Capítulo

$\boxed{4}$

Física en un Espaciotiempo de Robertson-Walker

Cinemática de Partículas

En esta sección consideraremos el comportamiento de partículas que se mueven respecto del sistema de coordenadas comóviles de Robertson-Walker. Primero trataremos el caso en que las partículas tienen masa y luego el importante caso de la propagación de fotones. Supondremos que las partículas se mueven libremente, es decir, no sujetas a fuerzas no gravitacionales y siguen por tanto geodésicas del espaciotiempo. Denotemos por u^a la cuadrivelocidad de la partícula (denominada a veces velocidad peculiar de la partícula). La ecuación de movimiento es entonces

$$\frac{du^a}{ds} + \Gamma^a{}_{bc}\, u^b u^c = 0 \tag{4.1}$$

Recordemos que en términos de la velocidad ordinaria $v^\alpha \equiv \dfrac{dx^\alpha}{dt}$ la cuadrivelocidad está dada por $u^a = (\gamma, \gamma v^\alpha)$ y $\gamma \equiv (1 - \vec{v}^2)^{-1/2}$ donde $\vec{v}^2 = h_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta$. Recordemos también que $u_a u^a = 1$ y por tanto $(u^0)^2 - \vec{u}^2 = 1$ donde $\vec{u}^2 = h_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta$. La componente $a = 0$ de la ecuación 4.1 es

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma^0{}_{bc}\, u^b u^c = 0 \tag{4.2}$$

pero de todas las $\Gamma^0{}_{bc}$ de Robertson-Walker, sólo son no nulas $\Gamma^0{}_{\alpha\beta} = (\dot{R}/R)h_{\alpha\beta}$; Por tanto la ecuación de la geodésica resulta

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{R}}{R}\,\vec{u}^2 = 0$$

donde un punto denotará derivación respecto de la coordenada temporal t. Como $u^0 du^0 = u\, du$, (denotamos como u al módulo de $\vec{u}$) obtenemos de la ecuación anterior

$$\frac{1}{u^0}\frac{du}{ds} + \frac{\dot{R}}{R}u = 0$$

Puesto que $u^0 \equiv dt/ds$, esta ecuación es $\dot{u}/u = -\dot{R}/R$ cuya solución es $u \propto R^{-1}$. Como $p^a = mu^a$, este resultado muestra que la magnitud del tri-momentum de partículas libres disminuye con la expansión del universo, es decir, sufre un corrimiento al rojo como R^{-1}.

Comentarios

- La discusión anterior es válida también para partículas sin masa (pensemos en fotones), la derivación supone sólo un cambio del parámetro afín porque para fotones $ds^2 = 0$.

- En términos de la velocidad ordinaria v^α, con magnitud v, se cumple que

$$u = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \propto R(t)^{-1} \tag{4.3}$$

Consideremos una partícula no relativista en dos instantes, t_1 y t_0 $(t_0 \gg t_1)$. Es claro que

$$v_0 = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} v_1 \tag{4.4}$$

y por consiguiente la propia expansión del universo hace que las velocidades peculiares desaparezcan y que las partículas tiendan al reposo respecto del sistema comóvil.

4.1 Propagación de la Luz

Consideremos la propagación de luz desde una galaxia hasta nosotros. Por homogeneidad podemos suponer que estamos en el origen del sistema de coordenadas y que recibimos la luz en el instante t_0. Supondremos que la cresta de la onda de luz fue emitida en el instante t_1 desde una galaxia localizada en r_1. Sin pérdida de generalidad podemos suponer por isotropía que la geodésica es radial, es decir, $d\theta = d\phi = 0$. La propagación de la luz es a través de geodésicas nulas del espaciotiempo, $ds^2 = 0$, con lo que de la ecuación 3.4 obtenemos,

$$\frac{dt}{R(t)} = \pm \frac{dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.5}$$

donde los signos + y − corresponden a luz que se aleja del origen y luz que viaja hacia él respectivamente. Integrando,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = -\int_{r_1}^{0} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}} \equiv f(r_1) \tag{4.6}$$

Imaginemos que la siguiente onda se emite en el instante $t_1 + dt_1$ y es recibida en el instante $t_0 + dt_0$. De la ecuación anterior es claro que

$$\int_{t_1 + dt_1}^{t_0 + dt_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{4.7}$$

porque ambas integrales son iguales a $f(r_1)$. Si suponemos que dt_1 y dt_0 son pequeños comparados con la escala de tiempo de la expansión, podemos obtener de 4.7 que

$$\frac{dt_0}{R(t_0)} = \frac{dt_1}{R(t_1)}$$

Puesto que dt_1 (dt_0) es el intervalo de tiempo propio para la emisión (recepción) de dos ondas consecutivas, la longitud de onda en los instantes de emisión y recepción cumple que $\lambda_1 = cdt_1$ y $\lambda_0 = cdt_0$, y por tanto

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \tag{4.8}$$

Como era de esperarse, las longitudes de onda están escaladas por el factor $R(t)$. Los astrónomos suelen definir el corrimiento al rojo $z \equiv (\lambda_0 - \lambda_1)/\lambda_1$ que representa el cambio fraccional de la longitud de onda. En términos de z la ecuación anterior es

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \tag{4.9}$$

Es apreciable que z es una cantidad muy importante en cosmología observacional. Por ejemplo, se han observado quasares con $z \simeq 4$; de modo que esa luz que hoy recibimos fue emitida cuando el factor de escala era la quinta parte de lo que es hoy. La evidencia más directa que tenemos de la expansión del universo viene por supuesto de que el corrimiento z es hacia el rojo, es decir z positivos y por consiguiente $R(t_0)$ es mayor que $R(t_1)$.

4.2 Tópicos en Cinemática de la Métrica de Robertson-Walker.

Hemos visto como la suposición de homogeneidad e isometría han permitido reducir las funciones métricas g_{ab} al conocimiento del factor de escala $R(t)$. Antes de considerar cómo evoluciona $R(t)$ usando las ecuaciones de campo de Einstein analizaremos más a fondo la cinemática de la métrica y cómo se vincula con las observaciones.

El Tensor Proyección

La métrica tridimensional de la hipersuperficie normal a la cuadrivelocidad u^a de un observador está dada por

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \tag{4.10}$$

y por consiguiente el "tensor de proyección" en el espacio en reposo de ese observador es

$$h_a{}^b = \delta_a{}^b + u_a u^b \tag{4.11}$$

Note que h_{ab} es la métrica tridimensional, escrita como un objeto cuadridimensional y satisface las propiedades:

$$h_{ab}u^b = 0 \ ; \ \ h_a{}^b h_b{}^c = \delta_a{}^c ; \ \ h_a^a = 3$$

En términos de h_{ab}, la métrica del espaciotiempo es:

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b - (u_a dx^a)^2 \tag{4.12}$$

de modo que la separación espacial entre dos eventos está dada por $\left(h_{ab}dx^a dx^b\right)^{1/2}$ y la temporal por $-(u_a dx^a)$. Por supuesto, para un observador fundamental (que usa el sistema co-móvil y $u^0 = 1$ y $u^\alpha = 0$),obtenemos que $h^{0a} = 0$, la distancia espacial está dada por la ecuación 3.38 y la coordenada temporal es el tiempo propio entre los dos eventos.

Descomposición de la Derivada Covariante de la Cuadrivelocidad

Es útil descomponer a $u_{a;b}$ de la siguiente manera:

$$u_{a;b} \equiv \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} - a_a u_b \tag{4.13}$$

donde cada una de las partes admite una interpretación sencilla:

a.- La aceleración es $a_a \equiv u^b \nabla_b u_a = u_{a;b}u^b$. Naturalmente es un vector tipo espacio porque $a_a u^a = 0$. Puede verificarse que para la métrica de Robertson-Walker, $a_a = 0$. El vector a_a mide cuánto se separan las curvas integrales de u^a, de las curvas geodésicas.

b.- La expansión $\Theta \equiv \nabla_a u^a = u^a_{;a}$ mide cómo se expanden las líneas de mundo del campo vectorial u^a. Puede verse fácilmente que en un universo de Robertson-Walker,

$$\Theta = \frac{3\dot{R}(t)}{R(t)} \equiv 3H(t) \tag{4.14}$$

donde hemos definido el parámetro de Hubble $H(t) \equiv \dfrac{\dot{R}}{R}$.

c.- La 2-forma "vorticidad"del campo u^a, es la parte antisimétrica dada por

$$\omega_{ab} \equiv \frac{1}{2}\left(h^c{}_b u_{a;c} - h^c{}_a u_{b;c}\right) \tag{4.15}$$

El tensor de vorticidad se asocia con la rotación del fluido con cuadrivelocidad u^a. Observe que $\omega_{ab}u^b \equiv 0$. Esto quiere decir que ω_{ab} sólo tiene componentes espaciales. A partir del tensor vorticidad, podemos definir el vector vorticidad ω^a:

$$\omega^a \equiv \frac{1}{2}\eta^{abcd}\omega_{cd}u_d \tag{4.16}$$

donde $\eta^{abcd} = \sqrt{-g}\epsilon^{abcd}$ y ϵ es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Note que $\omega^a u_a \equiv 0$. Las tres componentes espaciales de ω^a son las componentes de la velocidad angular usual. También $\omega^{ab}\omega_b = 0$. Finalmente la rotación escalar es:

$$\omega \equiv (\omega^a\omega_a)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\omega^{ab}\omega_{ab}\right)^{1/2} \tag{4.17}$$

El lector podrá verificar que si la rotación es cero, el vector vorticidad y el tensor vorticidad son cero y viceversa.
Naturalmente, para la métrica de Robertson-Walker es idénticamente cero. Finalmente, el tensor σ_{ab} definido como

$$\sigma_{ab} \equiv \frac{1}{2}\left(h^c_b u_{a;c} + h^c_a u_{b;a}\right) - \frac{1}{3}\Theta h_{ab} \tag{4.18}$$

se asocia a la deformación del flujo de u^a, manteniendo constante el volumen, y sin rotar. La deformación escalar se define como

$$\sigma \equiv \left(\frac{1}{2}\sigma^{ab}\sigma_{ab}\right)^{1/2} \tag{4.19}$$

y nuevamente, para la métrica de Robertson-Walker σ_{ab} es nulo.

4.3 Relación Distancia Vs. Corrimiento al Rojo

Una de las maneras de ganar información acerca del factor de escala es a través de dos parámetros observacionales: el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración, dados por

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{t_0} \tag{4.20}$$

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}\right)_{t_0} \tag{4.21}$$

En términos de estos parámetros podemos expresar el factor de escala como una serie de potencias de $t - t_0$,

$$R(t) = R(t_0)\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 {H_0}^2 (t - t_0) + ...\right] \tag{4.22}$$

Necesitamos ahora relacionar la distancia observada de objetos luminosos con el corrimiento al rojo. Una de las maneras de definir "distancias" en cosmología es comparando su luminosidad absoluta (supuesta conocida) con la luminosidad aparente que observamos. En la práctica las imprecisiones en el conocimiento cierto de las luminosidades absolutas, es decir la falta absoluta de una "escala de distancias cósmicas" hace que los resultados no sean demasiado confiables.

Supongamos que una galaxia tiene luminosidad absoluta L; (es decir, la energía total radiada por la galaxia por unidad de tiempo y medida y el sistema en reposo es L). Si un observador detecta un flujo de energía F (energía por unidad de tiempo por unidad de área del detector), entonces definimos la "distancia de luminosidad" d_L entre la galaxia y el observador, como

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4\pi F} \tag{4.23}$$

En universo en expansión d_L no corresponde a la distancia en el momento de la emisión t_1, pero tampoco en el momento de la detección. Supongamos que una fuente con coordenada radial $r = r_1$ emite en t_1 una señal y el detector con coordenada radial $r = 0$ detecta la señal en $t = t_0$, entonces la conservación de la energía requiere que el flujo detectado sea

$$F = \frac{L}{4\pi R^2(t_0)\, {r_1}^2 (1+z)^2} \tag{4.24}$$

En efecto, en el instante t_0 de la detección la fracción del área del detector dA al área de la esfera con centro en la fuente es

$$\frac{dA}{4\pi R^2(t_0)\, {r_1}^2}$$

. Además hay un factor de reducción de la energía de cada fotón, dado por $(1+z)$, y otro factor igual, que da cuenta de que el intervalo de recepción de los fotones ha aumentado. Comparando 4.23 con 4.24 obtenemos

$$d_L = R(t_0)\, r_1 (1+z) \tag{4.25}$$

La idea es expresar d_L en términos del corrimiento z para lo cual necesitamos una expresión para r_1 en términos de z. Como la luz partió de $r = r_1$ en el instante t_1 y llegó a $r = 0$ en el instante

$t = t_0$ se cumple que

$$\int_0^{r_1} \frac{d_r}{\sqrt{1 - kr_2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{4.26}$$

La integral de la izquierda 4.22, manteniendo r_1 hasta primer orden, es igual a r_1. La integral de la derecha puede evaluarse usando la expresión 4.22. El resultado es:

$$r_1 = \frac{1}{R(t_0)} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + ... \right] \tag{4.27}$$

Por otra parte como $(1 + z) = \dfrac{R(t_0)}{R(t)}$, usando se obtiene

$$z = H_0 (t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) {H_0}^2 (t_0 - t)^2 + ..$$

despejando de aquí $(t_0 - t)$. e insertando el resultado en 4.27 obtenemos

$$r_1 = \frac{1}{R(t_0) H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 ... \right] \tag{4.28}$$

Finalmente, recurriendo a la expresión para d_L, ecuación 4.25

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + ... \tag{4.29}$$

Esta relación permite comparar la distancia de luminosidad con el corrimiento al rojo. En principio la curva observacional permite determinar los valores de H_0 y q_0 pero debemos tener presente que:

- el resultado es válido para z pequeños $(z \sim 1)$
- el método se apoya fuertemente en el conocimiento de la luminosidad absoluta de algunos objetos astrofísicos, es decir de "bujías estándares", y esto supone una incertidumbre en los resultados.