ : x^3 > 0\}, & O_3^- = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \ : x^3 < 0\}
\end{array}$$

es trivial ver que recubren la esfera; además sobre cada uno de ellos pueden definirse coordenadas del modo que sigue; en la notación establecida en la definición, consideremos $U_1^+ = U_1^- = \cdots = U_3^- = D \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$; entonces:

$$\begin{array}{lcclllccl}
x_{1+} : & O_1^+ & \to & D & \qquad & x_{1-} : & O_1^- & \to & D \\
& (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & (x^2, x^3) & & & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & (x^2, x^3) \\
x_{2+} : & O_2^+ & \to & D & & x_{2-} : & O_2^- & \to & D \\
& (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & (x^1, x^3) & & & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & (x^1, x^3) \\
x_{3+} : & O_3^+ & \to & D & & x_{3-} : & O_3^- & \to & D \\
& (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & (x^1, x^2) & & & (x^1, x^2, x^3) & \mapsto & (x^1, x^2)
\end{array}$$

Fijémonos que las funciones $x_{j\pm}$ para $j = 1, 2, 3$ no son sino las proyecciones de los puntos correspondientes sobre discos planos; así por ejemplo, la función x_{3+} proyecta el hemisferio norte de la esfera sobre el disco resultante de la intersección de la esfera con el plano XY, etc.

Es fácil demostrar que todas estas funciones son biyectivas y continuas y que sus inversas también son continuas. Asimismo, es fácil ver que $x_{j\pm} \circ (x_{k\pm})^{-1}$ son C^∞ en su dominio de definición.