Capítulo

3

La Geometría del Universo

Una de las preguntas cruciales que formula la cosmología relativista es ¿cuál solución de las ecuaciones de Einstein es relevante para la descripción de nuestro universo o al menos de un modelo idealizado de nuestro universo? Para responder esta pregunta requerimos de la información suministrada por las observaciones, y aún así, la limitación que impone conocer el universo únicamente sobre una parte de nuestro cono de luz pasado, obliga a adoptar nuevas suposiciones.

3.1 Homogeneidad, Isotropía y el Principio Cosmológico

Isotropía
Posiblemente la observación más importante en este contexto es que el universo luce isótropo alrededor de nosotros, es decir, que el universo luce estadísticamente igual en cualquier dirección del cielo en la que hagamos observaciones y cualquier diferencia que privilegie una dirección de otras se deberá a una irregularidad local sin demasiada importancia en escalas cosmológicas. La isotropía del universo alrededor de nuestra galaxia goza de la evidencia empírica: las observaciones en galaxias visibles ópticamente no son nada precisas pero sugieren una distribución isótropa al menos en un 30% y este valor se reduce al 5% al considerar radiogalaxias. Igualmente la observación de rayos X provenientes de fuentes puntuales revela una isotropía del 5%. Pero la mejor evidencia de la isotropía del universo proviene de la radiación de microondas que plena el universo con una temperatura de $2,7K$ y que se interpreta como un vestigio de una fase caliente del universo. Los resultados del COBE muestran una anisotropía de la radiación de fondo de sólo $\Delta T/T \simeq 1,1 \times 10^{-5}$.
Homogeneidad
Si el universo es isótropo alrededor nuestro cabe la posibilidad de que nuestra galaxia sea singular, que seamos observadores atípicos y privilegiados y que el universo luzca anisótropo desde la perspectiva de otras galaxias. Esta posibilidad contraviene la tendencia progresivamente antigeocéntrica que asociamos con el nombre de Copérnico. Es posible, en otras palabras, que seamos observadores típicos, que cosmológicamente hablando nuestra galaxia sea equivalente a cualquier otra, que ningún punto del espacio sea privilegiado respecto de otros y que por tanto el universo sea homogéneo. ¿Cuál es la base observacional de la homogeneidad del universo? De hecho mucho más precaria que la de la isotropía. Podemos mirar en muchas direcciones a nuestro alrededor, pero no podemos trasladarnos a otros puntos cosmológicamente alejados de nuestra línea de mundo. El contaje de fuentes en volúmenes alejados de nuestra galaxia requiere de la geometría que intentamos conocer, además de involucrar efectos evolucionarios no bien comprendidos. De todos modos

se estima que si se elige al azar una esfera de radio R y se mide la masa M que contiene, entonces la variación rms, $\delta M/M$ decrece a medida que R aumenta. Promediado sobre escalas del orden de la distancia de Hubble, $4.000 Mpc$ (12×10^9 años-luz), la fluctuación relativa es $\delta M/M < 10^{-4}$. Y es del orden de 1 cuando la distancia sobre la que se promedia se reduce al uno por ciento de la escala de Hubble. Por otra parte, una inhomogeneidad superior al 10% sería incompatible con la isotropía observada de la radiación de fondo. La construcción de mapas tridimensionales de la distribución de miles de galaxias basándose en análisis del corrimiento al rojo permite concluir que la fluctuación rms del número de galaxias δN_G se vuelve pequeña al promediar sobre escalas grandes; por ejemplo, $\delta N_G/N_G \simeq 0,2$ sobre volúmenes cúbicos de $60 Mpc$. Sin embargo, se han conseguido estructuras del orden de $100 Mpc$; de modo que en las escalas en las que podemos verificar sin ambigüedad la homogeneidad, el universo es claramente no homogéneo y en las escalas a partir de las cuales creemos que el universo es homogéneo, la verificación no es contundente. La suposición de que somos observadores típicos, y por tanto vale el principio copernicano permitiría por si sólo modelos de universos espacialmente inhomogéneos, con una estructura fractal, autosimilar en todas las escalas, o bien homogéneo con una expansión anisótropa, diferente en diferentes direcciones. Pero cuando la extrapolación de que no ocupamos una posición privilegiada se combina con la isotropía que observamos alrededor nuestro, y postulamos por tanto isotropía alrededor de cualquier punto, el principio se vuelve poderoso porque implica homogeneidad estricta. Tal punto de vista es dignificado con el status de Principio Cosmológico y forma la base de la cosmología estándar. Aceptarlo significa aceptar el prejuicio de que nuestra localización en el universo no puede distinguirse de cualquier otra localización, pero permite la construcción de modelos simples y con un grado muy razonable de acuerdo con las observaciones. A su vez estos modelos pueden servir de base a modelos más realistas, con leves inhomogeneidades o anisotropías.

3.2 Simetría y Geometría

En esta sección veremos una de las maneras de formular en términos matemáticos las nociones de homogeneidad e isotropía, y de cómo la aceptación del principio cosmológico se refleja en la estructura del espaciotiempo. Este punto es de una importancia tan grande que se justifica analizarlo de varias maneras. El resultado más importante al que llegaremos es que las hipótesis de simetría aceptadas conducen de manera única a las métricas de Robertson-Walker.

Supondremos que el espaciotiempo puede ser rebanado en una serie de hipersuperficies tridimensionales, $t = cte.$ cada una de las cuales representa hablando ligeramente, el espacio ordinario en el instante t. Cada una de estas hipersuperficies es isótropa y homogénea. Sobre ellas adoptaremos un sistema de coordenadas comóviles, es decir, la posición de una galaxia típica se especifica con un conjunto de coordenadas fijas x^α ($\alpha = 1, 2, 3$). La coordenada temporal t es el tiempo propio medido por esa galaxia. Así, el elemento de línea sobre cada hipersuperficie es $d\sigma^2 = f_{\alpha\beta}(t) dx^\alpha dx^\beta$. Como la expansión es isótropa entonces $f_{\alpha\beta}(t) = R^2(t) h_{\alpha\beta}$ donde $h_{\alpha\beta}$ es independiente de t.

El elemento de línea del espaciotiempo completo es

$$ds^2 = -dt^2 + 2g_{0\alpha} dt dx^\alpha + R^2(t) h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Es fácil ver que los elementos $g_{0\alpha}$ de la métrica son nulos. En efecto, si queremos que la definición de simultaneidad dada por $t = cte$ y por el sistema de coordenadas de la galaxia, coincidan, entonces el vector $\mathbf{e}_0$ tangente a la línea de mundo de la galaxia y los vectores $\mathbf{e}_\alpha$ tangentes a la hipersuperficie, deben ser ortogonales y por tanto $g_{0\alpha} = \mathbf{e}_0.\mathbf{e}_\alpha = 0$ y el elemento de línea queda

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{3.1}$$

Veamos ahora qué forma tiene $h_{\alpha\beta}$. Como $h_{\alpha\beta}$ es la métrica de una hipersuperficie isótropa alrededor de cualquier punto, es en particular esféricamente simétrica alrededor del origen y por tanto podemos elegir coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) tales que

$$dl^2 \equiv h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \exp(2\lambda(r))dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{3.2}$$

Es sencillo calcular la curvatura escalar R correspondiente a esta métrica. El resultado es

$$R = \frac{3}{2r^3}\left[r^2(1 - \exp(-2\lambda))\right]' \tag{3.3}$$

donde $(')$ denota derivada respecto de r. Recurramos ahora al argumento de la homogeneidad. Si las hipersuperficies son homogéneas, la curvatura escalar R no puede depender del punto, y es por tanto una constante que llamamos por conveniencia $6k$. Podemos integrar la ecuación resultante y obtener

$$\exp(2\lambda) = \frac{1}{1 - kr^2 - \dfrac{A}{r}}$$

donde A es una constante de integración. Puesto que el origen es un punto regular, la existencia de un plano tangente local requiere que $g_{rr} = 1$ para $r \to 0$ y por tanto $A = 0$. La métrica resultante para el espaciotiempo completo es entonces

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{3.4}$$

Esta es la famosa métrica de Robertson-Walker. Antes de estudiar las propiedades generales de la métrica de Robertson-Walker, vale la pena detenerse en el tratamiento más riguroso y elegante de las simetrías en relatividad general, usando vectores de Killing.

3.3 La Derivada de Lie

De la discusión precedente es natural que debemos contar con una teoría matemática que nos permite describir transformaciones de simetría. Al intentar hacerlo en una variedad riemanniana, que *ab initio* supone la libre utilización de cualquier sistema de coordenadas, confrontamos el siguiente problema: ¿no puede un sistema de coordenadas esconder una simetría que en otras coordenadas sería obvia? Por ejemplo, en dos dimensiones consideramos la métrica $ds^2 = dx^2 + \dfrac{dz^2}{z}$; y nos preguntamos, ¿es el plano descrito por esa métrica homogéneo? es decir, las traslaciones ¿afectan o no a la distancia entre dos puntos? A primera vista pareciera que no, pero una mirada más cercana nos convence de que luego de considerar el cambio de coordenada $z \to y : y = 2\sqrt{z}$ nos lleva la métrica a la forma euclideana $ds^2 = dx^2 + dy^2$, que es traslacionalmente invariante. Entonces, se impone una descripción de las transformaciones y simetrías de una variedad, que sea covariante, y por tanto válida en todo sistema de coordenadas. Nos restringiremos a las transformaciones infinitesimales, entendiendo que una transformación finita puede obtenerse por aplicación reiterada de la infinitesimal, o como suelen decir los matemáticos, por exponenciación. Consideremos entonces una transformación que lleva un punto p con coordenadas locales x^a_p o otro punto q con coordenadas $\bar{x}^a_q$, en el entorno de p. Como los puntos están "cercanos", entonces:

$$\bar{x}^a_q = x^a_p + \epsilon\xi^a(x_p) \tag{3.5}$$

Por supuesto ξ^a es un campo vectorial, de modo que todo punto de la variedad sea "arrastrado" en la dirección local de ξ, por una cantidad ϵ a lo largo de la curva integral de ξ. La transformación 3.5, induce una transformación que lleva a todo objeto geométrico en p, por ejemplo un tensor $\mathbf{T}_p$ a su imagen en q, $\mathbf{T}^{nuevo}_q$. Comparando este objeto con el que existe en q podemos cuantificar el efecto de la transformación infinitesimal.

Definición: Definimos la *derivada de Lie* en la dirección de ξ como

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{T}_{(p)} = \lim \frac{\left[\mathbf{T}_{(p)} - \mathbf{T}^{nuevo}_{(q)}\right]}{\epsilon} \tag{3.6}$$

a.- *Campos Escalares:* Supongamos que el objeto geométrico es un campo escalar. Entonces,

$$\begin{aligned} \phi_{(q)} &= \phi_{(p)} + (x^a_{(q)} - x^a_{(p)})\phi_{,a}(p.) + ... \\ &= \phi_{(p)} - \epsilon\xi^a\phi_{,a} \end{aligned}$$

Pero además, por ser escalar $\phi^{nuevo}_{(q)} = \phi_{(q)}$, luego

$$\mathcal{L}_\xi\phi = \lim\left[\phi_{(p)} - \phi_{(p)} + \epsilon\xi^a\phi_{,a}\right]$$

y finalmente

$$\mathcal{L}_\xi\phi = \phi_{,a}\xi^a \tag{3.7}$$

b.- *Campos Vectoriales*: Supongamos que V_a son los componentes covariantes de un vector. Entonces,

$$V^{nuevo}_a(q) = \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} V_b(q) \tag{3.8}$$

de la ecuación 3.5 obtenemos

$$\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} = \delta^b_a - \epsilon\xi^b_{,a} \tag{3.9}$$

y por otra parte,

$$V_a(q) = V_a(p) - \epsilon V_{a,b}\xi^b \tag{3.10}$$

De modo que de la definición de derivada de Lie para un vector resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi V_a &= \lim\left[\frac{V_a(p) - V^{nuevo}_a(q)}{\epsilon}\right] \\ &= \lim\left[\frac{V_a(p) - (\delta^b_a - \epsilon\xi^b_{,a})(V_b(p.) - A_{a,b}\epsilon\xi^b)}{\epsilon}\right] \end{aligned}$$

$$= V_{a,b}\xi^b + V_b\xi^b_{,a} \tag{3.11}$$

c.- *Campos Tensoriales*: Procediendo de manera similar al caso anterior, es sencillo demostrar que para las componentes covariantes de un tensor de segundo orden, se cumple que

$$\mathcal{L}_\xi T_{ab} = T_{ab,c}\xi^c + T_{ac}\xi^c_{,b} + T_{cb}\xi^c_{,a} \tag{3.12}$$

Un tensor cualquiera T se dice *invariante en forma* o *simétrico* bajo la transformación generada por ξ, si $\mathcal{L}_\xi \mathbf{T} = 0$. En el caso particular en que el tensor sea el tensor métrico de la variedad, entonces la transformación se denomina una *isometría*, es decir, la transformación infinitesimal $\bar{x}^a = x^a + \epsilon\xi^a$ es una isometría si

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0 \tag{3.13}$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de Killing*.
Comentarios

- Del hecho de la derivada de Lie satisface la regla de Leibniz: $\mathcal{L}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\ \mathcal{L}(\mathbf{B}) + \mathbf{B}\ \mathcal{L}(\mathbf{A})$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son tensores cualesquiera, pueden obtenerse las expresiones para tensores de otro tipo.

- Por ejemplo, como $V_aV^a =$ un escalar, entonces $\mathcal{L}_\xi(V_aV^a) = (V^aV_a)_{,c}\xi^c$, pero $\mathcal{L}_\xi(V_aV^a) = V^a\ \mathcal{L}_\xi V_a + V_a\ \mathcal{L}_\xi V^a$. Igualando y despejando $\mathcal{L}_\xi V^a$, obtenemos

$$\mathcal{L}_\xi V^a = V^a_{,b}\xi^b - V^b\xi^a_{,b} \tag{3.14}$$

- Es fácil ver que en las expansiones obtenidas para las derivadas de Lie podemos sustituir “coma” por “punto y coma”, es decir, derivadas por derivadas covariantes sin que la expresión se altere.

- La ecuación de Killing, 3.13, se le suele escribir como

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0 \tag{3.15}$$

En efecto, sustituyendo derivadas por derivadas covariantes en la expresión 3.13, obtenemos

$$g_{ab;c}\xi^c + g_{ac}\xi^c_{;b} + g_{cb}\xi^c_{;a} = 0$$

Como la métrica es covariantemente constante, obtenemos el resultado deseado.

- La derivación de Lie y el proceso de contracción conmutan.

- A pesar de que hemos referido las expresiones a sistema de coordenadas, ellas admiten ser formuladas como relaciones entre objetos geométricos; por ejemplo, la ecuación 3.11 se reescribiría en notación libre de índices, como

$$\mathcal{L}_\xi\ \mathbf{V} = [\ \mathbf{V}, \xi] \tag{3.16}$$

donde [,] es el conmutador de los dos campos vectoriales.

- El operador $\mathcal{L}$ satisface

$$\mathcal{L}_{a\xi+b\eta} = a\mathcal{L}_\xi + b\mathcal{L}_\eta \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_{[\xi,\eta]} = \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta\mathcal{L}_\xi \tag{3.18}$$

- Supongamos que ξ es una simetría de un objeto geométrico $\mathbf{T}$. Entonces, si uno de los ejes del sistema de coordenadas, digamos x^0, se elige a lo largo de ξ, es decir $\xi^a = (\partial_0)^a = \delta_0^a$, resulta que los componentes T_{ab} son independientes de x^0. En efecto,

$$\mathcal{L}_\xi T_{ab} = T_{ab,c}\xi^c + T_{ac}\xi^c_{,b} + T_{cb}\xi^c_{,a} = 0$$

  como $\xi^c = \delta_0^c$, resulta $T_{ab,0} = 0$. En otras palabras, el objeto $\mathbf{T}$ no cambiará en forma ante una traslación a lo largo del eje x^0. Tal sistema de coordenadas se llama *sistema de coordenadas adaptado* a la simetría de la variedad.

- La existencia de vectores de Killing está asociado a simetrías y por tanto a leyes de conservación. Si ξ es un Killing y $\mathbf{u}$ el vector tangente a una geodésica de la variedad, entonces $\xi.\mathbf{u} \equiv \xi_a u^a$ es constante sobre la geodésica. En efecto:

$$\frac{d}{ds}(\xi_a u^a) \equiv u^b\nabla_b(\xi_a u^a) = \xi_a u^b \nabla_b u^a + u^a u^b \nabla_b \xi_a = \frac{u^a u^b}{2}\nabla_{(b}\xi_{a)} = 0$$

3.4 Campos de Killing y el Tensor de Riemann

El siguiente resultado que no demostraremos es sumamente importante: Si ξ es un vector de Killing, entonces se cumple

$$\xi_{c;ba} = R^d{}_{abc}\xi_d \tag{3.19}$$

donde $R^d{}_{abc}$ son las componentes del tensor de Riemann. La demostración se basa en la ecuación 3.15, en la definición del tensor de Riemann en términos de la diferencia de las segundas derivadas de ξ_c y de las identidades de Bianchi. Supongamos que conocemos los valores de ξ_a y sus primeras derivadas en un punto de la variedad. La ecuación 3.19 permite conocer sus derivadas segundas y de mayor orden (derivando 3.19) y por tanto extender ξ a toda la variedad. En otras palabras, un campo de Killing está determinado sólo por los valores de ξ_a y de $\xi_{a,b}$ en un punto. El número máximo de vectores de Killing permitido en una variedad está dado por el número de asignaciones independientes que podamos hacer de ξ_a y de $\xi_{a,b}$. En n dimensiones hay n valores para ξ_a y $\frac{1}{2}n(n-1)$ para $\xi_{a,b}$ (el mismo número de componentes independientes de una matriz antisimétrica). Por consiguiente, el número máximo de vectores de Killing en una variedad n-dimensional es $n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Una variedad con el número máximo permitido de Killings se denomina una variedad máximamente simétrica. Por ejemplo, el espacio de Minkowski de la relatividad especial ($n = 4$) posee 10 vectores de Killing: 4 traslaciones espaciotemporales, 3 rotaciones espaciales y 3 boots de Lorentz; por tanto el espacio de Minkowski es máximamente simétrico. Demos ahora unas definiciones pertinentes al principio cosmológico.

Una variedad es *homogénea* si existe una isometría que lleve un punto cualquiera a cualquier otro punto de su entorno. Dicho de otro modo, si el punto p tiene coordenadas x^a y el punto q tiene coordenadas $x^{a\prime} = x^a + \xi^a$, entonces ξ es un Killing para cualesquiera p y q.
Una variedad es *isótropa* alrededor del punto p de coordenadas x^a si existe una isometría que deje fijo a p (es decir que $\xi(p) \equiv \xi^b(x^a) = 0$) y para la cual las primeras derivadas tomen cualquier valor sujetas por supuesto a que $\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0$.
En tres dimensiones hay tres vectores de Killing asociados con homogeneidad y tres asociados con isotropía; es decir seis Killings que es el número máximo permitido para $n = 3$, por tanto, cuando el principio cosmológico requiere que en cada instante nuestro universo luzca homogéneo e isótropo, realmente está exigiendo que la variedad que modela nuestro universo admita una subvariedad de dimensión $n = 3$ que sea máximamente simétrica.
Demostremos que si una variedad de dimensión n es máximamente simétrica, se cumplen estas importantes relaciones:

- La curvatura escalar es constante,

$$R = kn(n-1) \tag{3.20}$$

- Ricci es proporcional al tensor métrico,

$$R_{ab} = \frac{R}{n} g_{ab} \tag{3.21}$$

- El tensor de Riemann está dado por,

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{3.22}$$

Demostración
Partamos de la conmutación de la segunda derivada covariante de un tensor T_{ab},

$$T_{ab;mn} - T_{ab;nm} = R^d{}_{amn} T_{db} + R^d{}_{bmn} T_{ad}$$

eligiendo $T_{ab} \equiv \xi_{a;b}$ obtenemos

$$\xi_{a;bmn} - \xi_{a;bnm} = R^d{}_{amn} \xi_{d;b} - R^d{}_{bmn} \xi_{d;a} \tag{3.23}$$

donde usamos la antisimetría de $\xi_{a;b}$ para cambiar el último signo. Derivando la ecuación 3.19 podemos ver luego de intercambiar los índices m y n y restar, que de estas dos últimas ecuaciones obtenemos el siguiente resultado luego de manipular algo las expresiones:

$$(R^d{}_{mba;n} - R^d{}_{nma;b})\xi_d + [R^d{}_{mba} g^k_n - R^d{}_{nba} g^k_m + R^d{}_{bmn} g^k_a - R^d{}_{amn} g^k_b]\xi_{d;k} = 0$$

En una variedad máximamente simétrica por isotropía podemos elegir vectores de Killing tal que $\xi_d = 0$ y $\xi_{d;k}$ sea una matriz antisimétrica arbitraria. Por tanto la parte antisimétrica del corchete debe anularse. Pero podemos elegir también vectores de Killing ξ arbitrarios, de modo que el paréntesis también es nulo:

$$R^d{}_{mba;n} = R^d{}_{nma;b}$$
$$R^d{}_{mba} g^k_n - R^k{}_{mba} g^d_n - R^d{}_{nba} g^k_m + R^k{}_{nba} g^d_m +$$
$$+ R^d{}_{bmn} g^k_a - R^k{}_{bmn} g^d_a - R^d{}_{amn} g^k_b + R^k{}_{amn} g^d_b = 0$$

Contrayendo los índices k, i en esta última ecuación,obtenemos

$$(n-1) R^d{}_{mba} + R_{bm} g^d_a - R_{am} g^d_b = 0 \tag{3.24}$$

donde usamos que $g^k_k = n$, que $R^d{}_{mba} + R^d{}_{bma} - R^d{}_{amb} = 0$ (identidades de Bianchi), las propiedades de simetría del tensor de Riemann y la definición del tensor de Ricci. $R_{ab} = R^k{}_{akb}$. Contrayendo ahora los índices m, b, luego de simplificar, resulta,

$$R_{ab} = \frac{R}{n} g_{ab} \tag{3.25}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación 3.24, obtenemos,

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)} [g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc]}] \tag{3.26}$$

Usemos ahora las identidades contraídas de Bianchi,

$$(R^a_b - \frac{1}{2} R g^a_b)_{;a} = 0$$

y la ecuación 3.25 para obtener

$$\left[(\frac{R}{n} - \frac{1}{2} R) g^a_b \right]_{;a} = 0$$

como la métrica es covariantemente constante, resulta que (para $n \neq 2$) $R_{,b} = 0$, es decir, la curvatura escalar es constante, resultado que usamos sin demostrar en la sección anterior. Por tanto, denotando $k \equiv \frac{R}{n(n-1)}$ en la ecuación 3.26, obtenemos finalmente la ecuación 3.22.

3.5 Tensores en un Espacio Máximamente Simétrico

Supongamos que tenemos una variedad máximamente simétrica y diversos campos tensoriales que *viven* en ella. Diremos que estos campos heredan la simetría de la variedad o que son máximamente simétricos si son invariantes bajo las isometrías de la variedad.

Campos Escalares

Si $S(x)$ es un campo escalar, y es máximamente simétrico, entonces

$$\mathcal{L}_\xi S(x) = S_{,a} \xi^a = 0$$

y como el vector de Killing es arbitrario, $S = cte.$, de modo que un campo escalar es compatible con la máxima simetría de una variedad, sólo si es constante.

Campos Vectoriales
Si un campo vectorial **k** hereda la simetría de la variedad, entonces,

$$\mathcal{L}_\xi k_a = k_{a;b}\xi^b + k_b\xi^b{}_{;a} = 0$$

como podemos elegir $\xi^b = 0$,entonces $k_b\xi^b{}_{;a} = 0$, es decir $\xi_{b;a}(k^b) = 0$, o reescribiéndolo como $\xi_{b;c}(\delta^c_a\ k^b) = 0$. Como $\xi_{b;c}$ es antisimétrico en sus índices, el paréntesis debe ser simétrico en b, c y por tanto $\delta^c_a\ k^b = \delta^b_a\ k^c$ y contrayendo a y c, obtenemos $nk^b = k^b$, es decir, que el campo vectorial **k** es nulo, no puede existir ningún campo vectorial invariante en forma en una variedad máximamente simétrica. Geométricamente esto se interpreta como que un campo vectorial señalaría una dirección privilegiada lo que es incompatible con la isotropía en cada punto de la variedad.
Campos Tensoriales
Si **T** es un campo tensorial de segundo orden máximamente simétrico, entonces

$$\mathcal{L}_\xi T_{ab} = T_{ab;c}\xi^c + T_{cb}\xi^c{}_{;a} + T_{ac}\xi^c{}_{;b} = 0 \tag{3.27}$$

como antes, elegiremos $\xi^c = 0$. Los términos restantes se pueden escribir como

$$\xi_{c;d}[\delta^d_a T^c{}_b + \delta^d_b T_a{}^c] = 0$$

y como $\xi_{c;d}$ es antisimétrico, el corchete debe ser simétrico en c, d :

$$\delta^d_a T^c{}_b + \delta^d_b T_a{}^c = \delta^c_a T^d{}_b + \delta^c_b T_a{}^d$$

contrayendo d, a y bajando el índice c

$$nT_{\ cb} + T_{bc} = T_{\ cb} + g_{bc} T_a{}^a \tag{3.28}$$

restando de esta ecuación la que se obtiene intercambiando b y c se concluye (salvo que $n = 2$) que $T_{bc} = T_{\ cb}$ es decir, el tensor es necesariamente simétrico. Insertando este resultado en 3.28 resulta que

$$T_{bc} = \Lambda g_{bc} \tag{3.29}$$

donde $\Lambda \equiv \dfrac{T^a_a}{n}$. Finalmente sustituyendo este resultado en 3.27 se concluye que $\Lambda = cte$. Por consiguiente, todo campo tensorial **T** máximamente simétrico es un múltiplo constante del tensor métrico de la variedad.

3.6 La Métrica de un Espacio Tridimensional Máximamente Simétrico

De acuerdo con el principio cosmológico las hipersuperficies tridimensionales caracterizadas por un mismo valor de la coordenada temporal, son homogéneas e isótropas y por tanto forman una variedad máximamente simétrica. Averiguaremos en esta sección qué restricciones impone la homogeneidad e isotropía a la métrica de esa trisuperficie.

Denotaremos por $h_{\alpha\beta}$ la métrica tridimensional. Como la hipersuperficie es máximamente simétrica,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = k[h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}]$$

contrayendo los índices α y γ,

$$R_{\beta\delta} = 2kh_{\beta\gamma} \tag{3.30}$$

Como la trisuperficie debe ser esféricamente simétrica, usando coordenadas de Schwarzschild, debe tener la forma estándar:

$$d\sigma^2 = h_{\alpha\beta}\ dx^\alpha dx^\beta = \exp\lambda\ dr^2\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)$$

Con esta métrica podemos calcular los símbolos de Christoffel y construir las componentes del tensor de Ricci. Las ecuaciones 3.30 no triviales son para α y β iguales a $1,1$ y $2,2$ y son

$$\begin{aligned} 2k\exp\lambda &= \frac{\lambda'}{r} \\ 2kr^2 &= 1 + \frac{1}{2}r\lambda'\exp(-\lambda) - \exp(-\lambda) \end{aligned}$$

de estas dos ecuaciones obtenemos finalmente, que $\exp(-\lambda) = 1 - kr^2$, con lo que el elemento de línea de una variedad tridimensional homogénea e isótropa resulta,

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2}\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) \tag{3.31}$$

y la curvatura escalar $R \equiv R^\alpha_\alpha$ es la constante $6k$.

3.7 Variedades con Subvariedades Máximamente Simétricas

Para la aplicación de estos conceptos al universo físico es importante insistir en que no es el espaciotiempo cuadridimensional el que es homogéneo e isótropo, sino las hipersuperficies tridimensionales $t = cte$. La pregunta que surge y que vamos a responder es qué imposiciones sobre la métrica del espaciotiempo resultan del hecho de que este contenga trisuperficies máximamente simétricas. Es obvio que si (x^0, x^α) son coordenadas locales del espaciotiempo, entonces las transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} x^{o'} &= x^o \\ \bar{x}^\alpha &= x^\alpha + \epsilon\xi^\alpha(x^0, x^\beta) \end{aligned}$$

sólo afectan a las coordenadas espaciales. Si ξ^α son vectores de Killing del subespacio $t = cte.$ entonces podemos definir $\xi^a \equiv (0, \xi^\alpha)$ que serán (seis) vectores de Killing del espaciotiempo completo. Bajo estas circunstancias se puede demostrar el siguiente resultado:

Resultado

Si el espaciotiempo posee trisuperficies máximamente simétricas con métricas dadas por la ecuación 3.31 entonces es posible escoger un sistema de coordenadas respecto del cual el elemento de línea es:

$$ds^2 = g_{00}(x^0)\ {dx_0}^2 + f(x^0)\ d\sigma^2 \tag{3.32}$$

Demostración: Como los ξ son isometrías, se cumple que

$$\mathcal{L}_\xi \ g_{ab} = 0 \tag{3.33}$$

Escribiendo esta ecuación *in extenso*, recordando que ξ^0 se anula y considerando separadamente los casos $a, b \to \alpha, \beta$ $a, b \to 0, \beta$ y $a, b \to 0, 0$ obtenemos

$$g_{\alpha\beta,\nu} \ \xi^\nu + g_{\nu\beta} \ \xi^\nu_{,\alpha} + g_{\alpha\nu} \ \xi^\nu_{,\beta} = 0 \tag{3.34}$$
$$g_{0\beta,\nu} \ \xi^\nu + g_{\nu\beta} \ \xi^\nu_{,0} + g_{0\nu} \ \xi^\nu_{,\beta} = 0 \tag{3.35}$$
$$g_{00,\nu} \ \xi^\nu + g_{\nu 0} \ \xi^\nu_{,0} + g_{0\nu} \ \xi^\nu_{,0} = 0 \tag{3.36}$$

La primera de estas ecuaciones refleja el hecho de que ξ^ν es vector de Killing del subespacio con métrica **h**. Las otras dos imponen limitaciones a la métrica del espaciotiempo. Es fácil ver que siempre podemos escoger un sistema de coordenadas en el cual $g_{0\nu} = 0$, (basta hacer una transformación de las coordenadas espaciales, $x^\alpha = x^\alpha(x^{0'}, x^{\beta'})$, y en las nuevas coordenadas primadas exigir $g_{0\nu} = 0$. De manera que estas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} g_{\nu\beta} \ \xi^\nu_{,0} &= 0 \\ g_{00,\nu} \ \xi^\nu &= 0 \end{aligned}$$

De la primera concluimos que el vector de Killing no depende de la coordenada temporal, y de la segunda, que la componente g_{00} sólo depende de x^0 y no de las coordenadas espaciales. Sólo resta por demostrar que las componentes espaciales de la métrica $g_{\alpha\beta}(t, x^\upsilon)$ dependen de t únicamente a través de un factor común $f(t)$. En secciones anteriores demostramos que si $h_{\alpha\beta}$ es la métrica máximamente simétrica, todo tensor de segundo rango será un múltiplo constante de la métrica. La idea es interpretar a $g_{\alpha\beta}(t, x^\upsilon)$ como diferentes campos tensoriales parametrizados por t, entonces es claro que

$$g_{\alpha\beta}(t, x^\upsilon) = f(t) \ h_{\alpha\beta}(x^\upsilon)$$

Reunamos ahora los resultados: hemos visto que la métrica del espaciotiempo es 3.32. Podemos definir una nueva coordenada temporal tal que $g_{00} \ dt^2 \to -dt^2$. Por otra parte es claro que reescalando la coordenada radial r en 3.31 podemos normalizar el parámetro k a los valores $k = +1, 0, -1$. Por último, para garantizar que la signatura de la métrica sea $(-, +, +, +)$, en la ecuación 3.32 forzaremos a que el factor $f(t)$ sea siempre positivo, para lo cual tomamos $f(t) \equiv R^2(t)$. El resultado final es por supuesto la métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \ d\phi^2) \right] \tag{3.37}$$

La función $R(t)$ se le conoce como factor de escala.

Resumen y Comentarios Varios

- El Principio Cosmológico sugiere que consideremos al espaciotiempo como pleno de curvas tipo tiempo, técnicamente una congruencia, que asociamos con las líneas de mundo de observadores fundamentales (galaxias, por fijar ideas) que de algún modo reflejan el movimiento a gran escala de la materia.

- El campo de cuadrivelocidades u^a tangente a esta congruencia admite una familia uniparamétrica de hipersuperficies (parametrizadas por t) ortogonal en cada punto a u^a.

- Las hipersuperficies tipo espacio son subespacios máximamente simétricos del espaciotiempo completo. La 3-métrica $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ define el elemento de línea,

$$d\sigma^2 = R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{3.38}$$

- Note lo fuerte de las suposiciones de simetría, que de los 10 elementos métricos sólo subsisten $R(t)$ y el parámetro k, que deben determinarse con las ecuaciones de Einstein y/o las observaciones.

- Puede demostrarse que las trisuperficie de homogeneidad están relacionadas conformemente entre sí.

- Una manera alternativa de escribir el elemento de línea de Robertson-Walker se obtiene introduciendo el *parámetro temporal conforme* η, definido por

$$\eta = \int \frac{dt}{R(t)}$$

  y en términos del cual la métrica de Robertson-Walker resulta

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right]$$

  Una de las ventajas de este *tiempo conforme* es que logra que en un diagrama $R-\eta$ las geodésicas radiales quedan inclinadas 45°. Note que si $k=0$, la métrica es conformemente plana de manera manifiesta. Puede demostrarse que aún cuando $k \neq 0$, el espaciotiempo de Robertson-Walker es conformemente plano, por ejemplo calculando las componentes del tensor de Weyl y ratificando que se anulan.

- Los objetos geométricos del espaciotiempo deben ser invariantes bajo las isometrías de las trisuperficies, es decir $\mathcal{L}_\xi\, T_{ab} = 0$,donde T_{ab} representa un campo físico cualquiera.

- Las coordenadas en que hemos escrito la métrica de Robertson-Walker son comóviles con la materia del universo. En otras palabras, la línea de mundo de una galaxia es $r = cte, \theta = cte, \phi = cte, t = s$. Note que la coordenada temporal coincide con el tiempo propio.

3.8 Propiedades Geométricas de la Métrica de Robertson-Walker

La geometría de las 3-superficies está definida por el elemento de línea 3.38. Su tensor de Riemann, de Ricci y la curvatura escalar están dados respectivamente por

$$
\begin{aligned}
{}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{k}{R^2(t)}(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}) \\
{}^3R_{\alpha\beta} &= \frac{2k}{R^2(t)}h_{\alpha\beta} \\
{}^3R &= \frac{6k}{R^2(t)}
\end{aligned}
$$

Note que cuando hablamos de superficies de curvatura constante en realidad queremos decir uniforme. La curvatura escalar depende por supuesto del tiempo y es positiva, negativa o nula dependiendo si $k = +1, -1, 0$ y corresponden con geometrías esféricas, hiperbólicas o euclídeas como veremos a continuación:

a.- *Caso* $k = +1$ Estamos interesados en la hipersuperficie en un instante particular, digamos t_0, denotemos al factor de escala en ese instante como R_0.

Cuando el parámetro $k = +1$, el elemento de línea es

$$d\sigma^2 = R_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} \; + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2) \right] \tag{3.39}$$

Notemos que h_{11} diverge en $r = 1$. Introduzcamos una nueva coordenada radial χ, definida como

$$r = \sin\chi$$

de tal forma que

$$dr = \cos\chi \; d\chi = (1 - r^2)^{1/2} \; d\chi$$

Entonces 3.39 resulta

$$d\sigma^2 = R_0^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2) \tag{3.40}$$

Esta métrica puede considerarse como la métrica de una trisuperficie esférica embebida en un espacio euclideano de 4 dimensiones. En efecto, si (w, x, y, z) son coordenadas euclideanas, una superficie esférica está definida por la ecuación

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$$

Introduciendo coordenadas angulares (χ, θ, ϕ) de la manera usual,

$$
\begin{aligned}
w &= R_0 \cos\chi \\
x &= R_0 \sin\chi \sin\theta \cos\phi \\
y &= R_0 \sin\chi \sin\theta \sin\phi \\
z &= R_0 \sin\chi \cos\theta
\end{aligned}
$$

el elemento de línea euclideano $d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, resulta precisamente 3.40. Note que la hipersuperficie está definida por el rango de sus coordenadas intrínsecas:

$$0 \le \chi \le \pi \qquad\qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad\qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

Para un valor constante de la coordenada χ (es decir $r = cte$) obtenemos una bi-superficie esférica parametrizada por (θ, ϕ) con métrica $da^2 = R_0^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \; d\phi^2)$, y cuya área es

$$A_\chi = \int R_0^2 \sin^2 \chi \sin \theta \; d\theta \; d\phi = 4\pi R_0^2 \sin^2 \chi$$

que permite notar que el área de estas bi-esferas es nula en el "polo norte", comienza a aumentar asumiendo su máximo valor en el ecuador, para decrecer nuevamente hacia el "polo sur". El área es menor que el valor euclideano $4\pi R_0^2$. El tri-volumen encerrado por estas bi-esferas, es

$$V = \int R_0^3 \sin^2 \chi \sin \theta \; d\theta \; d\phi \; d\chi = 2\pi^2 R_0^3 \sin^2 \chi$$

En estos espacios cualquier geodésica radial, retorna a su punto de partida. La topología correspondiente se le llama *cerrada* o *compacta,* la topología del espaciotiempo (al menos la más simple) se conoce como *cilíndrica,* por ser el producto de $\mathbf{R} \times S^3$. Como el volumen espacial es finito, el número de galaxias que tendrá un modelo de universo con $k = 1$, es necesariamente finito.
b.- Caso $k = 0$ En este caso es obvio que las superficies de homogeneidad son tri-espacios euclidianos usuales. Un cambio de coordenadas elemental lleva la métrica a la forma usual, $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. El área de las bi-esferas $r = cte.$, es $4\pi r^2$, y el volumen cubierto por el rango completo de las coordenadas, es infinito, y por eso el número de galaxias que contiene un modelo de universo con secciones espaciales euclideanas, es infinito. La topología del espaciotiempo es la topología de $\mathbf{R}^4$.
c.- Caso $k = -1$ En este caso es sugestivo introducir un nuevo marcador radial ρ definido por

$$r = \sinh \; \rho \tag{3.41}$$

que lleva la métrica de la tri-superficie a la forma

$$d\sigma^2 = R_0^2 [d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta \; d\phi^2)] \tag{3.42}$$

Esta superficie no vive en un espacio euclídeo, sino más bien en un espacio minkowskiano de métrica $d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ en el cual la tri-superficie es un hiperboloide de tres dimensiones,

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R_0^2$$

En las coordenadas intrínsecas (ρ, θ, ϕ) el área de la bi-esfera $\rho = cte.$ es

$$A_\chi = 4\pi R_0^2 \sinh^2 \rho$$

A medida que consideramos bi-esferas más y más alejadas (ρ cada vez mayor) su área aumenta sin límite. Note que el área crece con ρ más rápidamente que si la hipersupericie fuese euclideana. El volumen total de la trisuperficie es infinito, con una topología abierta, $\mathbf{R}^4$. El número de galaxias es por supuesto infinito en un modelo de universo para el que $k = -1$.
Para los tres tipos de espacios es posible definir la distancia entre dos puntos (galaxias) fijos en el sistema de coordenadas comóviles. Si a uno de los puntos le asignamos coordenadas (r_1, θ_1, ϕ_1) y al otro el origen, la *distancia propia* entre los dos puntos es

$$d_{prop}(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{g_{11}} dr = R(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \tag{3.43}$$

- Note que esta distancia propia es calculada sobre la superficie de simultaneidad de las galaxias y por tanto no es la distancia obtenida a partir del tiempo que demoró la luz en viajar de una a otra galaxia.

- La integral que aparece en la fórmula 3.43 vale

$$\left\{ \begin{array}{cc} \sin^{-1} r_1 & k=+1 \\ r_1 & k=0 \\ \sinh^{-1} r_1 & k=-1 \end{array} \right\}$$

- Existen varias definiciones de distancia en cosmología, algunas más cercanas a la astronomía observacional, basadas por ejemplo en la luminosidad aparente de un sistema, o en distancias angulares. Para distancias "pequeñas" todas coinciden.