

Parte II

Campos Gravitacionales en la Materia: La otra cara de la moneda

L. Herrera

Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
U. C. V., Caracas, Venezuela
Centro de Astrofísica Teórica (C.A.T.),
Mérida, Venezuela.
Área de Física Teórica, Facultad de Ciencias,
Universidad de Salamanca,
37008 Salamanca, España

e-mail: lherrera@conicit.ve

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Alicia Di Prisco por su ayuda en la elaboración de estas notas y por la transcripción íntegra del texto en \LaTeX .

A José Luis Hernández Pastora por su revisión de buena parte del texto, y a Chus Martín por su hospitalidad en la Universidad de Salamanca, donde se escribieron estas notas.

‘‘Todavía no dispongo de dato alguno. Es un error capital teorizar antes de tener datos porque sin darse cuenta uno comienza a retorcer los hechos para que se amolden a las teorías, en vez de ser éstas las que se ajusten a los hechos’’.

Sherlock Holmes en *Un escándalo en Bohemia*.

‘‘There is something fascinating about science. One gets such a wholesale returns of conjecture out of such a trifling investment of fact’’.

Mark Twain.

Introducción

La relatividad general es, entre todas las teorías propuestas para describir la interacción gravitacional, la que goza de más aceptación en la comunidad científica.

Las ecuaciones de Einstein, que forman la base de dicha teoría, relacionan la geometría del espacio tiempo (tensor de Einstein) con la distribución de materia (tensor de energía - impulso).

Para resolver este sistema de ecuaciones al interior de una distribución material es preciso proveer, además de condiciones de frontera y/o iniciales, información adicional sobre la física local (e.g. ecuaciones de estado).

Cuando las ecuaciones de Einstein se resuelven en el vacío, la distribución de materia, que es la fuente del campo gravitacional, es descrita como una singularidad. Obviando de esta manera cualquier consideración sobre las propiedades físicas (locales) de la misma.

En las últimas décadas la mayoría de los esfuerzos invertidos en el estudio de la gravitación se han centrado en la resolución de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Los aspectos geométricos y/o topológicos del espacio tiempo, en estos estudios, tienden a prevalecer sobre la eventual relevancia de la física local.

En el mejor de los casos, sólo condiciones muy generales (y

algunas veces de dudosa justificación física) sobre las propiedades de la materia son tomadas en consideración.

Al origen de esta tendencia se encuentra la premisa de que la fuerza gravitatoria, por su carácter universal, se verá siempre favorecida por la presencia de cualquier forma de materia. De tal manera, que a partir de ciertos valores críticos, dicha fuerza prevalecerá sobre cualquier otra interacción independientemente de las especificidades de la física local.

Es el propósito de estas notas demostrar que dicha premisa es, al menos en algunos casos, falsa. Con ello pretendemos llamar la atención sobre la importancia que tiene el conocimiento de la física local en el estudio de sistemas autogravitantes.

Como veremos más adelante, existe un buen número de escenarios en los cuales las diferentes variables que caracterizan la distribución material juegan un papel determinante en la evolución del objeto autogravitante, incluso en presencia de campos gravitacionales muy intensos.

En otras palabras, existe una gran variedad de situaciones en las cuales el objeto autogravitante evolucionará de una forma u otra (completamente diferente) dependiendo de manera fundamental de especificidades de la física local, incluso cuando los efectos relativistas no sean despreciables. En algunos casos dichos efectos podrán actuar sinérgicamente con los aspectos locales, potenciando estos últimos.

La estructura de estas notas es la siguiente.

En el próximo capítulo presentaremos las ecuaciones de Einstein para un fluido anisótropo, esféricamente simétrico, que disipa energía a través de un flujo radial de calor. Se discutirán las condiciones de acoplamiento y se calcularán variables dinámicas de interés como la cuadriaceleración, la expansión y el tensor de deformación (shear).

El capítulo 10 está dedicado al concepto de fractura y su relación con la anisotropía local.

El papel de la anisotropía será tratado también en el capítulo 11 donde se pondrá en evidencia su relación con la masa activa gravitacional (masa de Tolman-Whittaker). Se compararán los conceptos de masa de Tolman-Whittaker y función masa y se establecerán relaciones entre estos conceptos y el tensor de Weyl.

Los efectos de la conducción térmica, en la aproximación de evolución lenta, sobre la dinámica de sistemas autogravitantes se analizarán en el capítulo 12.

En el capítulo 13 se presentará una ecuación relativista de transporte (Cattaneo) y se discutirán algunas consecuencias derivadas de su uso.

Los efectos de la conducción térmica sin la aproximación de evolución lenta (fuera del equilibrio dinámico), se estudian en el capítulo 14.

Finalmente se incluyen algunas conclusiones y comentarios generales en el capítulo 15.

Ecuaciones de campo y condiciones de acoplamiento. Ecuaciones dinámicas y tensor de deformación

9.1 Ecuaciones de campo

La disipación debida a la emisión de partículas sin masa (fotones y/o neutrinos) es un proceso típico en la evolución de estrellas masivas.

De hecho, el único mecanismo plausible para disipar el grueso de la energía de ligadura gravitacional en el colapso de una estrella evolucionando a una estrella de neutrones parece ser la emisión de neutrinos [1].

Usualmente se supone que el flujo de energía de radiación (así como el flujo de conducción térmica) es proporcional al gradiente de temperatura. Esta suposición es, en general, bastante apropiada, ya que el camino libre medio de las partículas responsables de la propagación de energía en el interior de las estrellas es, normalmente, muy pequeño comparado con las dimensiones típicas del objeto auto-gravitante.

Así por ejemplo, para una estrella en la secuencia principal, como el sol, el camino libre medio de los fotones en el centro

es del orden de $2cm$ [2]. También en núcleos estelares compactos, con densidades sobre los $10^{12}g.cm^{-3}$, el camino libre medio de los neutrinos es menor que las dimensiones de dichos núcleos.[3, 4] Más aún, vale la pena mencionar que los datos obtenidos a partir de las observaciones de la supernova 1987A indican que el régimen de transporte radiativo que prevalece es el de difusión [5].

Por otra parte, y a pesar de que la isotropía local es una suposición muy común en el estudio de sistemas autogravitantes, existen fuertes evidencias teóricas que sugieren que para ciertos rangos de densidad, una variada gama de fenómenos físicos pueden dar lugar a anisotropía local.

Así, para sistemas de alta densidad, un variado número de exóticas transiciones de fase pueden ocurrir, generando anisotropía local [6, 7, 8, 9, 10, 11].

La parte anisótropa del tensor de tensiones asociado con las líneas de flujo en un superconductor de tipo II y su relevancia en la estructura de estrellas de neutrones han sido discutidas por Jones[12] y Easson y Pethick[13]. Materia anisótropa, asociada a estas u otras situaciones físicas de interés como núcleos sólidos[14, 15], superfluidos del tipo P o estrellas bosónicas[16, 17], son frecuentemente consideradas en la descripción de objetos compactos.

Otra fuente evidente de anisotropía es la viscosidad. Elevados índices de viscosidad, en el colapso de objetos compactos, pueden producirse por la opacidad de la materia a los neutrinos para densidades del orden de $10^{11-12}g.cm^{-3}$ [18].

En los sistemas de baja densidad, la anisotropía local aparece en los trabajos clásicos de Jeans[19, 20], teniendo como origen la distribución anisótropa de velocidades.

Finalmente vale la pena mencionar, que la superposición de

dos fluidos localmente isótropos es formalmente equivalente a un fluido anisótropo [21, 22]. Para más detalles sobre el posible origen de la anisotropía ver [23].

En estas notas consideraremos la evolución de distribuciones esféricamente simétricas y localmente anisótropas, disipando energía a través de un flujo radial de calor y acotadas por una superficie esférica Σ .

El elemento de línea en coordenadas tipo Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (9.1)$$

donde $\nu(t, r)$ y $\lambda(t, r)$ son funciones de sus argumentos. Las coordenadas están numeradas de la siguiente manera: $x^0 = t$; $x^1 = r$; $x^2 = \theta$; $x^3 = \phi$.

La métrica, dada por la expresión (9.1) tiene que satisfacer las ecuaciones de Einstein

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R = -8\pi T^\nu_\mu \quad (9.2)$$

donde, como es usual, R^ν_μ , R , y T^ν_μ denotan el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de energía impulso, respectivamente. Trabajaremos además con unidades “geometrizadas”, de manera que la velocidad de la luz y la constante gravitacional se toman iguales a 1.

No es difícil verificar que las ecuaciones de campo (9.2), en nuestro caso son [24]

$$-8\pi T^0_0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (9.3)$$

$$-8\pi T^1_1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned}
-8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = & -\frac{e^{-\nu}}{4} \left(2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right) + \\
& \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right)
\end{aligned} \tag{9.5}$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r} \tag{9.6}$$

donde los puntos y las primas indican derivación con respecto a t y r , respectivamente.

Para dotar a las componentes del tensor de energía-impulso T_μ^ν de significado físico, aplicaremos el esquema propuesto por Bondi [24].

Para ello, comenzaremos por introducir coordenadas Minkowskianas (τ, x, y, z) en cada punto del espacio tiempo

$$d\tau = e^{\nu/2} dt \quad dx = e^{\lambda/2} dr \quad dy = r d\theta \quad dz = r \sin\theta d\phi \tag{9.7}$$

En estas expresiones ν y λ son consideradas constantes, ya que sólo tienen valor localmente.

Se verifica inmediatamente que en tales coordenadas el elemento de línea (9.1) se escribe como

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9.8}$$

Así mismo, si denotamos con una barra las componentes del tensor energía-impulso en el sistema local Minkowskiano, vemos que se verifican las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\bar{T}_0^0 &= T_0^0 & \bar{T}_1^1 &= T_1^1 \\
\bar{T}_2^2 &= T_2^2 & \bar{T}_3^3 &= T_3^3 \\
\bar{T}_{01} &= e^{-(\nu+\lambda)/2} T_{01}
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Supondremos ahora que para un observador comóvil (en cada punto) con la materia, cuya velocidad con respecto a las coordenadas localmente Minkowskianas llamaremos ω , el contenido físico de la fuente consiste en un fluido anisótropo con densidad de energía ρ , presión radial P_r y presión tangencial P_\perp , que disipa energía a través de un flujo radial de calor \hat{q} . Para este observador comóvil con la materia, las componentes covariantes del tensor de energía-impulso $\tilde{T}_{\alpha\beta}$ son

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & -\hat{q} & 0 & 0 \\ -\hat{q} & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

Entonces, las componentes \bar{T}_β^α se expresan como

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \tilde{T}^{\gamma\delta} \quad (9.11)$$

donde las matrices de Lorentz Λ_β^α vienen dadas por [25]

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

A partir de (9.11) y (9.12) se obtiene, usando (9.9)

$$T_0^0 = \bar{T}_0^0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} + \frac{2Q\omega e^{\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} \quad (9.13)$$

$$T_1^1 = \bar{T}_1^1 = -\frac{P_r + \rho\omega^2}{1 - \omega^2} - \frac{2Q\omega e^{\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} \quad (9.14)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \bar{T}_2^2 = \bar{T}_3^3 = -P_\perp \quad (9.15)$$

$$T_{01} = e^{(\nu+\lambda)/2} \bar{T}_{01} = -\frac{(\rho + P_r)\omega e^{(\nu+\lambda)/2}}{1 - \omega^2} - \frac{Q e^{\nu/2} e^\lambda}{(1 - \omega^2)^{1/2}} (1 + \omega^2) \quad (9.16)$$

donde

$$Q \equiv \frac{\hat{q} e^{-\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} \quad (9.17)$$

Así pues, hemos expresado las componentes del tensor de energía-impulso en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) a través de variables físicas medidas por un observador comóvil con la materia y localmente Minkowskiano.

Nótese que la velocidad de un elemento de fluido cualquiera, en coordenadas (t, r, θ, ϕ) , está relacionada con ω por la expresión

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{(\lambda-\nu)/2} \quad (9.18)$$

Puesto que las superficies $r = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$ son esferas de área $4\pi r^2$, es claro que $\omega > 0$ implica expansión y $\omega < 0$ contracción del elemento de fluido correspondiente.

Al exterior de la configuración, el espacio tiempo está descrito por la métrica de Vaidya,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(u)}{R}\right) du^2 + 2dudR - R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (9.19)$$

donde u es una coordenada tipo tiempo tal que las superficies $u = \text{constante}$ son, asintóticamente, conos de luz abierto al futuro y R es una coordenada nula ($g_{RR} = 0$).

Los dos sistemas de coordenadas (t, r, θ, ϕ) y (u, R, θ, ϕ) están relacionados por la transformación

$$\begin{aligned} u &= t - r - 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \\ R &= r \end{aligned} \quad (9.20)$$

9.2 Condiciones de acoplamiento

La región interior, cuyo espacio tiempo está definido por el elemento de línea (9.1), y la región exterior, descrita por la métrica de Vaidya (9.19), están separadas por la superficie $r = r_{\Sigma}(t)$.

Para acoplar ambas soluciones (externa e interna) sobre dicha superficie, es necesario satisfacer ciertas condiciones conocidas con el nombre de condiciones de acoplamiento.

El propósito último de dichas condiciones es el de evitar la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas sobre la superficie de acoplamiento.

Las condiciones de acoplamiento fueron definidas por primera vez, de manera matemáticamente rigurosa, por Darmois [26]. De acuerdo con Darmois, la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento de dos regiones del espacio tiempo sobre una hipersuperficie, es que, tanto la métrica inducida sobre ella (primera forma fundamental) como la derivada covariante del vector normal, proyectada sobre dicha hipersuperficie, (segunda forma fundamental) sean continuas a través de la misma.

Años más tarde, Lichnerowicz [27] propuso un conjunto alternativo de condiciones de acoplamiento, que como demostraron Bonnor y Vickers [28] son equivalentes a las condiciones de Darmois.

De acuerdo con Lichnerowicz, la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento de dos regiones del espacio tiempo sobre una hipersuperficie es que exista un sistema de coordenadas en el cual, tanto el tensor métrico como todas sus primeras derivadas sean continuos a través de la hipersuperficie de separación.

De lo anterior queda claro que las condiciones de Darmois están expresadas en forma covariante, mientras que las de Lichnerowicz no lo están.

Así pues, para acoplar las dos métricas (9.1) y (9.19) sobre la hipersuperficie $r = r_\Sigma(t)$ vamos, primero que todo, a exigir la continuidad de la primera forma fundamental a través de $r = r_\Sigma(t)$, es decir

$$\left[e^\nu - e^\lambda r_\Sigma^2 \right]_\Sigma dt^2 = \left[1 - \frac{2M}{R_b} + 2 \frac{dR_b}{du} \right]_\Sigma du^2 \quad (9.21)$$

donde el subíndice Σ indica que la cantidad está evaluada sobre la superficie Σ y $R = R_b(u)$ es la ecuación de ésta en las coordenadas (u, r, θ, ϕ) .

A partir de (9.20) se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{1 - 2M/R} \quad (9.22)$$

de manera que para un elemento dado de fluido

$$\frac{du}{dt} = 1 - \frac{\frac{dr}{dt}}{1 - 2M/R} \quad (9.23)$$

o, al evaluar en Σ

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_\Sigma = 1 - \frac{\dot{r}_\Sigma}{1 - 2M/R_b} = 1 - \frac{\frac{dR_b}{du} \frac{du}{dt}}{1 - 2M/R_b} \quad (9.24)$$

de donde

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_\Sigma = \frac{1 - 2M/R_b}{1 - \frac{2M}{R_b} + \frac{dR_b}{du}} \quad (9.25)$$

Usando (9.25), la condición (9.21) se escribe como

$$\begin{aligned} e^{\nu_\Sigma} \left(1 - \frac{2M}{R_b} + \frac{dR_b}{du} \right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{R_b} \right)^3 = \\ e^{\lambda_\Sigma} \left(\frac{dR_b}{du} \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{R_b} \right)^2 + 2 \frac{dR_b}{du} \left(1 - \frac{2M}{R_b} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.26)$$

la cual es obviamente satisfecha si

$$e^{\nu\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_b} \quad (9.27)$$

$$e^{-\lambda\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_b} \quad (9.28)$$

Nótese que la continuidad de ν y λ , implícitamente expresada en (9.27) y (9.28), es una condición necesaria para impedir la aparición de comportamientos tipo función δ en las variables físicas, como se puede observar a partir de las ecuaciones (9.3) y (9.4).

Escribiendo la ecuación de la frontera en la forma

$$\Psi \equiv R - R_b(u) = 0 \quad (9.29)$$

queda claro que el vector unitario normal a dicha superficie está dado por

$$n_{\mu}^{(+)} = \frac{\partial_{\mu}\Psi}{(-\partial_{\alpha}\Psi\partial_{\beta}\Psi g^{\alpha\beta})^{1/2}} \quad (9.30)$$

donde (+) indica que las componentes son evaluadas del lado externo de Σ .

A partir de (9.29) y (9.30), se obtiene

$$n_{\mu}^{(+)} = \left(-\beta \frac{dR_b}{du}, \beta, 0, 0 \right) \quad (9.31)$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M(u)}{R_b} + 2\frac{dR_b}{du}\right)^{1/2}} \quad (9.32)$$

De igual manera se obtiene, sin dificultad, la expresión para el vector unitario normal a Σ , evaluado desde el interior

$$n_{\mu}^{(-)} = (-\dot{r}_{\Sigma}\gamma, \gamma, 0, 0) \quad (9.33)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{(e^{-\lambda_\Sigma} - r_\Sigma^2 e^{-\nu_\Sigma})^{1/2}} \quad (9.34)$$

Definamos ahora un vector unitario tipo tiempo v^μ tal que

$$v^\mu v_\mu = 1 \quad (9.35)$$

Las componentes de dicho vector se pueden escribir como

$$v^{\mu(+)} = \beta \delta_u^\mu + \beta \frac{dR_b}{du} \delta_R^\mu \quad (9.36)$$

y

$$v^{\mu(-)} = \frac{e^{-\nu_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_t^\mu + \frac{\omega_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma/2}}{(1 - \omega_\Sigma^2)^{1/2}} \delta_r^\mu \quad (9.37)$$

En lugar de escribir las condiciones de acoplamiento en su forma usual, continuidad de la primera y segunda formas fundamentales, vamos a exigir la continuidad de la primera forma (ver ecuaciones (9.27) y (9.28)) y la continuidad, a través de Σ , de las componentes independientes del flujo de energía-impulso. Es obvio que esta última condición garantiza la ausencia de comportamientos singulares de las variables físicas sobre Σ .

Así pues requeriremos (además de (9.27) y (9.28))

$$(T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (9.38)$$

$$(T_{\mu\nu} n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)} \quad (9.39)$$

donde las expresiones para el tensor energía-impulso a ambos lados de la frontera, son

$$T_{\mu\nu}^{(-)} = (\rho + P_\perp) u_\mu u_\nu - P_\perp g_{\mu\nu} + (P_r - P_\perp) s_\mu s_\nu + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu \quad (9.40)$$

y

$$T_{\mu\nu}^{(+)} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \quad (9.41)$$

con

$$u^\mu = \left(\frac{e^{-\nu/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}}, \frac{\omega e^{-\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}}, 0, 0 \right) \quad (9.42)$$

$$s^\mu = \left(\frac{\omega e^{-\nu/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}}, \frac{e^{-\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}}, 0, 0 \right) \quad (9.43)$$

$$q^\mu = Q \left(\omega e^{(\lambda-\nu)/2}, 1, 0, 0 \right) \quad (9.44)$$

donde $q^\mu u_\mu = 0$, y es evidente que

$$u_\Sigma^\mu = v^{\mu(-)} \quad (9.45)$$

$$n^{\mu(-)} = -s_\Sigma^\mu \quad (9.46)$$

A partir de (9.40) y (9.41) podemos obtener fácilmente las siguientes relaciones

$$(T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(-)} = [P_r]_\Sigma \quad (9.47)$$

$$(T_{\mu\nu} n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)} = [Q \gamma (1-\omega^2)]_\Sigma \quad (9.48)$$

$$(T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu)_\Sigma^{(+)} = - \left[\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \beta^2 \right]_\Sigma \quad (9.49)$$

$$(T_{\mu\nu} n^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = - \left[\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \beta^2 \right]_\Sigma \quad (9.50)$$

Usando (9.47)-(9.50) en (9.38)-(9.39), se obtiene inmediatamente (teniendo en cuenta ((9.17) y 9.34))

$$[P_r]_\Sigma = - \left[\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \beta^2 \right]_\Sigma \quad (9.51)$$

$$[\hat{q}]_{\Sigma} = \left[Q e^{\lambda/2} (1 - \omega^2)^{1/2} \right]_{\Sigma} = - \left[\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{du} \beta^2 \right]_{\Sigma} \quad (9.52)$$

Las condiciones (9.27),(9.28), (9.51) y (9.52) son necesarias y suficientes para acoplar las dos métricas (9.1) y (9.19) sobre la superficie Σ . Combinando (9.51) y (9.52) se obtiene

$$[P_r]_{\Sigma} = \left[Q e^{\lambda/2} (1 - \omega^2)^{1/2} \right]_{\Sigma} = [\hat{q}]_{\Sigma} \quad (9.53)$$

que expresa la discontinuidad de la presión radial en presencia de flujo de calor [29].

9.3 Ecuaciones dinámicas y tensor de deformación

En la teoría general de la relatividad, a diferencia del electromagnetismo, las ecuaciones de movimiento no son independientes de las ecuaciones de campo, sino una consecuencia de éstas.

En efecto, las ecuaciones de movimiento expresadas por

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (9.54)$$

se obtienen inmediatamente a partir de (9.2) y las identidades de Bianchi.

De manera que el conjunto de ecuaciones (9.54) no aporta ninguna información que no esté ya contenida en (9.3)-(9.6). Sin embargo en muchos casos, la forma explícita de (9.54) puede ser más útil a la hora de integrar el sistema y/o dar una interpretación física a una determinada situación.

Así pues, presentaremos aquí la forma explícita de la componente r de (9.54) que nos será de utilidad en los capítulos siguientes.

Calculando directamente

$$T_{1;\mu}^{\mu} = 0$$

o bien, derivando (9.4) con respecto a r , y usando las otras ecuaciones de campo, se obtiene, después de un cálculo largo pero muy simple

$$\begin{aligned} (-8\pi T_1^1)' &= \frac{16\pi}{r} (T_1^1 - T_2^2) + 4\pi\nu' (T_1^1 - T_0^0) + \\ &\frac{e^{-\nu}}{r} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right) \end{aligned} \quad (9.55)$$

En el caso estático tenemos que

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \rho \quad ; \quad T_1^1 = -P_r \quad ; \quad T_2^2 = -P_{\perp} \\ \ddot{\lambda} &= \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = Q = 0 \end{aligned}$$

de manera que (9.55) se transforma en

$$P_r' = -\frac{\nu'}{2} (\rho + P_r) + \frac{2(P_{\perp} - P_r)}{r} \quad (9.56)$$

que no es otra cosa que la ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido anisótropo.

En los capítulos siguientes utilizaremos (9.55) en diferentes contextos y aproximaciones.

Finalmente calcularemos las componentes del tensor de deformación y de la cuadriaceleración, las cuales serán de utilidad más adelante.

Las componentes del tensor de deformación están definidas por

$$\sigma_{\mu\nu} = u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} - u_{\mu}a_{\nu} - u_{\nu}a_{\mu} - \frac{2}{3}\Theta P_{\mu\nu} \quad (9.57)$$

donde

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu \quad \Theta = u^\mu_{;\mu} \quad a_\mu = u^\nu u_{\mu;\nu} \quad (9.58)$$

son respectivamente el tensor de proyección sobre el triespacio ortogonal a u^μ , el escalar de expansión y la cuadiaceleración. Un cálculo largo y tedioso, da las siguientes expresiones

$$\Theta = \frac{e^{-\nu/2}}{2(1-\omega^2)^{1/2}} \left(\dot{\lambda} + \frac{2\omega\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) + \frac{e^{-\lambda/2}}{2(1-\omega^2)^{1/2}} \left(\omega\nu' + 2\omega' + \frac{2\omega^2\omega'}{1-\omega^2} + \frac{4\omega}{r} \right) \quad (9.59)$$

$$\sigma_{11} = -\frac{2}{3(1-\omega^2)^{3/2}} \left[e^\lambda e^{-\nu/2} \left(\dot{\lambda} + \frac{2\omega\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) + e^{\lambda/2} \left(\omega\nu' + \frac{2\omega'}{1-\omega^2} - \frac{2\omega}{r} \right) \right] \quad (9.60)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{e^{-\lambda} r^2 (1-\omega^2)}{2} \sigma_{11} \quad (9.61)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{e^{-\lambda} r^2 (1-\omega^2)}{2} \sin^2 \theta \sigma_{11} \quad (9.62)$$

$$\sigma_{00} = \omega^2 e^{-\lambda} e^\nu \sigma_{11} \quad (9.63)$$

$$\sigma_{01} = -\omega e^{(\nu-\lambda)/2} \sigma_{11} \quad (9.64)$$

$$a_0 = \frac{1}{1-\omega^2} \left[\left(\frac{\omega\dot{\omega}}{1-\omega^2} + \frac{\omega^2\dot{\lambda}}{2} \right) + e^{\nu/2} e^{-\lambda/2} \left(\frac{\omega\nu'}{2} + \frac{\omega^2\omega'}{1-\omega^2} \right) \right] \quad (9.65)$$

$$a_1 = -\frac{1}{1-\omega^2} \left[\left(\frac{\omega\omega'}{1-\omega^2} + \frac{\nu'}{2} \right) + e^{-\nu/2} e^{\lambda/2} \left(\frac{\omega\dot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) \right] \quad (9.66)$$

Fracturas. Fracturas y fuerzas de marea. Ejemplos

El concepto de fractura (cracking) fue introducido recientemente para describir el comportamiento de una distribución de fluido en el preciso momento en que ésta sale del equilibrio dinámico [30], cuando aparecen fuerzas radiales de diferente signo en la distribución.

Se dice que ocurre una fractura cuando la fuerza radial está dirigida hacia el centro en la región más interna de la esfera y cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial. En el caso opuesto, cuando la fuerza está dirigida hacia afuera en la parte interior y cambia de dirección en las regiones más externas de la esfera, diremos que hay una inversión (overturning).

10.1 Fracturas y fuerzas de marea

Intuitivamente resulta claro que un efecto como la fractura, debe poder describirse en términos de las aceleraciones de marea de los elementos de fluido [31].

Para llevar a cabo una tal descripción, usaremos una generalización de la ecuación de la desviación geodésica para el caso en el cual las partículas no se mueven a lo largo de geodésicas.

Dicha ecuación se escribe como [32]

$$A^\alpha = \left[-R_{\beta\gamma\delta}^\alpha u^\beta u^\delta + P_\beta^\alpha a_{;\gamma}^\beta - a^\alpha a_\gamma \right] \delta_\perp x^\gamma \quad (10.1)$$

donde $\delta_\perp x^\gamma$ es el vector que une dos partículas vecinas y

$$\delta_\perp x^\gamma = P_\beta^\gamma \delta x^\beta \quad (10.2)$$

La aceleración relativa (de marea) A^α (no confundir con la cuadiaceleración a^α) de dos partículas vecinas está definida por

$$A^\alpha = P_\beta^\alpha u^\gamma \left(u_{;\mu}^\beta \delta_\perp x^\mu \right)_{;\gamma} \quad (10.3)$$

donde el punto y coma indica derivada covariante.

Usando la definición del tensor de Riemann

$$u_{\alpha;\beta;\delta} - u_{\alpha;\delta;\beta} = u_\rho R_{\alpha\beta\delta}^\rho \quad (10.4)$$

se puede demostrar [32] que (10.1) conduce a la ecuación de Raychaudhuri

$$\frac{d\Theta}{ds} \equiv u^\mu \Theta_{;\mu} = -R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + a_{;\mu}^\mu + 2 \left(\Omega^2 - \sigma^2 \right) - \frac{1}{3} \Theta^2 \quad (10.5)$$

donde

$$2\Omega^2 = -\Omega^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} \quad ; \quad 2\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad (10.6)$$

y $\Omega_{\mu\nu}$ define la rotación del fluido.

En este capítulo consideraremos sistemas sin disipación ($Q = 0$). Supongamos que inicialmente nuestro objeto autogravitante está en equilibrio, entonces

$$\omega = \dot{\lambda} = \ddot{\lambda} = \dot{\nu} = 0 \quad (10.7)$$

y por lo tanto la ecuación (9.55) se escribe como (9.56)

$$P_r' = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P_r) + \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} \quad (10.8)$$

Introduciendo la función masa $m(r, t)$ a partir de

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (10.9)$$

podemos escribir (10.8) en la forma

$$\begin{aligned} R \equiv & \frac{dP_r}{dr} + \frac{4\pi r P_r^2}{1 - 2m/r} + \frac{P_r m}{r^2(1 - 2m/r)} + \frac{4\pi r \rho P_r}{1 - 2m/r} \\ & + \frac{\rho m}{r^2(1 - 2m/r)} - \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} = 0 \end{aligned} \quad (10.10)$$

donde R define la fuerza radial total sobre cada elemento de fluido y hemos utilizado la relación (ver próximo capítulo)

$$m(r, t) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr \quad (10.11)$$

fácilmente deducible de (9.3) y (10.9).

Supongamos ahora que el sistema en consideración, caracterizado por una cierta distribución de presión y densidad de energía y que satisface (10.10), es sacado fuera del equilibrio por una perturbación.

Aparece entonces una fuerza radial total ($R \neq 0$), la cual, dependiendo de su distribución espacial puede conducir a fracturas o inversiones de la fuente.

Antes de proceder al análisis del problema en cuestión, es pertinente hacer algunos comentarios sobre el esquema perturbativo que conduce a desviaciones del equilibrio.

Está claro, por la definición de fractura, que es imperativo que las perturbaciones que actúan sobre el sistema saquen

a éste del equilibrio. En otras palabras, vamos a considerar exclusivamente perturbaciones bajo las cuales el sistema sea dinámicamente inestable.

Una manera de garantizar la salida del equilibrio es considerar materiales cuyo cociente de calores específicos no sea igual (en el momento de la perturbación) al valor crítico requerido para la estabilidad marginal dinámica.

Otra forma, completamente equivalente, de introducir inestabilidad en el sistema, consiste en suponer que bajo perturbaciones de densidad y anisotropía local, la presión radial del sistema conserva la misma dependencia radial que tenía en el equilibrio.

Esta falta de capacidad de respuesta del fluido, para adaptar su presión radial a la situación perturbada, equivale a suponer que la relación presión-densidad (el cociente de calores específicos) nunca alcanza el valor requerido para el equilibrio marginal (neutro) [33].

Evidentemente, en este caso, la ecuación (10.10) no será satisfecha ($R \neq 0$) después de la perturbación.

Vayamos ahora a la ecuación (10.5). Para una configuración esférica $\Omega = 0$ y $d\Theta/ds$ se puede calcular directamente a partir de (9.59). Después de un cálculo largo pero simple, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{ds} = & \frac{e^{-\nu}}{2(1-\omega^2)} \left[\ddot{\lambda} + \frac{2\dot{\omega}^2}{1-\omega^2} + \frac{2\omega\ddot{\omega}}{1-\omega^2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} - \right. \\ & \left. \frac{\omega\dot{\omega}\dot{\nu}}{1-\omega^2} + \frac{6\omega^2\dot{\omega}^2}{(1-\omega^2)^2} \right] \\ & + \frac{e^{-\lambda}}{2(1-\omega^2)} \left[\omega\omega'\nu' + \omega^2\nu'' + \frac{2\omega\omega''}{1-\omega^2} - \frac{\lambda'\omega^2\nu'}{2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega\omega'\lambda'}{1-\omega^2} - \frac{2\omega^2\lambda'}{r} + \frac{\omega^3\omega'\nu'}{1-\omega^2} + \frac{6\omega^2\omega'^2}{(1-\omega^2)^2} + \\
 & \left[\frac{4\omega^3\omega'}{r(1-\omega^2)} + \frac{4\omega\omega'}{r} - \frac{4\omega^2}{r^2} \right] + \\
 & + \frac{e^{-(\nu+\lambda)/2}}{2(1-\omega^2)} \left[\dot{\omega}\nu' + \frac{2\dot{\omega}'}{1-\omega^2} + \frac{4\dot{\omega}}{r} + \omega\nu' + \right. \\
 & \left. \omega\dot{\lambda}' - \dot{\lambda}\omega' - \frac{2\dot{\lambda}\omega}{r} - \dot{\lambda}\omega\nu' + \frac{6\omega\dot{\omega}\omega'}{(1-\omega^2)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{2\omega\dot{\omega}\omega'}{1-\omega^2} + \frac{4\omega^2\dot{\omega}}{r(1-\omega^2)} + \frac{2\omega^2\dot{\omega}'}{1-\omega^2} + \frac{6\omega^3\dot{\omega}\omega'}{(1-\omega^2)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{10.12}$$

Evaluando (10.12) en el momento mismo en el cual el sistema sale del equilibrio ($\omega \approx \nu \approx \dot{\lambda} \approx \dot{\omega}^2 \approx 0$), tendremos

$$\frac{d\Theta}{ds} = \left[\dot{\omega}' + \dot{\omega} \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu'}{2} \right) \right] e^{-(\nu+\lambda)/2} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} e^{-\nu} \tag{10.13}$$

Por otra parte, evaluando (9.55) en ese mismo instante, se tiene (ver (14.9))

$$8\pi P'_r = \frac{16\pi}{r} (P_\perp - P_r) - 4\pi\nu'(\rho + P_r) + \frac{e^{-\nu}}{r} \ddot{\lambda} \tag{10.14}$$

o, lo que es lo mismo

$$\ddot{\lambda} = 8\pi r e^\nu R \tag{10.15}$$

Derivando (9.6) con respecto a t y usando (9.16) y (10.15) se obtiene

$$\dot{\omega} = -\frac{e^{(\nu-\lambda)/2} R}{(\rho + P_r)} \tag{10.16}$$

donde, al igual que para (10.13), (10.14), (10.15) y las ecuaciones que siguen, las cantidades están evaluadas en el momento mismo en el cual el sistema sale del equilibrio.

Usando (10.15) y (10.16), podemos escribir (10.13) como

$$\frac{d\Theta}{ds} = R \left(4\pi r + \frac{(\rho' + P_r') e^{-\lambda}}{(\rho + P_r)^2} + \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{2(\rho + P_r)} - \frac{\nu' e^{-\lambda}}{(\rho + P_r)} - \frac{2e^{-\lambda}}{r(\rho + P_r)} \right) - \frac{R' e^{-\lambda}}{(\rho + P_r)} \quad (10.17)$$

(nótese un error de imprenta en esta ecuación en la referencia [31]).

Procederemos ahora a transformar la ecuación (10.13) de la siguiente forma. Usando (10.15) y (10.16), la ecuación (10.13) puede escribirse como

$$e^{(\nu+\lambda)/2} \frac{d\Theta}{ds} = \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} - 4\pi r e^\lambda (\rho + P_r) \right) \dot{\omega} + \dot{\omega}' \quad (10.18)$$

o, después de operaciones sencillas

$$\frac{d\Theta}{ds} = e^{-(\nu+\lambda)/2} e^{-\int f dr} \frac{d}{dr} \left[\dot{\omega} e^{\int f dr} \right] \quad (10.19)$$

donde

$$f \equiv \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} - 4\pi r e^\lambda (\rho + P_r) \quad (10.20)$$

Por otra parte, a partir de las ecuaciones de campo (9.3) y (9.4) se tiene

$$4\pi r e^\lambda (\rho + P_r) = \frac{1}{2} (\lambda' + \nu') \quad (10.21)$$

sustituyendo esta expresión en (10.20) y evaluando los integrales en (10.19) se obtiene

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{1}{r^2 e^{\nu/2}} \frac{dF}{dr} \quad (10.22)$$

donde

$$F \equiv \frac{r^2 e^{\nu/2} R}{e^\lambda (\rho + P_r)} \quad (10.23)$$

Finalmente, integrando (10.22) en el intervalo $[0, r]$, con la condición de regularidad

$$\left(r^2 \dot{\omega} e^{-\lambda/2} \right)_{r=0} = 0 \quad (10.24)$$

obtenemos

$$R = -\frac{e^\lambda (\rho + P_r)}{e^{\nu/2} r^2} \int_0^r r^2 e^{\nu/2} \frac{d\Theta}{ds} dr \quad (10.25)$$

Así pues, para que ocurra una fractura para algún valor de r (digamos $r = \tilde{r}$) es necesario que $d\Theta/ds$ cambie de signo (sea cero) en algún punto del intervalo $(0, \tilde{r})$. O alternativamente, de acuerdo con (10.22), que la función F tenga un punto estacionario en el intervalo $(0, \tilde{r})$.

Vale la pena señalar el carácter no local de la fractura implícito en (10.25). En efecto, el cambio de signo en R no depende del valor de $d\Theta/ds$ en un punto, sino en toda la región por debajo de la fractura.

10.2 Fractura en una distribución de densidad inhomogénea

Consideremos primero una distribución de fluido perfecto, caracterizada por

$$\rho = \frac{K}{r^2} \quad P = P_r = P_\perp = \frac{3K}{r^2} \frac{1 - r/r_\Sigma}{9 - r/r_\Sigma} \quad (10.26)$$

donde $K = 3/56\pi$.

Perturbemos ahora el sistema, a través del parámetro K , de tal manera que la dependencia radial de P_r no cambie y la isotropía local no sea alterada (i.e. el sistema perturbado sigue siendo localmente isotrópico). Entonces

$$K \rightarrow \tilde{K} = \frac{3}{56\pi} + \Psi \quad ; \quad |\Psi| \ll 1 \quad (10.27)$$

y la ecuación (10.10) ya no es satisfecha por el sistema perturbado ($R \neq 0$).

No es difícil ver que la fuerza radial total, resultante de la perturbación, está dada por

$$R = \frac{784\pi \tilde{K} \Psi}{4 - 56\pi \Psi} \frac{(r/r_\Sigma - 3)^2}{(r/r_\Sigma)^3 (r/r_\Sigma - 9)^2} \frac{1}{r_\Sigma^3} \quad (10.28)$$

Por lo tanto, como R no cambia de signo en el intervalo $(0, r_\Sigma)$, todos los elementos del fluido van a expandirse o a colapsar dependiendo del signo de Ψ . En otras palabras, no hay fractura.

Consideraremos ahora la misma distribución de energía

$$\rho = \frac{K}{r^2}$$

pero para un fluido anisótropo definido por

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{K}{3r^2} \frac{7 - 9r^{-1/2}}{1 - 3r^{-1/2}} \\ P_r - P_\perp &= \frac{\gamma}{r^2} \quad \gamma = \frac{1}{4}K \quad K = \frac{3}{56\pi} \end{aligned} \quad (10.29)$$

donde, debido a una elección específica de la constante de integración, el radio r_Σ del objeto está dado por la expresión adimensional

$$r_\Sigma = \frac{81}{49}$$

En este caso, la perturbación implica cambios en K y γ

$$\pi \widetilde{K} = \frac{3}{56} + \Psi \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{4}(1+n)K \quad |\Psi|, |n| \ll 1$$

La fuerza total resultante se obtiene después de un cálculo largo pero sencillo

$$\begin{aligned} (1 - 3r^{-1/2})^2 r^3 \frac{1 - 8\pi \widetilde{K}}{\widetilde{K}} \frac{3}{2} R = & \\ & \left[\frac{3}{7}n(1 - 14\Psi) + \frac{25}{3}(14\Psi) \right] \\ & - \left[\frac{18}{7}n(1 - 14\Psi) + 30(14\Psi) \right] r^{-1/2} \\ & + \left[\frac{27}{7}n(1 - 14\Psi) + 27(14\Psi) \right] r^{-1} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Cambios de signo en R , que implican fractura, ocurren para valores negativos de n y positivos de Ψ . Así por ejemplo, para

$$\Psi = \frac{1}{1400} \quad ; \quad n = -0.0340 \quad (10.31)$$

se obtiene

$$R = \frac{7\widetilde{K}}{6r^2 (r^{1/2} - 3)^2} \left(0.0689 - 0.21344r^{-1/2} + 0.14016r^{-1} \right) \quad (10.32)$$

Esta última expresión cambia de signo positivo a negativo (fractura) en $r \approx 0.893$.

La aparición de una fractura en este ejemplo, se confirma por el hecho de que la función F , que en este caso toma la forma

$$\begin{aligned} F = & \frac{0.604938r^{11/4} (9 + r - 6r^{1/2})^{1/2}}{(r^{1/2} - 3)(10r^{1/2} - 18)} \\ & \times (0.0689 - 0.21344r^{-1/2} + 0.14016r^{-1}) \end{aligned} \quad (10.33)$$

presenta un máximo en $r \approx 0.5519$, satisfaciendo de esta manera la condición necesaria para la aparición de una fractura, deducida a partir de (10.22) y (10.25).

Antes de pasar a los ejemplos siguientes, vale la pena observar que en el ejemplo considerado, la condición de regularidad no es satisfecha debido a la singularidad en la distribución (10.29).

Nótese también, que la fractura ocurre en este ejemplo, sólo si se perturba la anisotropía local ($n \neq 0$). Lo que sugiere una relación entre esta última y la existencia de fracturas. Esta relación se pondrá de manifiesto en los ejemplos siguientes.

10.3 Fractura en el modelo de Bowers y Liang

En esta sección vamos a considerar una solución encontrada por Bowers y Liang en 1974 [34], que representa la primera solución exacta conocida, para materia anisótropa en el contexto de la relatividad general.

Dicha solución corresponde a una distribución estática y esférica, cuya densidad de energía es homogénea.

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 = \text{constante} & 0 \leq r \leq r_\Sigma \\ 0 & r > r_\Sigma \end{cases} \quad (10.34)$$

y con una ecuación de estado para las tensiones de la forma

$$P_\perp - P_r = \frac{C(\rho_0 + P_r)(\rho_0 + 3P_r)(4\pi/3)r^2}{1 - (8\pi/3)r^2\rho_0} \quad (10.35)$$

Con (10.34) y (10.35) podemos, sin dificultad, integrar (10.10)

y a continuación (9.4). Obtenemos así

$$P_r = \rho_0 \left[\frac{(1 - 2m/r)^{h/2} - (1 - 2M/r_\Sigma)^{h/2}}{3(1 - 2M/r_\Sigma)^{h/2} - (1 - 2m/r)^{h/2}} \right] \quad (10.36)$$

y

$$e^\nu = \left[\frac{3(1 - 2M/r_\Sigma)^{h/2} - (1 - 2m/r)^{h/2}}{2} \right]^{2/h} \quad (10.37)$$

con

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 \quad ; \quad M = \frac{4\pi}{3} r_\Sigma^3 \rho_0 \quad (10.38)$$

y

$$h = 1 - 2C \quad (10.39)$$

Obsérvese que en (10.36) y (10.37) hemos usado las condiciones de acoplamiento (9.27), (9.28) y (9.53) para el caso en que tenemos la métrica de Schwarzschild al exterior ($M = \text{constante}$, $Q = 0$).

El parámetro h mide la anisotropía de la distribución, con $h = 1$ correspondiendo al fluido perfecto.

Introduzcamos ahora las siguientes variables adimensionales

$$\mu \equiv 1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \quad ; \quad x \equiv \frac{r}{r_\Sigma} \quad (10.40)$$

entonces, la expresión (10.36) para P_r se puede escribir como

$$P_r = \rho_0 \varphi(x) \quad (10.41)$$

con

$$\varphi(x) \equiv \frac{[1 - (1 - \mu)x^2]^{h/2} - \mu^{h/2}}{3\mu^{h/2} - [1 - (1 - \mu)x^2]^{h/2}} \quad (10.42)$$

Vamos ahora a proceder a perturbar el sistema, de acuerdo con el esquema establecido, es decir, perturbaremos la densidad y la anisotropía local, dejando la dependencia radial de P_r invariante.

O sea

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0 + \delta\rho_0 \quad (10.43)$$

$$\tilde{h} = h + \delta h \quad (10.44)$$

$$\tilde{P}_r = \tilde{\rho}_0 \varphi(x) = \alpha P_r(x) \quad (10.45)$$

con

$$\alpha = \frac{\tilde{\rho}_0}{\rho_0} \quad ; \quad \delta\rho_0, \delta h \ll 1 \quad (10.46)$$

y donde la tilde indica la cantidad perturbada.

A partir de (10.35) y (10.36) no es difícil ver que la expresión para R toma, en este caso, la forma

$$R \equiv P'_r + h(\rho_0 + P_r) \frac{\nu'}{2} \quad (10.47)$$

que es idénticamente igual a cero antes de la perturbación.

Para calcular \tilde{R} introduzcamos la función adimensional

$$\tilde{\tilde{R}} \equiv \frac{r_\Sigma}{\rho_0} \tilde{R} \quad (10.48)$$

Entonces, usando (10.43)–(10.47) y la expresión

$$\nu' = 2 \frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)} \quad (10.49)$$

fácilmente derivable a partir de (9.3) y (9.4), obtenemos

$$\tilde{\tilde{R}} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} + \frac{(1 - \mu)}{2} \tilde{h} \alpha^2 \frac{x [1 + \varphi(x)] [1 + 3\varphi(x)]}{1 - (1 - \mu) \alpha x^2} \quad (10.50)$$

Formalmente podemos escribir

$$\begin{aligned}\delta \hat{R} &= \tilde{\hat{R}}(x, 1 + \delta\alpha, h + \delta h, \mu) \\ &= \hat{R}(x, 1, h, \mu) + \left. \frac{\partial \tilde{\hat{R}}}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha = 1 \\ \tilde{h} = h}} \cdot \delta\alpha + \left. \frac{\partial \tilde{\hat{R}}}{\partial \tilde{h}} \right|_{\substack{\alpha = 1 \\ \tilde{h} = h}} \cdot \delta h \\ &\quad + O(\delta\alpha^2, \delta h^2)\end{aligned}\quad (10.51)$$

Omitiendo los argumentos y la tilde sobre R , puesto que

$$\hat{R}(x, 1, h, \mu) = 0 \quad (10.52)$$

tenemos

$$\delta \hat{R} = \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha = 1 \\ \tilde{h} = h}} \cdot \delta\alpha + \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \tilde{h}} \right|_{\substack{\alpha = 1 \\ \tilde{h} = h}} \cdot \delta h + O(\delta\alpha^2, \delta h^2) \quad (10.53)$$

Las dos derivadas en la ecuación anterior se obtienen fácilmente de (10.50)

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha = 1 \\ \tilde{h} = h}} &= \frac{d\varphi}{dx} + \frac{(1 - \mu)hx(1 + \varphi)(1 + 3\varphi)}{1 - (1 - \mu)x^2} \\ &\quad + \frac{(1 - \mu)^2 hx^3(1 + \varphi)(1 + 3\varphi)}{2[1 - (1 - \mu)x^2]^2}\end{aligned}\quad (10.54)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \tilde{h}} \right|_{\substack{\alpha = 1 \\ \tilde{h} = h}} = \frac{(1 - \mu)x(1 + \varphi)(1 + 3\varphi)}{2[1 - (1 - \mu)x^2]} \quad (10.55)$$

Para que ocurra una fractura es necesario que $\delta \hat{R}$ tenga un cero en el intervalo $x \in [0, 1]$. En ese punto de fractura

$$\delta h = -\Gamma(x)\delta\alpha \quad (10.56)$$

donde

$$\Gamma(x) \equiv \frac{\left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\tilde{h} = h \\ \alpha = 1}}}{\left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial h} \right|_{\substack{\tilde{h} = h \\ \alpha = 1}}} \quad (10.57)$$

Los valores posibles de μ están restringidos por la condición de que la presión radial en el centro siempre sea finita. De manera que el valor crítico $\mu = 0$ es posible sólo si $h = 0$. En otras palabras, si $h = 0$, entonces la superficie del objeto podrá acercarse al horizonte tanto como se quiera. Para otros valores de h , los valores críticos de μ son siempre positivos. Obsérvese que para $h = 0$

$$\delta \hat{R} = \frac{(1 - \mu) x}{2[1 - (1 - \mu) x^2]} \delta h \quad (10.58)$$

de donde se deduce que en este caso ($h = 0$), las perturbaciones de densidad no sacan al sistema del equilibrio. Además, habrá fractura si y sólo si δh cambia de signo positivo a negativo en el intervalo $x \in [0, 1]$.

Por otra parte, aunque presiones radiales negativas pueden existir en estados inestables o metaestables [35], vamos a restringirnos a situaciones donde $P_r \geq 0$, por lo tanto exigiremos $h \geq 0$.

En este modelo se producen fracturas bajo una muy variada gama de circunstancias [36]. Por ejemplo, la figura 10.1 muestra la aparición de fracturas para diferentes valores de μ para una configuración inicialmente (antes de la perturbación) localmente isótropa. Es interesante notar que la fuerza resultante R será mayor para objetos más compactos (menores valores de μ). Se observa también que la fractura ocurre más profundamente en la esfera para valores menores de μ .

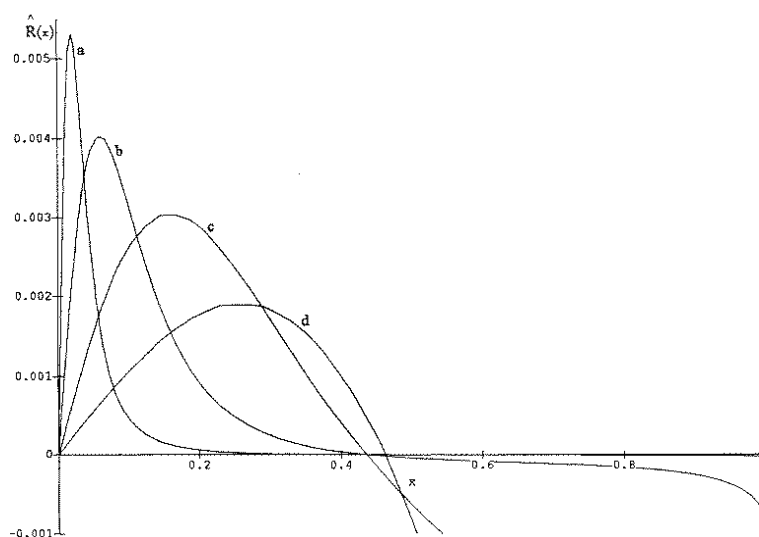


Figura 10.1: \hat{R} (para el modelo de Bowers y Liang) como función de x , para una configuración inicialmente isótropa ($h = 1$), con $\Gamma = 1.2$; $\delta\alpha = -10^{-6}$; $\tilde{h} = 1.0000012$. Las curvas a , b , c , y d corresponden a $\mu = 0.11122$; 0.1122 ; 0.122 y 0.22 , respectivamente. Las curvas b , c y d están multiplicadas por los factores de escala 24, 608 y 12.674 respectivamente.

Si cambiamos los signos de δh y $\delta\alpha$, entonces las fracturas se transforman en inversiones.

Se puede demostrar sin dificultad que las fracturas ocurren para un amplio rango de valores de Γ y para configuraciones que son inicialmente anisótropas [36].

Finalmente evaluaremos la derivada absoluta temporal de la expansión. Para ello usaremos (10.22), tomando en cuenta que todas las cantidades que allí aparecen han de ser evaluadas justo después de que el sistema salga del equilibrio.

A partir de (10.9), se tiene

$$e^{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{1 - (1 - \mu) \alpha x^2} \quad (10.59)$$

Usando (10.41)

$$\tilde{\rho}_0 + \tilde{P}_r = \alpha \rho_0 (1 + \varphi(x)) \quad (10.60)$$

y a partir de (10.49) y (10.37) obtenemos

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dx} = \frac{(1 - \mu) \alpha x (1 + 3\varphi(x))}{1 - (1 - \mu) \alpha x^2} \quad (10.61)$$

y

$$e^{\tilde{\nu}/2} = [1 - (1 - \mu) \alpha]^{1/2} \exp \left[-\frac{\alpha (1 - \mu)}{2} \int_x^1 \frac{x [1 + 3\varphi(x)]}{1 - (1 - \mu) \alpha x^2} dx \right] \quad (10.62)$$

Definiendo ahora las variables adimensionales

$$\hat{F} \equiv \frac{F}{r_\Sigma} \quad (10.63)$$

$$\frac{d\hat{\Theta}}{ds} = r_\Sigma^2 \frac{d\Theta}{ds} \quad (10.64)$$

podemos escribir (10.22) como

$$\frac{d\hat{\Theta}}{ds} = \frac{-1}{x^2 e^{\tilde{\nu}/2}} \frac{d\hat{F}}{dx} \quad (10.65)$$

donde hemos omitido la tilde por simplicidad.

En la figura 10.2 hemos graficado $\frac{d\hat{\Theta}}{ds}$ como función de x para diferentes valores de μ . La tendencia a la agregación $\frac{d\hat{\Theta}}{ds} < 0$ en las zonas más interiores se aprecia claramente.

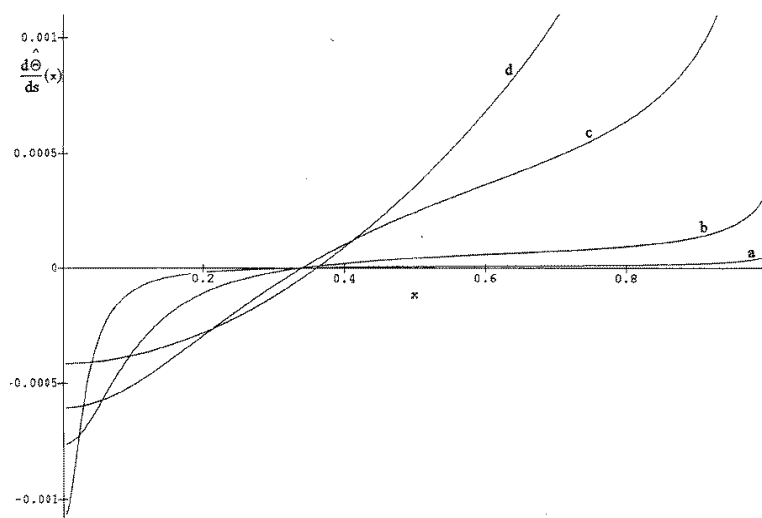


Figura 10.2: $\frac{d\hat{\Theta}}{ds}$ para el mismo modelo de la figura 10.1. Los factores de escala correspondientes a las figuras *a*, *b*, *c* y *d* son ahora 1, 7, 55, 363.

10.4 Fractura en el modelo de Di Prisco

La solución estática de Di Prisco et al. [36] corresponde a una distribución homogénea de densidad de energía, con una ecuación de estado para las tensiones de la forma

$$P_r - P_\perp = \frac{\delta \rho_0 r^2 \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho_0 r_\Sigma^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho_0 r^2\right)^{1/2}}{\left[3 \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho_0 r_\Sigma^2\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{\delta}{2} (r_\Sigma^2 - r^2)\right) \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho_0 r^2\right)^{1/2}\right]^2} \quad (10.66)$$

donde δ es una constante que mide la anisotropía del modelo.

La integración de (9.56) da para la presión radial

$$P_r = \rho_0 \frac{\left(1 + \frac{\delta}{2}(r_\Sigma^2 - r^2)\right) \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho_0 r_\Sigma^2\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho_0 r_\Sigma^2\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{\delta}{2}(r_\Sigma^2 - r^2)\right) \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2\right)^{1/2}} \quad (10.67)$$

Para establecer el rango de valores de los diferentes parámetros, para los cuales el cociente P/ρ_0 es positivo y finito en toda la esfera, consideraremos la siguiente expresión adimensional

$$\frac{P_r}{\rho_0} = \frac{(1 + \varepsilon(1 - x^2))(1 - nx^2)^{1/2} - (1 - n)^{1/2}}{3(1 - n)^{1/2} - (1 + \varepsilon(1 - x^2))(1 - nx^2)^{1/2}} \quad (10.68)$$

donde

$$x = \frac{r}{r_\Sigma} \quad ; \quad n = \frac{2M}{r_\Sigma} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\delta}{2}r_\Sigma^2 \quad (10.69)$$

El valor crítico de ε , para el cual P_r es singular en el origen, está dado por

$$\varepsilon = -1 \pm 3\sqrt{1 - n} \quad (10.70)$$

Por otra parte, como se observa fácilmente de (10.68), para $n = 1$ la presión radial es negativa. De manera que, a diferencia del modelo precedente, no es posible acercarse continuamente al límite $n = 1$.

El número de combinaciones de ε y n que conducen a valores positivos de la presión radial es muy grande. Sin embargo, los objetos más compactos se obtienen para $\varepsilon \approx -0.7$; que exhiben potenciales gravitacionales en la superficie tan grandes como $n \approx 0.97$.

Utilizando las variables x y μ ya definidas y el parámetro ε , podemos reescribir (10.67) como

$$P_r = \zeta(x)\rho \quad (10.71)$$

donde

$$\zeta(x) \equiv \frac{[1 + \varepsilon(1 - x^2)][1 - (1 - \mu)x^2]^{1/2} - \mu^{1/2}}{3\mu^{1/2} - [1 + \varepsilon(1 - x^2)][1 - (1 - \mu)x^2]^{1/2}} \quad (10.72)$$

Perturbaremos ahora nuestro sistema siguiendo el esquema ya establecido. Así,

$$\tilde{P}_r = \tilde{\rho}\zeta(x) = \alpha\rho_0\zeta(x) = \alpha P_r \quad (10.73)$$

A partir de (10.49) se obtiene

$$\frac{\tilde{\nu}'}{2} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_\Sigma \alpha \rho_0 x (1 + 3\zeta(x))}{1 - (1 - \mu)\alpha x^2} \quad (10.74)$$

y perturbando (10.66)

$$\tilde{P}_r - \tilde{P}_\perp = \frac{2\tilde{\varepsilon}\rho_0 x^2 [1 - (1 - \mu)\alpha]^{1/2} [1 - (1 - \mu)\alpha x^2]^{1/2}}{\left(3[1 - (1 - \mu)\alpha]^{1/2} - [1 + \tilde{\varepsilon}(1 - x^2)][1 - (1 - \mu)\alpha x^2]^{1/2}\right)^2} \quad (10.75)$$

A partir de (10.73)–(10.75), obtenemos la siguiente expresión para $\delta\hat{R}$

$$\begin{aligned} \delta\hat{R} \equiv \hat{R} = \frac{r_\Sigma R}{\rho_0} = \alpha \frac{d\zeta(x)}{dx} + \frac{(1 - \mu)}{2} \frac{\alpha^2 x (1 + \zeta(x)) (1 + 3\zeta(x))}{1 - (1 - \mu)\alpha x^2} + \\ \frac{4\tilde{\varepsilon}\alpha x [1 - (1 - \mu)\alpha]^{1/2} [1 - (1 - \mu)\alpha x^2]^{1/2}}{\left(3[1 - (1 - \mu)\alpha]^{1/2} - [1 + \tilde{\varepsilon}(1 - x^2)][1 - (1 - \mu)\alpha x^2]^{1/2}\right)^2} \end{aligned} \quad (10.76)$$

donde

$$\alpha = 1 + \delta\alpha \quad ; \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \delta\varepsilon \quad (10.77)$$

Como en el modelo precedente, el rango de los valores de μ está restringido por la condición de que P_r sea finita en el centro. En cuyo caso tendremos

$$\frac{(1 + \varepsilon)^2}{9} < \mu < 1 \quad ; \quad -1 < \varepsilon < 2 \quad (10.78)$$

Para asegurar la positividad de $P_r(0)$ debemos exigir adicionalmente

$$\varepsilon \in [0, 2) \quad (10.79)$$

En este modelo, igual que en el de Bowers y Liang, se producen fracturas bajo un amplio espectro de condiciones. La figura 10.3 muestra fracturas en un sistema inicialmente (antes de la perturbación) isótropo, para diferentes valores de μ . Nótese que para el objeto más compacto ($\mu = 0.11122$), R tiene dos ceros, el más interno de los cuales corresponde a una inversión. Como en el modelo anterior, pueden ocurrir fracturas para un amplio rango de valores de Γ y para configuraciones que inicialmente no son isótropas [36].

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con Bowers y Liang, en este modelo pueden ocurrir fracturas para $\delta\alpha > 0$, en cuyo caso, las fracturas en los objetos más compactos ocurren más lejos del centro, contrariamente a lo que ocurre para $\delta\alpha < 0$ (ver figura 10.4).

Finalmente, la derivada absoluta temporal de la expansión se muestra en la figura 10.5. El doble cambio de signo para $\mu = 0.11122$ está claramente relacionado con la inversión señalada en la figura 10.3.

Quisiéramos concluir este capítulo enfatizando lo que creemos es el punto esencial: la aparición de fracturas sólo es posible si se perturba la anisotropía local. En el caso específico de

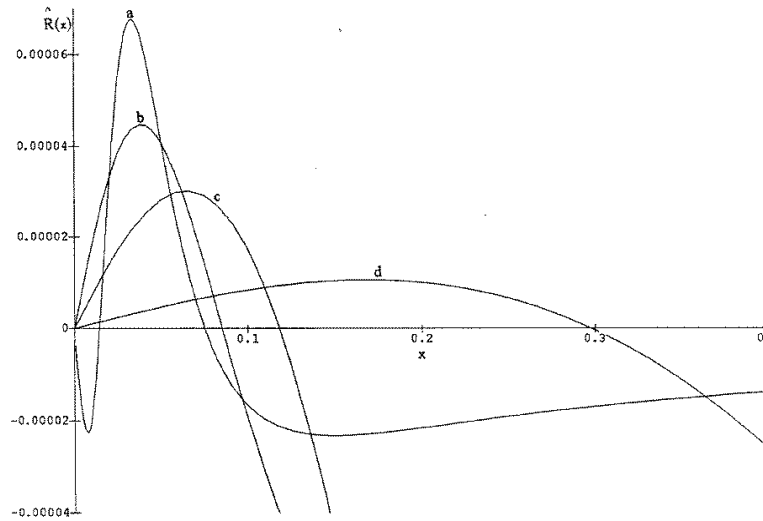


Figura 10.3: \hat{R} (para el modelo de Di Prisco) como función de x , para una configuración inicialmente isótropa ($\varepsilon = 0$). Con $\delta\alpha = -10^{-6}$; $\tilde{\varepsilon} = 0.45 \times 10^{-6}$. Las curvas a, b, c , y d corresponden a $\mu = 0.11122$; 0.1122 ; 0.122 y 0.22 . Los correspondientes factores de escala son 1, 6, 107, 140.

sistemas localmente isótropos, la fractura ocurriría sólo si se permiten desviaciones de esa condición.

En otras palabras, cualquier resultado dinámico obtenido sobre la base de isotropía local (absoluta) puede ser inestable ante perturbaciones de dicha condición.

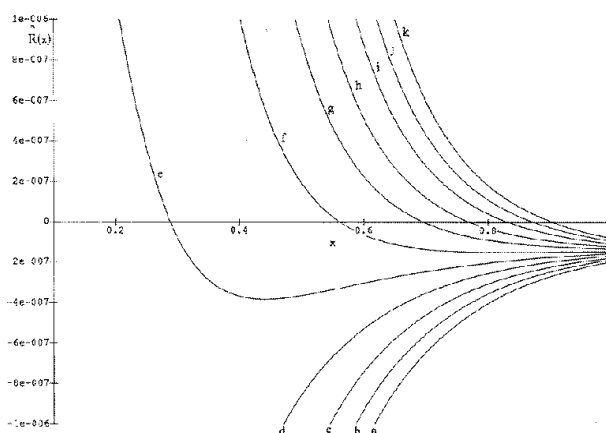


Figura 10.4: \hat{R} como función de x para el modelo de Di Prisco. El sistema es inicialmente anisótropo con $\varepsilon = 1.6$; $\Gamma = 0.3$; $\delta\alpha = 10^{-6}$ y $\tilde{\varepsilon} = 1.59999970$. Las curvas $a-k$ corresponden a $\mu = 0.852$; 0.842 ; 0.832 ; 0.822 ; 0.812 ; 0.802 ; 0.792 ; 0.782 ; 0.772 ; 0.762 ; 0.752 .

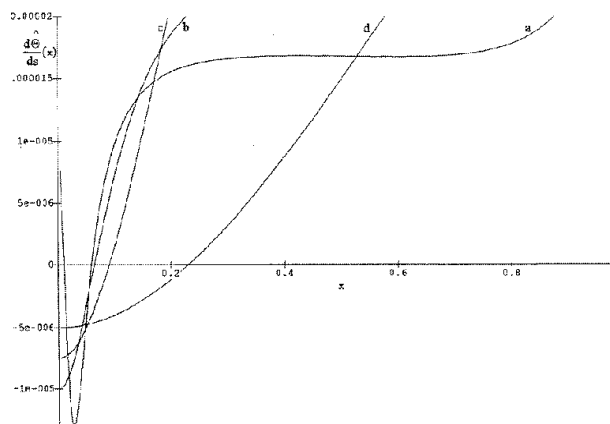


Figura 10.5: $\frac{d\hat{\Theta}}{ds}$ para la misma configuración de la figura 10.3. Los factores de escala correspondientes a las curvas $a-d$, son 1 ; 1.49 ; 5.43 ; 5.65

La masa de Tolman-Whittaker, la función masa y el tensor de Weyl

Para una distribución de materia estática o en régimen de evolución lenta (ver más adelante), el concepto de energía (masa) total está bien definido.

En efecto, sabemos que en el exterior de dicha distribución, el espacio tiempo está descrito por la métrica de Schwarzschild, y por lo tanto, como consecuencia de las condiciones de acoplamiento, la energía total del sistema es igual al parámetro M de la métrica de Schwarzschild [37].

Sin embargo, la definición de distribución de energía o del contenido de energía de una parte del fluido no es única.

Esta ambigüedad en la localización de la energía, que está presente incluso en la electrodinámica clásica [38], ha sido el objeto de largas discusiones en las cuales se han generado diferentes definiciones de energía ([39]–[47]).

En este capítulo vamos a contrastar dos diferentes definiciones de energía para distribuciones de materia esféricamente simétricas, estáticas o evolucionando lentamente, sin disipación. Ambas definiciones coinciden cuando se evalúan en la frontera de la distribución material, pero dan diferentes valores para regiones del interior del fluido (excepto en el caso

particular de la solución interior de Schwarzschild).

Las definiciones que estudiaremos son la función masa [37, 39] y la masa de Tolman-Whittaker [40, 42].

Esta elección ha sido motivada, por una parte, por el hecho de que desde los trabajos de May y White [48], la función masa ha sido usada de manera recurrente en la mayoría de los cálculos numéricos de colapso gravitacional relativista (ver [49]–[52] y las referencias que allí se incluyen). Por otra parte, la definición de Tolman-Whittaker es interesante ya que juega el papel de la masa gravitacional activa [53, 54].

Como veremos más adelante, la masa de Tolman-Whittaker parece describir mejor el concepto de masa que la función masa, al menos para el caso de fluidos anisótropos.

Como subproducto del estudio que aquí presentaremos, vamos a encontrar algunas expresiones que relacionan el tensor de Weyl con las variables físicas y con las dos definiciones de energía ya mencionadas. Dichas expresiones sugerirán una interpretación física para el tensor de Weyl.

11.1 El régimen de evolución lenta

Como ya mencionamos, los resultados de este capítulo se aplican no sólo al caso estático sino también al caso de evolución lenta.

Decimos que nuestra esfera evoluciona lentamente, si cambia muy poco en una escala de tiempo que es muy grande comparada con el tiempo típico en el cual el sistema reacciona a una perturbación del equilibrio hidrostático (este tiempo característico se llama tiempo hidrostático). De esta manera, a pesar de que las variables físicas y la métrica dependen del tiempo, nuestro sistema estará siempre en equilibrio

hidrostático (muy cerca de él) y su evolución se puede visualizar como una secuencia de modelos estáticos ligados por la ecuación (9.6).

Esta suposición de evolución lenta no es tan restrictiva como parece, ya que la escala de tiempo hidrostático es muy pequeña para casi cualquier fase de la evolución estelar. Así, vemos que es del orden de 27 minutos para el sol, 4.5 segundos para una enana blanca y 10^{-4} segundos para una estrella de neutrones de una masa solar y 10 Km de radio [2, 55]. Es bien conocido que cualquiera de las configuraciones estelares mencionadas cambia muy poco en escalas de tiempo muy grandes comparadas con sus respectivos tiempos hidrostáticos.

Veamos ahora qué condiciones sobre ω y la métrica impone la suposición de contracción lenta sin disipación.

Primero que nada, evolución lenta significa que la velocidad radial ω , medida por el observador Minkowskiano, es siempre mucho menor que la velocidad de la luz ($\omega \ll 1$). De manera que vamos a despreciar términos de orden $O(\omega^2)$. Entonces se tiene de (9.55) y (9.13)–(9.16) con $\omega^2 \approx 0$ y $Q = 0$

$$\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} = 8\pi r e^\nu \left[P'_r + (\rho + P_r) \frac{\nu'}{2} - 2 \frac{P_\perp - P_r}{r} \right] \quad (11.1)$$

Pero de acuerdo con (9.56), la expresión dentro del corchete en (11.1) debe ser cero si queremos que nuestro sistema, como lo exige la suposición de evolución lenta, esté siempre en equilibrio hidrostático. De manera que debemos exigir

$$\ddot{\lambda} \approx \dot{\nu}\dot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx 0 \quad (11.2)$$

A partir de (10.16) se deduce también que

$$\dot{\omega} \approx 0 \quad (11.3)$$

lo que implica que vamos a despreciar términos lineales en la aceleración. Esto último resulta más o menos evidente si exigimos que el sistema esté permanentemente en equilibrio hidrostático.

Nótese que las derivadas temporales de cualquier orden del lado izquierdo de la ecuación de equilibrio hidrostático deben ser cero, ya que de otra forma, el sistema se alejaría del equilibrio. Esto implica en particular que

$$\ddot{\nu} \approx 0 \quad (11.4)$$

Podemos ahora escribir las componentes del tensor de Weyl en la aproximación de evolución lenta.

Despreciando términos de orden $\dot{\lambda}\dot{\nu}$, $\dot{\lambda}^2$, $\dot{\nu}^2$, $\ddot{\lambda}$ y $\ddot{\nu}$, encontramos que todas las componentes diferentes de cero pueden expresarse por medio de C_{232}^3 . Se tiene

$$W \equiv \frac{r}{2} C_{232}^3 = \frac{r^3 e^{-\lambda}}{6} \left(\frac{e^\lambda}{r^2} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' - \nu'}{2r} \right) \quad (11.5)$$

Finalmente, tenemos que la expresión para la única componente relevante del tensor de deformación σ_{11} se transforma, a partir de (9.60) y usando las ecuaciones de campo, en

$$\sigma_{11} = \frac{4}{3} e^{\lambda/2} \left(-\omega' + \frac{\omega}{r} + \frac{\lambda' \omega}{2} \right) \quad (11.6)$$

11.2 La función masa y la masa de Tolman-Whittaker

Como consecuencia de las condiciones de acoplamiento, podemos escribir (9.28) en la forma

$$M = \frac{1}{2} \left(r R_{232}^3 \right)_\Sigma \quad (11.7)$$

donde M es el parámetro de Schwarzschild y la componente R_{232}^3 del tensor de Riemann está dada por

$$R_{232}^3 = 1 - e^{-\lambda} \quad (11.8)$$

La interpretación de M como la energía total dentro de la superficie Σ sugiere que la energía interior a una esfera de radio r , dentro de Σ , pueda definirse como [37, 39]

$$m(r, t) = \frac{1}{2} r R_{232}^3 \quad (11.9)$$

o, como en la ecuación (10.11), introducida en el capítulo 9

$$m(r, t) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr \quad (11.10)$$

De ahora en adelante nos referiremos a esta cantidad como la función masa.

A partir de la definición del tensor de Weyl

$$\begin{aligned} C_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= R_{\beta\gamma\delta}^\alpha - \frac{1}{2} R_\gamma^\alpha g_{\beta\delta} + \frac{1}{2} R_{\beta\gamma} \delta_\delta^\alpha - \frac{1}{2} R_{\beta\delta} \delta_\gamma^\alpha \\ &+ \frac{1}{2} R_\delta^\alpha g_{\beta\gamma} + \frac{1}{6} R (\delta_\gamma^\alpha g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma} \delta_\delta^\alpha) \end{aligned} \quad (11.11)$$

y usando las ecuaciones (9.3), (9.4), (11.5) y (11.9) se obtiene sin dificultad

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 (T_0^0 + T_1^1 - T_2^2) + W \quad (11.12)$$

Derivando (11.12) con respecto a r , y usando (11.10), tenemos

$$W' = -\frac{4}{3} \pi r^3 (T_0^0)' + \frac{4}{3} \pi [r^3 (T_2^2 - T_1^1)]' \quad (11.13)$$

e integrando

$$W = -\frac{4}{3} \pi \int_0^r r^3 (T_0^0)' dr + \frac{4}{3} \pi r^3 (T_2^2 - T_1^1) \quad (11.14)$$

sustituyendo (11.14) en (11.12), tenemos para m

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 T_0^0 - \frac{4}{3}\pi \int_0^r r^3 (T_0^0)' dr \quad (11.15)$$

Más adelante volveremos sobre estas expresiones.

Una definición alternativa para la energía total dentro de la superficie Σ fue propuesta por Tolman [40] y Whittaker [42],

$$m_{TW} = 4\pi \int_0^{r_\Sigma} r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} (T_0^0 - T_1^1 - 2T_2^2) dr \quad (11.16)$$

Tomando en cuenta que en el integral de (11.16) se utiliza el elemento de volumen propio $4\pi r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} dr$, resulta razonable identificar la cantidad en el paréntesis como la densidad de masa, y por lo tanto, definir la masa interior a una esfera de radio $r < r_\Sigma$, como

$$m_{TW}(r, t) = 4\pi \int_0^r r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} (T_0^0 - T_1^1 - 2T_2^2) dr \quad (11.17)$$

Antes de seguir adelante quisiéramos hacer dos comentarios:

1. La definición (11.16) fue propuesta por Tolman para sistemas estáticos y cuasi-estáticos, donde la condición de cuasi-estaticidad coincide totalmente con nuestra condición de evolución lenta [56].
2. La definición (11.16) presenta algunos problemas, como por ejemplo, que no es invariante bajo transformaciones de escala de tiempo [57] $t \rightarrow \tilde{t} = Ct$ donde C es constante, que dejan invariante las ecuaciones de las geodésicas. Sin embargo, el sentido físico de (11.17), puesto en evidencia más adelante, justifica su estudio

Volvamos ahora a (11.17), integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned}
 m_{TW} &= e^{(\nu+\lambda)/2} \int_0^r 4\pi r^2 T_0^0 dr \\
 &- \int_0^r \left[\left(e^{(\nu+\lambda)/2} \right)' \int_0^r 4\pi r^2 T_0^0 dr \right] dr \\
 &- \frac{4}{3} \pi r^3 (T_1^1 + 2T_2^2) e^{(\nu+\lambda)/2} \\
 &+ \frac{4}{3} \pi \int_0^r r^3 (T_1^1 + 2T_2^2)' e^{(\nu+\lambda)/2} dr \\
 &+ \frac{4}{3} \pi \int_0^r r^3 (T_1^1 + 2T_2^2) e^{(\nu+\lambda)/2} \left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) dr
 \end{aligned} \tag{11.18}$$

o, utilizando (11.10)

$$\begin{aligned}
 m_{TW} &= e^{(\nu+\lambda)/2} \left[m(r, t) - \frac{4}{3} \pi r^3 (T_1^1 + 2T_2^2) \right] \\
 &- \int_0^r e^{(\nu+\lambda)/2} \left(\frac{\nu' + \lambda'}{2} \right) \\
 &\times \left[m(r, t) - \frac{4}{3} \pi r^3 (T_1^1 + 2T_2^2) \right] dr \\
 &+ \int_0^r \frac{4}{3} \pi r^3 e^{(\nu+\lambda)/2} (T_1^1 + 2T_2^2)' dr
 \end{aligned} \tag{11.19}$$

En nuestro caso (9.13)–(9.15) implican

$$T_0^0 = \rho \quad ; \quad T_1^1 = -P_r \quad ; \quad T_2^2 = -P_\perp \tag{11.20}$$

Por otra parte, usando (10.49), la expresión

$$\lambda' = \frac{8\pi\rho r^3 - 2m}{r(r - 2m)} \tag{11.21}$$

fácilmente derivable de (9.3), y la ecuación de equilibrio hidrostático (9.56), podemos escribir (11.19) como

$$m_{TW} = e^{(\nu+\lambda)/2} (m + 4\pi P_r r^3) \tag{11.22}$$

Obsérvese que como consecuencia de las condiciones de acoplamiento

$$(P_r)_\Sigma = (\nu + \lambda)_\Sigma = 0 \quad (11.23)$$

se deduce que

$$(m_{TW})_\Sigma = m_\Sigma = M \quad (11.24)$$

como cabría esperar.

Una expresión que relacione m_{TW} con el tensor de Weyl se puede deducir inmediatamente por simple sustitución de (11.12) en (11.22). Sin embargo, una relación mucho más interesante entre ambas cantidades se puede deducir de la siguiente manera.

Sustituyendo T_0^0 , T_1^1 y T_2^2 en (11.17) por sus expresiones a través de las ecuaciones de campo (9.3)–(9.5), se obtiene

$$m_{TW} = \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)/2} \nu' r^2 \quad (11.25)$$

derivando (11.25) con respecto a r y usando las ecuaciones (9.4), (9.5) y (11.5) se llega a la siguiente ecuación diferencial para m_{TW}

$$r m'_{TW} - 3m_{TW} = e^{(\nu+\lambda)/2} [4\pi (P_\perp - P_r) r^3 - 3W] \quad (11.26)$$

de cuya integración se obtiene

$$m_{TW} = Cr^3 + r^3 \int_0^r e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{4\pi}{\tilde{r}} (P_\perp - P_r) - \frac{3}{\tilde{r}^4} W \right] d\tilde{r} \quad (11.27)$$

o, lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} m_{TW} = Cr^3 &+ r^3 \int_0^{r_\Sigma} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{4\pi}{\tilde{r}} (P_\perp - P_r) - \frac{3}{\tilde{r}^4} W \right] d\tilde{r} \\ &- r^3 \int_r^{r_\Sigma} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{4\pi}{\tilde{r}} (P_\perp - P_r) - \frac{3}{\tilde{r}^4} W \right] d\tilde{r} \end{aligned} \quad (11.28)$$

donde C es una constante de integración.

A partir de la condición de borde

$$(m_{TW})_{\Sigma} = M \quad (11.29)$$

obtenemos para C

$$C = \frac{M}{r_{\Sigma}^3} - \int_0^{r_{\Sigma}} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{4\pi}{\tilde{r}} (P_{\perp} - P_r) - \frac{3}{\tilde{r}^4} W \right] d\tilde{r} \quad (11.30)$$

Sustituyendo (11.30) en (11.28) se obtiene la expresión buscada

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_{\Sigma}} \right)^3 + r^3 \int_r^{r_{\Sigma}} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{3}{\tilde{r}^4} W - \frac{4\pi}{\tilde{r}} (P_{\perp} - P_r) \right] d\tilde{r} \quad (11.31)$$

Reemplazando W por su expresión en (11.14), podemos también escribir

$$\begin{aligned} m_{TW} = & M \left(\frac{r}{r_{\Sigma}} \right)^3 \\ & + r^3 \int_r^{r_{\Sigma}} e^{(\nu+\lambda)/2} \left[\frac{8\pi}{\tilde{r}} (P_r - P_{\perp}) - \frac{4\pi}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{r}^3 (T_0^0)' d\tilde{r} \right] d\tilde{r} \end{aligned} \quad (11.32)$$

Obsérvese que de acuerdo con (11.12), (11.15), (11.31) y (11.32), tanto m como m_{TW} se pueden descomponer en dos partes. Una de ellas, el primer término en (11.12), (11.15), (11.31) y (11.32), corresponde a la contribución incompresible del fluido localmente isótropo. Es decir, es la energía asociada a un fluido con distribución de energía homogénea y localmente isótropa. Los otros términos contienen contribuciones del tensor de Weyl, la inhomogeneidad en la distribución de energía y la anisotropía local.

Es interesante notar que la anisotropía local no contribuye explícitamente a la función masa (11.15), mientras que si lo hace en m_{TW} (11.32).

En el caso homogéneo y localmente isótropo (solución interior de Schwarzschild) tenemos

$$\rho' = W = P_{\perp} - P_r = 0 \quad (11.33)$$

se obtiene entonces, de (11.31) o (11.32)

$$m_{TW} = M \left(\frac{r}{r_{\Sigma}} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 = m \quad (11.34)$$

En general, por supuesto

$$m \neq m_{TW} \quad (11.35)$$

Antes de concluir esta sección, calcularemos la derivada convectiva (comóvil) de la función masa. Dicha derivada se define como

$$\frac{Dm}{Dt} \equiv \dot{m} + m' \frac{dr}{dt} \quad (11.36)$$

y mide la variación temporal de m para un elemento dado de fluido.

Derivando (10.9) con respecto a t se obtiene

$$\dot{\lambda} e^{-\lambda} = \frac{2\dot{m}}{r} \quad (11.37)$$

y usando (9.6) con (9.16) y (9.18)

$$\dot{m} = -4\pi r^2 (P_r + \rho) \frac{dr}{dt} \quad (11.38)$$

Por otra parte, derivando (11.10) con respecto a r , obtenemos

$$m' = 4\pi r^2 \rho \quad (11.39)$$

De manera que, combinando (11.38) y (11.39) como en (11.36), tendremos finalmente

$$\frac{Dm}{Dt} = -4\pi r^2 P_r \frac{dr}{dt} \quad (11.40)$$

Esta ecuación muestra cómo la presión radial realiza un trabajo sobre una esfera comóvil con el fluido, cambiando su función masa. Obsérvese que en el caso de un fluido anisótropo, el trabajo de las tensiones tangenciales no aparece en (11.40). Finalmente, si evaluamos (11.40) en la frontera del fluido, tendremos, por las condiciones de acoplamiento

$$\left(\frac{Dm}{Dt}\right)_\Sigma = 0 \quad (11.41)$$

como debe ser, puesto que estamos considerando sistemas sin disipación y por lo tanto la energía total debe ser constante. En las dos secciones siguientes ilustraremos la discusión con dos ejemplos.

11.3 Contracción lenta de una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa

Consideremos una esfera fluída homogénea ($\rho = \rho(t)$) y localmente isótropa ($P_\perp = P_r = P$), evolucionando lentamente. Puesto que las ecuaciones de campo (9.3)–(9.5) son las mismas que en el caso estático, la ecuación (9.56) debe satisfacerse, lo que por otra parte es obvio, ya que debemos exigir en el contexto de la aproximación lenta que el sistema esté siempre en equilibrio dinámico.

La integración de (9.56) con $\rho = \rho(t)$ es muy simple, y da

$$P = \rho \frac{\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2}} \quad (11.42)$$

que es, como habría que esperar, la misma expresión que se tiene para la solución interior de Schwarzschild.

Las siguientes relaciones también se obtienen simplemente

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \quad (11.43)$$

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho r_\Sigma^3 \quad (11.44)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2 \quad (11.45)$$

$$e^{\nu/2} = \frac{1}{2} \left[3 \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2 \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2 \right)^{1/2} \right] \quad (11.46)$$

Como es evidente de (11.14), (11.15) y (11.32), para este modelo

$$W = 0 \quad ; \quad m = m_{TW} \quad (11.47)$$

Vayamos ahora a la ecuación (11.40), usando (11.43), obtenemos

$$\frac{Dm}{Dt} \equiv \dot{m} + m' \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi}{3} \dot{\rho} r^3 + 4\pi \rho r^2 \frac{dr}{dt} = -4\pi P_r r^2 \frac{dr}{dt} \quad (11.48)$$

o bien

$$\frac{1}{3} \dot{\rho} r = -(\rho + P) \frac{dr}{dt} \quad (11.49)$$

Por otra parte, derivando (11.44) con respecto a t y recordando que la masa total M es constante, tenemos

$$\dot{\rho} = -3\rho \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right)_\Sigma \quad (11.50)$$

Igualando (11.49) y (11.50) encontramos una expresión para dr/dt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\rho r}{(\rho + P)} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right)_\Sigma \quad (11.51)$$

la cual, usando (9.18), (9.27), (9.28) y (11.42) se transforma en

$$\omega = \omega_{\Sigma} e^{(\lambda - \lambda_{\Sigma})/2} \frac{r}{r_{\Sigma}} \quad (11.52)$$

Podemos ahora calcular las componentes del tensor de deformación. Sustituyendo (11.52) en (11.6), encontramos en nuestra aproximación de evolución lenta

$$\sigma_{11} = 0 \quad (11.53)$$

lo que implica

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (11.54)$$

Así pues, la evolución lenta de nuestra esfera homogénea y localmente isótropa ocurre sin deformación (shear-free).

No es difícil ver que lo inverso también es cierto. En efecto, si $\sigma_{11} = 0$ entonces, la ecuación (11.52) se obtiene sin dificultad, y tenemos así cinco ecuaciones ((9.3)–(9.6), (11.52)) para cinco incógnitas $(\rho, P, \omega, \nu, \lambda)$.

En el límite Newtoniano (11.52) se transforma en

$$\omega = \left(\frac{\omega}{r} \right)_{\Sigma} r \quad (11.55)$$

que no es otra cosa que la bien conocida ley de contracción homóloga.

Finalmente, es instructivo calcular la derivada convectiva de la masa. Un cálculo simple a partir de (11.40), usando (9.18), (11.42) y (11.52) da

$$\begin{aligned} \frac{Dm}{Dt} &\equiv \frac{Dm_{TW}}{Dt} \\ &= \frac{3}{4} \omega_{\Sigma} n (1 - n)^{1/2} x^3 \left[(1 - n)^{1/2} - (1 - nx^2)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (11.56)$$

con

$$n \equiv \frac{2M}{r_\Sigma} < 1 \quad ; \quad x \equiv \frac{r}{r_\Sigma} \leq 1$$

Obsérvese que en el caso de contracción ($\omega_\Sigma < 0$), $Dm/Dt > 0$ para todo $r < r_\Sigma$.

11.4 Esfera homogénea sostenida sólo por tensiones tangenciales

Vamos ahora a considerar una esfera homogénea ($\rho = \rho(t)$) sostenida exclusivamente por tensiones tangenciales ($P_r = 0$) (la versión estática de este problema ha sido estudiada por Florides [58]).

Dicha solución corresponde al modelo de Bowers y Liang (ver sección 10.3 capítulo 12) con $h = 0$. Se obtiene entonces, a partir de (10.35) y (10.49)

$$e^\nu = \frac{\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2}} \quad (11.57)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2 \quad (11.58)$$

$$P_\perp = \frac{2\pi\rho^2 r^2}{3\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)} \quad (11.59)$$

Y a partir de (11.10), (11.22) y (11.12)

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad (11.60)$$

$$m_{TW} = m \left(\frac{1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2}{1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2} \right)^{3/4} \quad (11.61)$$

$$W = -\frac{8\pi^2 \rho^2 r^5}{9 \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho r^2\right)} \quad (11.62)$$

Además, usando (11.49) y (11.50) con $P = 0$, obtenemos para la velocidad

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{1 - \frac{8\pi}{3} \rho r_\Sigma^2}{1 - \frac{8\pi}{3} \rho r^2} \right)^{1/4} \frac{r}{r_\Sigma} \quad (11.63)$$

o, en coordenadas (t, r, θ, ϕ)

$$\frac{dr}{dt} = \omega_\Sigma \left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho r_\Sigma^2\right) \frac{r}{r_\Sigma} \quad (11.64)$$

Podemos calcular la derivada convectiva de m_{TW} sustituyendo (11.61) en (11.40). Tomando en cuenta que $Dm/Dt = 0$ se obtiene, después de un cálculo simple pero largo

$$\frac{Dm_{TW}}{Dt} = \frac{3}{8} \omega_\Sigma n^2 x^3 \frac{(1-n)^{3/4}}{(1-nx^2)^{7/4}} (1-x^2) \quad (11.65)$$

Como era de esperar

$$\left(\frac{Dm_{TW}}{Dt} \right)_\Sigma = 0 \quad (11.66)$$

Obsérvese que a partir de (11.49) con $P = 0$ y (11.50), se obtiene

$$\frac{dr_\Sigma}{r_\Sigma} = \frac{dr(t)}{r(t)} \quad (11.67)$$

donde $r(t)$ es la coordenada radial de un elemento dado del fluido. De manera que

$$\frac{r(t)}{r_\Sigma(t)} = \text{constante} \quad (11.68)$$

Exactamente igual a como ocurre en la contracción homóloga Newtoniana. Sin embargo, es importante enfatizar la diferencia entre este caso y el caso Newtoniano. En el primero, $r(t)$ y $r_\Sigma(t)$ definen la coordenada radial de un elemento dado de fluido y de la frontera de la distribución, respectivamente. En el caso Newtoniano, (11.68) se refiere al cociente de las distancias radiales. Esta diferencia se pone también de manifiesto por el hecho de que la velocidad dr/dt es lineal en r , mientras que ω no lo es, excepto, por supuesto, en el límite Newtoniano.

Nótese que en este caso, la deformación del flujo no es cero. En efecto, sustituyendo (11.58) y (11.63) en (11.6) obtenemos

$$\sigma_{11} = \frac{16}{9} \pi \rho \left(\frac{\omega}{r} \right)_\Sigma r^2 \frac{(1-n)^{1/4}}{(1-nx^2)^{7/4}} \quad (11.69)$$

Podemos ahora discutir las diferencias entre las dos definiciones de masa consideradas, a la luz de los dos modelos estudiados, el homogéneo localmente isótropo (hli) y el homogéneo con presiones tangenciales (hpt).

En ambos casos

$$m = M x^3 \quad (11.70)$$

En el caso hli ambas masas coinciden

$$m = m_{TW} = M x^3 \quad (11.71)$$

Sin embargo, en el caso hpt, éstas se relacionan como en (11.61), o equivalentemente

$$m_{TW} = M \left(\frac{1-n}{1-nx^2} \right)^{3/4} x^3 \quad (11.72)$$

Consideremos en este caso (hpt) diferentes observadores comóviles con el fluido para diferentes valores de x . A medida

que pasa el tiempo, m permanece constante para cada uno de estos observadores, como es evidente de (11.40) o de (11.67) y (11.70). Sin embargo, a medida que n aumenta (contracción), m_{TW} disminuye para todo x excepto $x = 1$ que define la frontera y donde

$$(m_{TW})_{\Sigma} = m_{\Sigma} = M = \text{constante} \quad (11.73)$$

(ver figura 11.1).

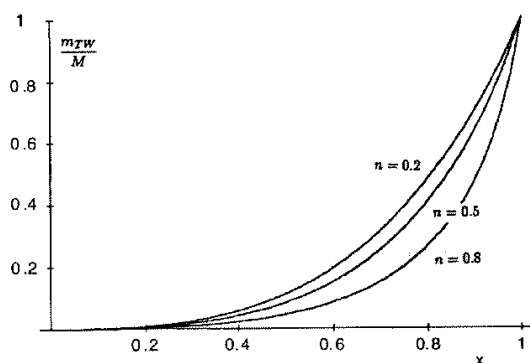


Figura 11.1: $\frac{m_{TW}}{M}$ función de x para la esfera sin presión radial.

Esta disminución también queda evidenciada en (11.65) como lo indica la figura 11.2. En otras palabras, a medida que la esfera se vuelve más compacta, cualquier observador interior a Σ y comóvil con el fluido, no detectará ningún cambio en m , sin embargo, observará un decrecimiento de m_{TW} .

Por el contrario, en el caso hli, un observador comóvil con el fluido observará cambios tanto en m como en m_{TW} (puesto que son iguales en este caso). Más aún, dicho observador

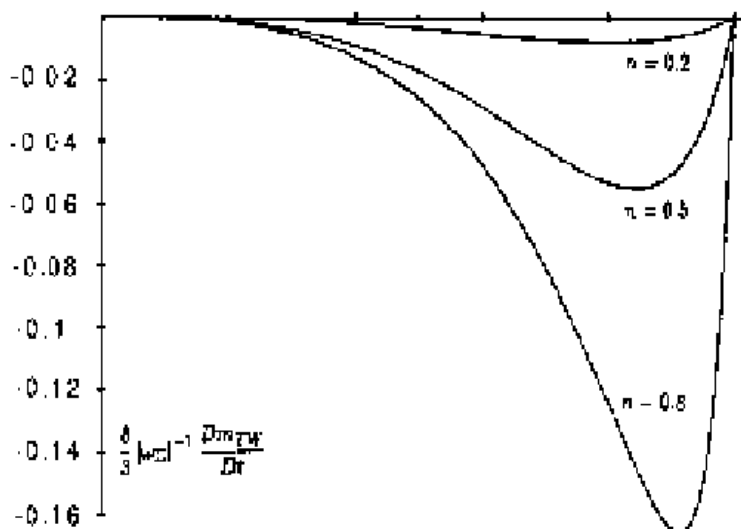


Figura 11.2: $\frac{Dm_{TW}}{Dt} \frac{8}{3} |\omega_{\Sigma}|^{-1}$ función de x para la esfera sin presión radial.

detectará incrementos en la masa para $r < r_{\Sigma}$, en el proceso de contracción, a diferencia del caso hpt.

Volvamos ahora a la expresión para la presión radial en el caso hli, (ver ecuación (11.42)). Obsérvese que para $n = 8/9$, dicha expresión es singular en $r = 0$. Es decir, hay un valor límite en el grado de compactación, más allá del cual, el sistema no satisface la ecuación de equilibrio hidrostático. Es sabido que para cualquier fluido esféricamente simétrico, con presiones isotropas, y una distribución de densidad de energía arbitraria, existe un límite en el grado de compactación de la esfera, de acuerdo con el cual, no es posible acercar r_{Σ} de manera continua a $2M$ [33].

Sin embargo, en el caso hpt tal limitación no existe y el límite

continuo de r_Σ a $2M$ es posible.

Para entender esta importante diferencia de comportamiento en ambos casos, vayamos por un momento a la ecuación (9.56). El término gravitacional en dicha ecuación (el primero del lado derecho) se puede escribir, de acuerdo con (11.25), como

$$-(\rho + P_r) \frac{m_{TW}}{r^2} e^{(\lambda-\nu)/2} \quad (11.74)$$

Por otra parte, podemos escribir la ecuación (9.54) (en el caso de evolución lenta localmente isótropo) como

$$a^\mu (\rho + P_r) = -P^{\mu\nu} P_{r,\nu} \quad (11.75)$$

por lo que es razonable considerar el término $(\rho + P_r)$ como la densidad de masa inercial, o en virtud del principio de equivalencia, como la densidad de masa gravitacional pasiva. En ese caso (11.74) nos indica que m_{TW} debe ser proporcional a la masa gravitacional activa. Entonces, para cualquier observador comóvil con el fluido, e interior a Σ , la disminución de m_{TW} a medida que el sistema se compacta, en el caso hpt, explicaría la mayor estabilidad de dicho modelo en comparación con el caso hli, para el cual $m_{TW}(m)$ aumenta en el proceso de contracción.

Por todo lo anterior, parece que m_{TW} es una definición más adecuada que m para definir la energía interior a un cierto radio r , al menos para un fluido anisótropo. Esto también se evidencia del hecho de que para la misma distribución de densidad de energía, m es igual, independientemente de la anisotropía local. También, como ya mencionamos, los cambios en m de una esfera comóvil con el fluido no incluyen el trabajo realizado por las presiones tangenciales (ver ecuación (11.36)).

Otra diferencia importante entre m_{TW} y m aparece cuando se introducen fenómenos de superficie [59]. En efecto, la tensión superficial aparece explícitamente en m_{TW} (ver ecuación (11.22)) mientras que en la definición de m (ver ecuación (11.10)) los efectos de superficie se manifiestan a través del comportamiento tipo función delta en la densidad de energía sobre Σ . Es claro que ambas definiciones no coinciden, en este caso, al evaluarlas en Σ . Evidentemente, los fenómenos de superficie no aparecen cuando evaluamos m desde el lado interior de Σ mientras que sí lo hacen en m_{TW} .

Finalmente, nótese que el tensor de Weyl se expresa a través de la inhomogeneidad en la distribución de la energía y de la anisotropía local (ver ecuación (11.14)). Lo que sugiere que dicho tensor, de alguna manera, mide la deformación del fluido [56].

Esta asociación entre W y la deformación del fluido viene dada por el análisis de un sólido elástico autogravitante (Newtoniano) para el cual, el tensor de deformaciones desaparece idénticamente si la densidad es homogénea y las tensiones son iguales [56, 60].

Conducción térmica en la aproximación de evolución lenta

En este capítulo estudiaremos algunos efectos que se producen durante la evolución lenta de sistemas autogravitantes que disipan energía a través de un flujo radial de calor.

Así pues, vamos a seguir considerando como válidas las relaciones (11.2), (11.3) y (11.4). Adicionalmente, se deduce inmediatamente de (9.6) y (9.16) que

$$Q \approx O(\omega) \quad (12.1)$$

de manera que términos de orden Q^2 ó \dot{Q} , son despreciables. A partir de (9.60) y las ecuaciones de campo, encontramos para la componente σ_{11} de la deformación

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{2\sigma_{22}}{r^2}e^\lambda = -\frac{2\sigma_{33}}{r^2 \sin^2 \theta}e^\lambda \\ &= -\frac{4}{3}e^{\lambda/2} \left(\omega' - \frac{\omega \lambda'}{2} - \frac{\omega}{r} - 4\pi r Q e^{3\lambda/2} \right) \end{aligned} \quad (12.2)$$

Podemos integrar formalmente (12.2), y obtener

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) e^{(\lambda-\lambda_\Sigma)/2} - 4\pi r e^{\lambda/2} \int_r^{r_\Sigma} \left(Q e^\lambda - \frac{3\sigma_{11}}{16\pi r} e^{-\lambda} \right) dr \quad (12.3)$$

12.1 Sistemas sin deformación

El primer modelo que consideraremos corresponde al caso sin deformación ($\sigma_{11} = 0$). De manera que de acuerdo con (12.3)

$$\omega = \left[\frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma} e^{-\lambda_\Sigma/2} - \int_r^{r_\Sigma} 4\pi Q e^\lambda dr \right] e^{\lambda/2} r \quad (12.4)$$

El flujo de calor q^μ se relaciona con el gradiente de temperatura a través de la ecuación relativista de Maxwell-Fourier [61, 62]

$$q^\mu = \kappa P^{\mu\nu} (T_{,\nu} - T a_\nu) \quad (12.5)$$

cuya componente radial es

$$q^1 = Q = -\kappa e^{-\lambda} \left(T' + \frac{T\nu'}{2} \right) \quad (12.6)$$

donde T es la temperatura y κ denota el coeficiente de conducción.

Introduciendo (12.6) en (12.4) y usando (9.28) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma} \left(1 - \frac{2M(u)}{r_\Sigma} \right)^{1/2} + 4\pi\kappa (T_\Sigma - T) \right. \\ &\quad \left. + 2\pi\kappa \int_r^{r_\Sigma} T\nu' dr \right] e^{\lambda/2} r \end{aligned} \quad (12.7)$$

En el límite Newtoniano, tenemos que $M(u) \approx \lambda \approx \nu \approx 0$ y por lo tanto se obtiene la siguiente expresión para ω

$$\omega_{Newt} = \frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma} r + 4\pi\kappa (T_\Sigma - T) r \quad (12.8)$$

Así pues, en este caso, a diferencia del caso no disipativo [56], el colapso sin deformación no está descrito por una ecuación lineal en r , típica de la contracción homóloga.

Por otra parte, el signo de ω , para cualquier valor de r , no tiene que ser necesariamente el mismo de ω_Σ (como ocurre en la evolución lenta no disipativa). En particular, para gradientes de temperatura suficientemente grandes (negativos) podemos tener $\omega_\Sigma > 0$, $\omega_{Newt} < 0$.

En otras palabras, el sistema puede evolucionar de tal manera que las capas interiores colapsan mientras las externas se expanden.

Este efecto, que llamaremos “peeling” térmico, también está presente en el régimen relativista, siempre y cuando el tercer término a la derecha de (12.7) no sea muy grande.

Si el campo gravitacional es muy fuerte (siempre en la aproximación de evolución lenta) entonces el tercer término en (12.7) prevalecerá sobre los otros dos. Puesto que dicho término es siempre positivo definido, esto implica que ω , para cualquier valor de $r < r_\Sigma$ y cualquier valor de ω_Σ , será positivo. Es decir, el fluido estará en expansión.

A la misma conclusión se llega a partir de (12.4) y (12.6).

En efecto, si el campo gravitacional es muy intenso entonces el flujo de calor se hace negativo (dirigido hacia el centro), de manera que el segundo término a la derecha en (12.4) se hace positivo. Puesto que $e^{-\lambda_\Sigma/2}$ es pequeño en el límite de campo fuerte, está claro que ω será positivo para cualquier valor de $r < r_\Sigma$. Todo esto será válido, por supuesto, siempre y cuando el régimen de evolución lenta sea compatible con la presencia de campos gravitacionales intensos.

Aunque en el ejemplo que acabamos de analizar la deformación es nula, mostraremos en los dos casos que siguen, que los efectos arriba mencionados no dependen de esa condición. Más aún, en el segundo ejemplo, el radio de la configuración puede aproximarse arbitrariamente a $2M$ sin que el sistema

abandone el régimen de evolución lenta.

12.2 El fluido homogéneo y localmente isótropo

Consideremos ahora una esfera fluída homogénea ($\rho = \rho(t)$) y localmente isótropa ($P_{\perp} = P_r = P$) disipando energía en evolución lenta.

Es fácil darse cuenta de que las ecuaciones (11.43)–(11.46) del caso no disipativo se aplican aquí.

Por otra parte, un cálculo similar al que conduce a (11.40), nos da para la derivada convectiva en este caso

$$\frac{Dm}{Dt} = -4\pi r^2 \left(P \frac{dr}{dt} + Q e^{\nu/2} \right) \quad (12.9)$$

El cambio de la masa total viene entonces dado por

$$\frac{DM}{Dt} = -4\pi r_{\Sigma}^2 Q_{\Sigma} \left(1 - \frac{2M}{r_{\Sigma}} \right)^{1/2} + O(\omega^2) \quad (12.10)$$

donde hemos usado las condiciones de acoplamiento.

Otra expresión equivalente a (12.9) se puede obtener a partir de la definición de derivada convectiva (11.36).

Derivando (11.43) con respecto a t y r e igualando con (12.9) podemos obtener

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{r} \left[\frac{dr}{dt} (\rho + P) + Q e^{\nu/2} \right] \quad (12.11)$$

o, evaluando en $r = r_{\Sigma}$

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{r_{\Sigma}} \left[\dot{r}_{\Sigma} (\rho + P)_{\Sigma} + Q_{\Sigma} e^{\nu_{\Sigma}/2} \right] \quad (12.12)$$

La presión debe satisfacer una ecuación igual a (9.56) con $(P_{\perp} = P_r)$ con la condición (9.53).

Es inmediato verificar que

$$P = P(Q = 0) + O(\omega) \quad (12.13)$$

donde $P(Q = 0)$ está dada por la expresión (11.42).

Puesto que P aparece en (12.11) y (12.12) multiplicando términos de orden $O(\omega)$, podemos despreciar el último término de la derecha en (12.13).

En efecto, introduciendo (11.42) en (12.11) y (12.12), obtenemos (usando (9.18))

$$\omega = \omega_{\Sigma} \left(\frac{r}{r_{\Sigma}} \right) e^{(\lambda - \lambda_{\Sigma})/2} + \frac{Q_{\Sigma} r}{r_{\Sigma} \rho} e^{\lambda/2} - \frac{Q}{\rho} e^{\nu/2} e^{(\lambda + \lambda_{\Sigma})/2} \quad (12.14)$$

Así pues, vemos que el último término en (12.14) prevalecerá sobre los otros dos en el caso de campos gravitacionales muy intensos. Sin embargo, hay que notar que en este modelo no podemos considerar campos gravitacionales arbitrariamente intensos, ya que para valores $2M/r_{\Sigma} = 8/9$ la presión se hace singular en el centro.

Evidentemente, para este valor del potencial en la superficie, no podemos afirmar que el flujo de calor para cualquier r sea necesariamente negativo; ni por lo tanto, que la velocidad de cualquier elemento de fluido sea positiva para el valor crítico de $8/9$.

Por otra parte, es posible exhibir el efecto de “peeling” térmico en este modelo. Para ello supondremos la siguiente función de prueba para el flujo de calor

$$4\pi r^2 Q e^{\nu/2} = \xi m \quad (12.15)$$

donde el “factor de opacidad” ξ está dado por

$$\xi = \frac{\eta e^{-r/r_\Sigma}}{M} \quad (12.16)$$

y η es un factor numérico de orden ω . Sustituyendo (12.15) en (12.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \omega = & \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) e^{\lambda/2} \frac{1}{(1 - 2M/r_\Sigma)^{1/2}} \\ & \times \left[\omega_\Sigma \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right) - \frac{\eta r_\Sigma}{3eM} \left(e^{1-(r/r_\Sigma)} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (12.17)$$

Las figuras 12.1 y 12.2 muestran ω como función de r/r_Σ para diferentes valores del potencial gravitacional en la superficie. Nótese que a medida que este último crece, el “peeling” involucra más capas de la esfera, hasta que el potencial alcanza el valor $5/18$. A partir de allí, la tendencia se revierte.

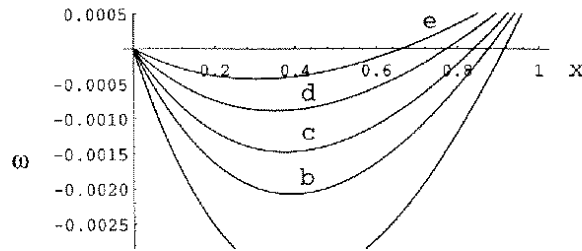


Figura 12.1: ω como función de x para el modelo localmente isótropo y $\eta = 10^{-3}$. Las curvas a-e corresponden a $M/r_\Sigma = 1/90; 1/60; 1/45; 1/30; 1/18$; respectivamente.

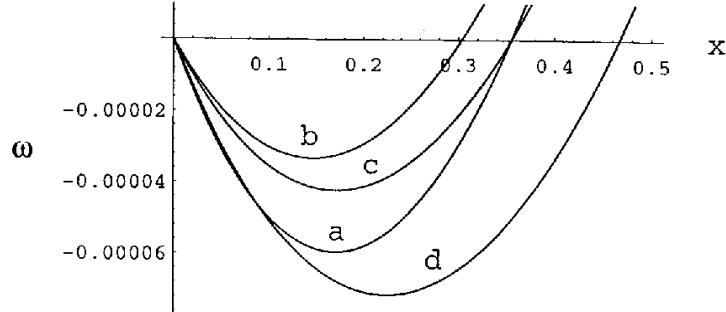


Figura 12.2: Igual que la figura 12.1, pero ahora las curvas $a-d$ corresponden a $M/r_\Sigma = 3/18; 5/18; 6/18; 7/18$.

12.3 El modelo de Florides con disipación

Consideremos ahora el modelo estudiado en la sección 11.4, con la inclusión de disipación.

Es evidente que las ecuaciones (11.57)–(11.60) siguen siendo válidas. Entonces, las ecuaciones (12.11) y (12.12) también lo son para este modelo (con $P = 0$).

Obtenemos así, para ω

$$\omega = \left[\frac{Q_\Sigma}{\rho} e^{\nu_\Sigma/2} \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) - \frac{Q}{\rho} e^{\nu/2} + \omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) e^{(\nu_\Sigma - \lambda_\Sigma)/2} \right] e^{(\lambda - \nu)/2} \quad (12.18)$$

Sin embargo, como la presión radial es nula en toda la esfera, las condiciones de acoplamiento implican

$$Q_\Sigma = 0 \quad (12.19)$$

por lo que podemos escribir (12.18) como

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) \frac{(1 - 2M/r_\Sigma)^{1/4}}{(1 - 2m/r)^{1/4}} - \frac{Q}{\rho} \frac{1}{(1 - 2m/r)^{1/2}} \quad (12.20)$$

Como ya observamos en el capítulo anterior, en este modelo, r_Σ puede tomar valores arbitrariamente cercanos a $2M$ sin que el sistema abandone el régimen de evolución lenta.

Por otra parte, está claro a partir de (10.49), que el término “gravitacional” prevalecerá en (12.6) sobre el gradiente de temperatura en algún momento de la contracción, lo que conducirá a un flujo de calor negativo. Esto a su vez, implicará que ω será positivo para cualquier elemento de fluido, ya que el segundo término a la derecha en (12.20) prevalecerá sobre el primero en el límite $r_\Sigma \rightarrow 2M$.

Finalmente, para exhibir el “peeling” térmico en este modelo, consideremos la siguiente función de prueba

$$4\pi r^2 Q e^{\nu/2} = \frac{\eta}{M} \left(e^{1-(r/r_\Sigma)} - 1 \right) \quad (12.21)$$

donde, como en el ejemplo anterior, η es un factor numérico de orden ω .

Entonces obtenemos para ω

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{r/r_\Sigma}{(1 - 2m/r)^{1/4} (1 - 2M/r_\Sigma)^{3/4}} \\ &\times \left[\omega_\Sigma \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right) + \frac{\eta}{3M/r_\Sigma} \left(1 - e^{1-(r/r_\Sigma)} \right) \right] \end{aligned} \quad (12.22)$$

La figura 12.3 muestra el “peeling” para diferentes potenciales gravitacionales en la superficie. Al igual que en el ejemplo anterior, el “peeling” va desplazándose al interior a medida que aumenta $2M/r_\Sigma$, sin embargo, a partir de un cierto valor de este parámetro, dicha tendencia se revierte.

Quisiéramos concluir este capítulo con las siguientes observaciones:

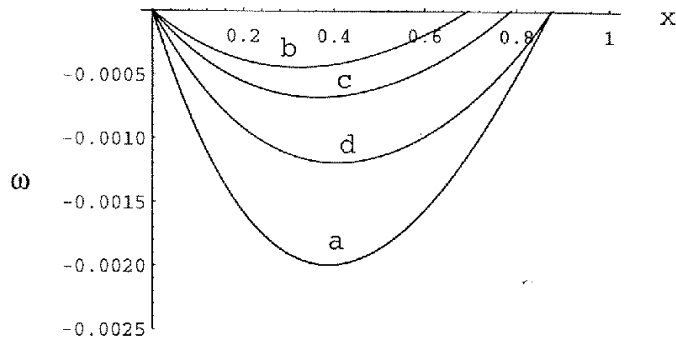


Figura 12.3: ω como función de x para el modelo sin presión radial y $\eta = 10^{-3}$. Las curvas a – d corresponden a $M/r_\Sigma = 1/20; 6/20; 8/20; 9/20$.

1. El mecanismo físico detrás de la aparición del “peeling” térmico es, básicamente, el mismo invocado por Renzini et al. [63] para explicar la formación de gigantes rojas.

En ese caso hay un incremento de la opacidad con la coordenada radial, que conduce a una disminución de la luminosidad. Como consecuencia de ello, parte del flujo de energía radiada es atrapada por las capas externas, causando la expansión de estas últimas.

Aunque está claro que se trata del mismo mecanismo responsable del “peeling”, como se puede ver de (12.14) y (12.20), esta explicación sobre el origen de las gigantes rojas ha sido cuestionada [64]. Por lo tanto, es prematuro afirmar que es el “peeling” térmico la respuesta al problema del origen de las gigantes rojas. (Para mayor información sobre el tema ver [65], [66] y las re-

ferencias que allí se citan.)

2. Debemos enfatizar el hecho de que los efectos descritos en este capítulo se predicen bajo el estricto cumplimiento de la aproximación de evolución lenta.
3. La aparición de flujos negativos de calor ha sido puesta en evidencia en algunos modelos obtenidos en el caso dinámico (fuera del equilibrio hidrostático) [67].
4. Nótese que los términos de relajación son de orden $O(\dot{Q}) \approx O(\dot{\omega})$ y por lo tanto han desaparecido en el contexto de la presente aproximación (ver próximo capítulo).

Evolución térmica y tiempos de relajación

Como mencionamos en el capítulo 9, en la teoría de los núcleos estelares es usual suponer que el flujo de radiación (y de conducción térmica) es proporcional al gradiente de temperatura (Ley de Maxwell-Fourier, o Eckart-Landau en relatividad general).

Sin embargo, es bien conocido que la Ley de Maxwell-Fourier conduce a una ecuación parabólica para la temperatura (ecuación de difusión) que predice la propagación de perturbaciones con velocidad infinita [68]. Este hecho se encuentra en el origen de las patologías que presentan los enfoques de Eckart [61] y Landau [62], basados en extensiones de la Ley de Maxwell-Fourier a la relatividad.

Para superar estas dificultades, diferentes teorías, con tiempos de relajación distintos de cero, han sido propuestas en el pasado [69]–[72]. Todas estas teorías proveen una ecuación para el transporte de calor que no es del tipo Maxwell-Fourier y que conduce a una ecuación de tipo hiperbólico para la propagación de la perturbación térmica.

En este capítulo vamos a comentar diferentes resultados obtenidos en el estudio de sistemas autogravitantes disipando energía, utilizando como ecuación de transporte una ecuación que incluye tiempos de relajación.

13.1 Ondas de calor y la ecuación de Cattaneo

Consideremos primero la situación puramente clásica.

A partir de la ley de Maxwell-Fourier

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T, \quad (13.1)$$

una ecuación constitutiva entre densidad de energía interna e y temperatura

$$de = \gamma dT, \quad (13.2)$$

y la ecuación de continuidad

$$\frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}, \quad (13.3)$$

se obtiene sin dificultad

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\gamma} \nabla^2 T \quad (13.4)$$

donde γ es la capacidad calórica por unidad de volumen.

El origen del comportamiento acausal de (13.4) se encuentra en (13.1), donde se ha supuesto que el flujo de calor y el gradiente de temperatura aparecen simultáneamente.

Sin embargo, está claro que una vez aparecido el gradiente de temperatura, es necesario un cierto tiempo (tiempo de relajación) para el establecimiento del flujo de calor. Resulta también evidente, que dicho tiempo debe ser proporcional al camino libre medio de las partículas responsables de la conducción.

A pesar de esto, despreciar el tiempo de relajación es, en muchos casos, bastante razonable, por cuanto para la mayoría

de los materiales en condiciones usuales, dicho tiempo de relajación es muy pequeño ($\approx 10^{-11}s$ para interacciones fonón-electrón y $\approx 10^{-13}s$ para interacciones fonón-fonón a temperatura ambiente) [73].

Existen sin embargo, situaciones en las cuales los tiempos de relajación no son despreciables. Así por ejemplo, para He^2 superfluido, el tiempo de relajación es del orden de $10^{-3}s$ para $1.2K$ [74].

Por otra parte, en regiones estelares muy densas y degeneradas, la conductividad térmica está dominada por electrones, cuyo camino libre medio es bastante grande, debido al hecho de que después de cada colisión, la energía y el momento de dichos electrones tienen que estar por encima del nivel de Fermi, lo que hace que dichas colisiones sean poco probables, en cuyo caso los tiempos de relajación pueden no ser despreciables (ver más adelante).

El problema de la propagación de calor para tiempos del orden del tiempo de relajación ha sido objeto de intensas y largas discusiones a partir del trabajo de Maxwell [75] (ver [68] y las referencias allí presentadas).

Una ecuación para el flujo de calor, que conduce a una ecuación hiperbólica para la propagación de la perturbación térmica, es

$$\tau \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T \quad (13.5)$$

donde τ es el tiempo de relajación, y a partir de la cual se obtiene sin dificultad

$$\frac{\kappa}{\tau \gamma} \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13.6)$$

que es la bien conocida ecuación del telégrafo, y que da buena cuenta de los resultados experimentales sobre propagación de

pulsos de calor en He^2 [76].

La ecuación (13.5) fue derivada por primera vez por Cattaneo [77] a partir de la teoría cinética de los gases, y reobtenida posteriormente por muchos investigadores (ver [68]).

Obsérvese, que desde un punto de vista “*naif*” se puede deducir (13.5) a partir de (13.1), suponiendo que \vec{q} aparece un tiempo τ después de la aparición del gradiente de temperatura, y desarrollando \vec{q} en serie de potencias de τ . El orden cero de este desarrollo, corresponde a Maxwell-Fourier, mientras que el primer orden nos da la ecuación de Cattaneo.

La ecuación (13.5) también se puede escribir como un integral sobre la “historia” del gradiente de temperatura

$$\vec{q} = -\frac{\kappa}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(t-t')}{\tau}\right) \vec{\nabla}T(\vec{x}', t') dt' \quad (13.7)$$

En general, si escribimos

$$\vec{q} = -\int_{-\infty}^t S(t-t') \vec{\nabla}T(\vec{x}', t') dt' \quad (13.8)$$

diferentes elecciones de S , conducen a diferentes modelos constitutivos. Así por ejemplo, si

$$S = \kappa \delta(t-t') \quad (13.9)$$

recuperamos Maxwell-Fourier, mientras que si

$$S = \frac{\kappa}{\tau} \exp\left(-\frac{(t-t')}{\tau}\right) \quad (13.10)$$

obtenemos Cattaneo.

De lo anterior queda claro que S mide la “memoria” del material con respecto a la historia del gradiente de temperatura.

En un extremo tenemos la ley de Maxwell-Fourier, que corresponde a la completa ausencia de memoria (ver ecuación (13.9)), y que conduce a la ecuación de difusión (ver ecuación (13.4)), mientras que en el otro extremo ($S = \text{constante}$), tenemos un material con memoria infinita, para el cual se obtiene la ecuación de onda usual, sin atenuación.

Entre estos dos extremos está la ecuación de Cattaneo, que describe sistemas cuya historia térmica está caracterizada por (13.10), y que conduce a la ecuación del telégrafo (13.6).

13.2 Tiempo de relajación para una estrella de neutrones

Como mencionamos anteriormente, es de esperar que el tiempo de relajación para materia degenerada pueda alcanzar valores no despreciables, debido al incremento en el camino libre medio de los electrones.

A continuación presentaremos una estimación de τ que confirma nuestras sospechas.

En efecto, a partir de la ecuación (13.6) se obtiene

$$\tau = \frac{\kappa}{v^2 \gamma} \quad (13.11)$$

donde v es la velocidad de la onda térmica.

Si la conductividad está dominada por electrones, entonces podemos adoptar para κ la expresión [78]

$$\kappa \approx 10^{23} [\rho / 10^{14} \text{ g cm}^{-3}] [10^8 \text{ K} / T] \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (13.12)$$

y para la capacidad calórica

$$c_V \equiv \gamma V = \alpha T \quad (13.13)$$

donde V denota el volumen, y para el coeficiente α (que es modelo dependiente), tomaremos el valor [79]

$$\alpha \approx 10^{29} \text{ erg } K^{-2} \quad (13.14)$$

Sustituyendo (13.12)–(13.14) en (13.11) obtenemos

$$\tau \approx \frac{10^{20}}{[T^2][v^2]} s \quad (13.15)$$

donde $[T]$ y $[v]$ son los valores numéricos de la temperatura y la velocidad de la onda térmica, medidos en K y $cm s^{-1}$. Además hemos supuesto $\rho \approx 10^{14} g cm^{-3}$ y para el radio del núcleo degenerado tomamos $R \approx 10 Km$. En ese caso, tomando para v su límite superior

$$v \approx 3 \times 10^{10} cm s^{-1} \quad (13.16)$$

tendremos

$$\tau \approx 10^{-4} s \quad (13.17)$$

para temperaturas del orden de $[T] \approx 10^2$, lo que posiblemente sea un valor muy bajo, y correspondería a las últimas fases de la evolución de una estrella de neutrones (ver [79]).

Sin embargo, para un valor más razonable de v , tal como

$$v \approx 10^3 cm s^{-1} \quad (13.18)$$

que corresponde a la velocidad del segundo sonido en helio superfluido, observamos que para temperaturas tan altas como $T \approx 10^9 K$, se obtiene

$$\tau \approx 10^{-4} s \quad (13.19)$$

Para $T \approx 10^6 K$, los tiempos de relajación pueden ser tan altos como

$$\tau \approx 10^2 s \quad (13.20)$$

Por otra parte, un estimado presentado por Harwit para materia degenerada a $T \approx 10^7 K$, da tiempos de relajación del orden del segundo [80].

En vista de que existe un buen número de procesos astrofísicos con tiempos característicos iguales o incluso menores que los estimados anteriores para el tiempo de relajación, está claro que los fenómenos previos a la relajación serán determinantes y no podrán ser excluidos en la descripción de esos procesos. Algunos ejemplos no-relativistas han sido ya presentados en la literatura [81].

13.3 Ecuación de Cattaneo relativista

La ecuación relativista de Maxwell-Fourier (12.5) se puede generalizar de manera que incluya el tiempo de relajación. En cuyo caso toma la forma [82]

$$\tau \frac{dq^\alpha}{ds} + q^\alpha = \kappa P^{\alpha\beta} (T_{,\beta} - T a_\beta) - \tau u^\alpha q_\beta a^\beta \quad (13.21)$$

En nuestro caso (esféricamente simétrico), las componentes de la cuadiaceleración están dadas por (9.65) y (9.66).

Las dos componentes de (13.21) (que no son independientes) se obtienen después de un cálculo largo pero muy simple. Se tiene para $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} & \tau e^{(\lambda-\nu)/2} (Q\dot{\omega} + \dot{Q}\omega + Q\omega\dot{\lambda}) \\ & + \tau \left(Q'\omega^2 + Q\omega\omega' + \frac{Q\omega^2\lambda'}{2} + \frac{Q\nu'}{2} \right) \\ & + Q\omega e^{\lambda/2} (1 - \omega^2)^{1/2} \\ = & - \frac{\kappa\omega^2 \dot{T} e^{-\nu/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} - \frac{\kappa\omega T' e^{-\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tau Q e^{(\lambda-\nu)/2} - \frac{\kappa T \omega e^{-\nu/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{\omega \dot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) \\
& + \left(\tau Q - \frac{\kappa T \omega e^{-\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\omega \omega'}{1-\omega^2} \right) \quad (13.22)
\end{aligned}$$

y para $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
& \tau e^{(\lambda-\nu)/2} \left(\dot{Q} + \frac{Q \dot{\lambda}}{2} + \frac{Q \omega^2 \dot{\lambda}}{2} \right) + \tau \omega \left(Q' + \frac{Q \lambda'}{2} + \frac{Q \nu'}{2} \right) \\
& + Q e^{\lambda/2} (1-\omega^2)^{1/2} \\
= & - \frac{\kappa \omega \dot{T} e^{-\nu/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} - \frac{\kappa T' e^{-\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \\
& + \left(\tau Q \omega e^{(\lambda-\nu)/2} - \frac{\kappa T e^{-\nu/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{\omega \dot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) \\
& + \left(\tau Q \omega - \frac{\kappa T e^{-\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\omega \omega'}{1-\omega^2} \right) \quad (13.23)
\end{aligned}$$

En la aproximación de evolución lenta considerada en el capítulo 12, la ecuación (13.22) deviene

$$\omega \left(T' + \frac{T \nu'}{2} \right) = 0 \quad (13.24)$$

y (13.23)

$$Q = -\kappa e^{-\lambda} \left(T' + \frac{T \nu'}{2} \right) \quad (13.25)$$

que es simplemente (12.6)

Evidentemente, (13.24) es una identidad, tomando en cuenta (13.25) y despreciando términos de orden $O(\omega^2)$.

Es interesante notar que la aproximación de evolución lenta implica, implícitamente, tiempos de relajación nulos, puesto

que concibe la evolución como una secuencia continua de sistemas en equilibrio, despreciando los tiempos requeridos para establecer dicho equilibrio.

En la próxima sección comentaremos las consecuencias de utilizar una ecuación tipo Cattaneo en la descripción del colapso gravitacional relativista.

13.4 Colapso gravitacional y procesos de relajación

La versión relativista de la ecuación de Cattaneo (ver ecuación (13.21)) ha sido utilizada en el estudio del colapso gravitacional [83, 84].

En la primera de estas referencias ([83]), se modela el colapso esférico radiante para diferentes ecuaciones de estado, y se compara la evolución del sistema para diferentes valores de τ y el mismo gradiente de temperatura en la superficie del objeto.

El resultado, en todos los modelos, es que la luminosidad del objeto depende de τ de una manera importante y prácticamente invariante: a mayor τ los pulsos de emisión se suavizan y se hacen más largos. Esto trae consigo cambios importantes en la evolución del sistema y en las posibles configuraciones finales, que van a depender del valor de τ de manera crítica. En el próximo capítulo veremos cómo el tiempo de relajación, afecta la salida del equilibrio dinámico.

Conducción térmica fuera del equilibrio dinámico

En el capítulo 12 estudiamos los efectos del flujo de calor en la evolución lenta de sistemas autogravitantes.

En este capítulo vamos a prescindir de la hipótesis de evolución lenta, pero vamos a limitar nuestro estudio al instante inmediato posterior a la salida del sistema del equilibrio dinámico. En ese sentido, este capítulo representa una generalización del estudio hecho en el capítulo 10 a sistemas disipativos.

Así pues, al igual que en el capítulo 10, vamos a suponer que nuestro sistema está originalmente en equilibrio (dinámico) y es perturbado de manera que abandona dicho equilibrio.

En este caso, sin embargo, una vez salido del equilibrio, el sistema comienza a disipar energía a través de un flujo radial de calor.

Vamos a evaluar las diferentes ecuaciones dinámicas en un tiempo posterior a la salida del equilibrio, y que es mucho menor que el tiempo de relajación y que el tiempo hidrostático. Dos posibles estados iniciales pueden ser considerados:

1. El sistema inicialmente está en equilibrio dinámico y térmico, es decir, antes de la perturbación

$$\dot{\omega} = \dot{Q} = \omega = Q = 0 \quad (14.1)$$

2. El sistema inicialmente está evolucionando lentamente con disipación. Entonces, antes de la perturbación

$$Q \approx O(\omega) \neq 0 \quad (\text{pequeño}) \quad (14.2)$$

$$\omega^2 \approx \dot{\omega} \approx \dot{Q} = 0 \quad (14.3)$$

En el primer caso, inmediatamente después de la perturbación, tenemos

$$\omega = 0 = Q \quad (14.4)$$

$$\dot{\omega} \approx \dot{Q} \neq 0 \quad (\text{pequeño}) \quad (14.5)$$

Mientras que en el segundo tendremos

$$Q \approx O(\omega) \neq 0 \quad (\text{pequeño}) \quad (14.6)$$

$$\dot{Q} \approx \dot{\omega} \neq 0 \quad (\text{pequeño}) \quad (14.7)$$

Como veremos más adelante, ambos casos conducen a las mismas ecuaciones.

14.1 Fracturas en sistemas disipativos

Nuestro primer problema consistirá en deducir un criterio integral, similar a (10.25), para la aparición de fracturas en sistemas con disipación.

Evaluando (10.12) inmediatamente después de la salida del equilibrio, obtenemos, en los dos casos mencionados anteriormente

$$\frac{d\Theta}{ds} = e^{-(\nu+\lambda)/2} \left(\dot{\omega}' + \frac{2\dot{\omega}}{r} + \frac{\dot{\omega}\nu'}{2} \right) + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} \right) \quad (14.8)$$

Por otra parte, sustituyendo (9.13)–(9.16) en (9.55), obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{P'_r}{1-\omega^2} + \frac{\rho'\omega^2}{1-\omega^2} + \frac{2\omega\omega'\rho}{1-\omega^2} + \frac{2\omega\omega'P_r}{(1-\omega^2)^2} + \frac{2\omega^3\omega'\rho}{(1-\omega^2)^2} \\
 + & \frac{2Q'\omega e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} + \frac{2Q\omega' e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} + \frac{2Q\omega^2\omega' e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{3/2}} \\
 + & \frac{2}{r} \left[\frac{4\pi r^3}{r-2m} (\rho + P_r\omega^2) \frac{Q\omega e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{3/2}} \right. \\
 + & \frac{12\pi r^3}{r-2m} \left(\frac{Q\omega e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \right)^2 + (\rho + P_r) \frac{\omega^2}{1-\omega^2} \\
 + & (P_r - P_\perp) + \frac{2Q\omega e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} + \frac{(\rho + P_r)}{2} \frac{1+\omega^2}{1-\omega^2} \frac{m}{r-2m} \\
 + & \frac{Q\omega e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \frac{m}{r-2m} \\
 + & \frac{2\pi r^3}{r-2m} (P_r + \rho\omega^2) (\rho + P_r) \frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^2} \\
 + & \frac{8\pi r^3}{r-2m} (P_r + \rho\omega^2) \frac{Q\omega e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{3/2}} \\
 + & \left. \frac{4\pi r^3}{r-2m} Q\omega e^{\lambda/2} (\rho + P_r) \frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^{3/2}} \right] \\
 = & \frac{e^{-\nu}}{8\pi r} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right) \tag{14.9}
 \end{aligned}$$

Una vez más, evaluando en el instante posterior a la salida del equilibrio, se obtiene

$$\begin{aligned}
 P'_r + \frac{(\rho + P_r)m}{r^2(1-2m/r)} + \frac{4\pi r}{(1-2m/r)} \\
 \times (P_r\rho + P_r^2) + \frac{2(P_r - P_\perp)}{r} = \frac{e^{-\nu}}{8\pi r} \ddot{\lambda} \tag{14.10}
 \end{aligned}$$

resultado este que es el mismo para las dos configuraciones iniciales consideradas anteriormente.

Una expresión para $\ddot{\lambda}$ se obtiene directamente, derivando la ecuación (9.6), con ayuda de la ecuación (9.16)

$$\begin{aligned}
\ddot{\lambda} = & -8\pi r e^{(\nu+\lambda)/2} \left[(\rho + P_r) \frac{\omega}{1-\omega^2} \frac{\dot{\nu}}{2} + Q e^{\lambda/2} \frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^{1/2}} \frac{\dot{\nu}}{2} \right. \\
& + \frac{(\rho + P_r) \omega}{1-\omega^2} \frac{\dot{\lambda}}{2} + Q e^{\lambda/2} \frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^{1/2}} \dot{\lambda} + (\dot{\rho} + \dot{P}_r) \frac{\omega}{1-\omega^2} \\
& + (\rho + P_r) \dot{\omega} \frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^2} + \dot{Q} e^{\lambda/2} \frac{1+\omega^2}{(1-\omega^2)^{1/2}} \\
& \left. + Q e^{\lambda/2} \frac{\omega \dot{\omega} (3-\omega^2)}{(1-\omega^2)^{3/2}} \right] \quad (14.11)
\end{aligned}$$

Evaluando esta expresión en el instante posterior a la salida del equilibrio, obtenemos para cualquiera de las dos configuraciones iniciales

$$\ddot{\lambda} = -8\pi r e^{(\nu+\lambda)/2} \left[(\rho + P_r) \dot{\omega} + \dot{Q} e^{\lambda/2} \right] \quad (14.12)$$

sustituyendo (14.12) en (14.10), tenemos

$$-e^{(\nu-\lambda)/2} R = (\rho + P_r) \dot{\omega} + \dot{Q} e^{\lambda/2} \quad (14.13)$$

con R definido por la ecuación (10.10).

Como era de esperar, si $\dot{Q} = 0$, (14.13) se convierte en (10.16).

Comparando (14.12) y (14.13) tenemos también

$$\ddot{\lambda} = 8\pi r e^{\nu} R \quad (14.14)$$

igual que en (10.15).

Procederemos ahora a transformar (14.8), de manera idéntica a como se hizo en la sección 10.1.

Sustituyendo (14.12) en (14.8), tenemos

$$e^{(\nu+\lambda)/2} \frac{d\Theta}{ds} + 4\pi r e^{3\lambda/2} \dot{Q} = \dot{\omega}' + \dot{\omega} f \quad (14.15)$$

donde

$$f \equiv \frac{2}{r} + \frac{\nu'}{2} - 4\pi r e^\lambda (\rho + P_r) \quad (14.16)$$

Evidentemente, podemos escribir (14.15) como

$$\frac{d\Theta}{ds} + 4\pi r e^\lambda e^{-\nu/2} \dot{Q} = e^{-(\nu+\lambda)/2} e^{-\int f dr} \left(\dot{\omega} e^{\int f dr} \right)' \quad (14.17)$$

Utilizando (10.21) y evaluando los integrales en (14.17), obtenemos

$$\frac{d\Theta}{ds} + 4\pi r e^\lambda e^{-\nu/2} \dot{Q} = \frac{e^{-\nu/2}}{r^2} \left(\dot{\omega} r^2 e^{-\lambda/2} \right)' \quad (14.18)$$

o,

$$\frac{d\Theta}{ds} + 4\pi r e^\lambda e^{-\nu/2} \dot{Q} = -\frac{1}{e^{\nu/2} r^2} \frac{dF}{dr} \quad (14.19)$$

donde se ha usado (14.13), y

$$F \equiv \frac{r^2 e^{\nu/2}}{e^\lambda (\rho + P_r)} \left(R + \dot{Q} e^\lambda e^{-\nu/2} \right) \quad (14.20)$$

Integrando (14.19) en el intervalo $(0, r)$, con la condición de regularidad (10.24), encontramos

$$R + \dot{Q} e^\lambda e^{-\nu/2} = -\frac{e^\lambda (\rho + P_r)}{r^2 e^{\nu/2}} \int_0^r r^2 e^{\nu/2} \left[\frac{d\Theta}{ds} + 4\pi r e^\lambda e^{-\nu/2} \dot{Q} \right] dr \quad (14.21)$$

la cual se reduce a (10.25) si $\dot{Q} = 0$.

Obsérvese que, como consecuencia de (14.13), a diferencia del caso no disipativo, los signos de $-R$ y $\dot{\omega}$ no necesariamente coinciden.

Por razones físicas elementales, está claro que la fractura está asociada a un cambio de signo en $\dot{\omega}$. Por lo tanto, vamos a reescribir (14.21) en términos de $\dot{\omega}$. Despejando R de (14.13) y sustituyendo en (14.21) obtenemos

$$\dot{\omega} = \frac{e^{\lambda/2}}{r^2} \int_0^r r^2 e^{\nu/2} \left[\frac{d\Theta}{ds} + 4\pi r \dot{Q} e^{\lambda} e^{-\nu/2} \right] dr \quad (14.22)$$

Tendremos fractura para algún valor de r (digamos $r = \tilde{r}$), si $\dot{\omega} < 0$ para $r < \tilde{r}$ y $\dot{\omega} > 0$ para $r > \tilde{r}$, obviamente $\dot{\omega}(\tilde{r}) = 0$.

14.2 Tiempos de relajación y salida del equilibrio

Es importante notar que al evaluar las ecuaciones dinámicas en tiempos menores que el tiempo de relajación, estamos suponiendo implícitamente que este último no puede ser igual a cero.

Vamos por lo tanto a utilizar la ecuación relativista de Cattaneo presentada en el capítulo anterior, para evaluar el término \dot{Q} en (14.22).

Evaluando (13.22) para la primera configuración inicial, encontramos una identidad.

En el segundo caso, (13.22) da

$$\omega \left(T' + T \frac{\nu'}{2} \right) = 0 \quad (14.23)$$

Lo que indica que la cantidad en el paréntesis es de orden $O(\omega)$. Lo que es de esperar, ya que dicha cantidad es proporcional a Q .

Evaluando (13.23), encontramos en el primer caso

$$\tau e^{(\lambda-\nu)/2} \dot{Q} = -\kappa T' e^{-\lambda/2} - \kappa T e^{-\nu/2} \dot{\omega} - \kappa T e^{-\lambda/2} \frac{\nu'}{2} \quad (14.24)$$

Sin embargo, como en este caso el sistema estaba inicialmente en equilibrio térmico ($Q = 0$), se verificaba antes de la perturbación

$$T' = -T \frac{\nu'}{2} \quad (14.25)$$

Esta condición, que se puede obtener directamente de (12.6), fue obtenida por Tolman [85], sin invocar la versión relativista de la ley de Maxwell-Fourier.

Así pues, (14.24) se transforma en

$$\tau \dot{Q} e^{-\nu/2} = -\kappa T \dot{\omega} e^{-(\nu+\lambda)/2} \quad (14.26)$$

En el segundo caso, la evaluación de (13.23) en el instante posterior a la perturbación, nos da

$$\tau \dot{Q} e^{-\nu/2} + Q = -\kappa T' e^{-\lambda} - \kappa T \frac{\nu'}{2} e^{-\lambda} - \kappa T \dot{\omega} e^{-(\nu+\lambda)/2} \quad (14.27)$$

pero, hasta primer orden

$$Q = -\kappa e^{-\lambda} \left(T' + T \frac{\nu'}{2} \right) \quad (14.28)$$

de manera que (14.27) se reduce a (14.26).

Así pues, despejando \dot{Q} de (14.26) y sustituyendo en (14.22), tenemos

$$\dot{\omega} = \frac{e^{\lambda/2}}{r^2} \int_0^r r^2 \left(e^{\nu/2} \frac{d\Theta}{ds} - \frac{4\pi r \kappa T}{\tau} e^{\lambda/2} \dot{\omega} \right) dr \quad (14.29)$$

Una expresión más interesante se obtiene a partir de (14.26) y (14.13)

$$\dot{\omega} = -\frac{e^{(\nu-\lambda)/2} R}{(\rho + P_r)} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\kappa T}{\tau(\rho + P_r)} \right)} \quad (14.30)$$

Obsérvese que para el valor crítico

$$\frac{\kappa T}{\tau(\rho + P_r)} = 1 \quad (14.31)$$

$R = 0$, pero $\dot{\omega} \neq 0$.

Es decir, el sistema sale del equilibrio dinámico a pesar de que el término de fuerzas (gravitacionales + hidrodinámicas) es nulo. Más aún, si

$$\frac{\kappa T}{\tau(\rho + P_r)} > 1 \quad (14.32)$$

entonces $\dot{\omega} > 0$, si $R > 0$.

Recuérdese que $R > 0$ implica que la resultante de la composición de la fuerza gravitacional y las fuerzas hidrodinámicas, apunta hacia el centro.

Para evaluar el término $\frac{\kappa T}{\tau\rho}$ (vamos a desprestigiar P_r en relación a ρ en esta estimación) debemos pasar de unidades geometrizadas a unidades c.g.s. Para ello observemos que

$$\kappa T = \frac{G}{c^5} [\kappa] [T] \quad (14.33)$$

donde G es la constante gravitacional ($G \equiv 6.67 \cdot 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}$), y $[\kappa]$ y $[T]$ denotan el valor numérico de κ y T en $erg s^{-1} cm^{-1} K^{-1}$ y K respectivamente.

De igual manera

$$\tau = c [\tau] \quad (14.34)$$

$$\rho = \frac{G}{c^2} [\rho] \quad (14.35)$$

donde $[\tau]$ y $[\rho]$ denota el valor numérico de τ y ρ en s y $g cm^{-3}$ respectivamente.

Entonces

$$\frac{\kappa T}{\tau \rho} = \frac{1}{81} \frac{[\kappa] [T]}{[\tau] [\rho]} \times 10^{-40} \quad (14.36)$$

Si utilizamos para κ la expresión (13.12), encontramos

$$\frac{\kappa T}{\tau \rho} = \frac{1}{81} \frac{1}{[\tau]} \times 10^{-23} \quad (14.37)$$

o, usando (13.15)

$$\frac{\kappa T}{\tau \rho} = \frac{1}{81} [T^2] [v^2] \times 10^{-43} \quad (14.38)$$

Valores de $\frac{\kappa T}{\tau \rho}$ del orden de 1, se tendrán para temperaturas del orden de $10^{13} K$ y $v \approx 10^9 cm s^{-1}$.

Otro escenario que parece más razonable, lo provee el colapso del núcleo estelar en los instantes iniciales de la supernova, cuando se produce el proceso de neutronización.

En este caso las temperaturas están entre 10^{11} – $10^{13} K$, la densidad en el centro es del orden de $10^{15} g cm^{-3}$ y $10^{13} g cm^{-3}$ en la superficie. La conductividad es del orden de $10^{37} erg s^{-1} cm^{-1} K^{-1}$. Para estas condiciones τ puede estar entre 10^{-6} – $10^{-4} s$ [84].

Encontramos entonces que $\frac{\kappa T}{\tau \rho}$ puede estar en el rango 10^2 – 10^{-4} . Es decir, es posible que $\frac{\kappa T}{\tau \rho}$ supere el valor crítico 1, en cuyo caso podremos tener una explosión del sistema aún si $R > 0$.

Conclusiones

En este último capítulo vamos a subrayar aquellos aspectos de la discusión que consideramos más relevantes y/o con más potencial de desarrollo.

En primer lugar, en lo que concierne a la anisotropía local, hemos visto que existe, no sólo un buen número de fenómenos físicos a partir de los cuales dicha anisotropía puede ser generada, sino, y esto es quizás lo más importante, que pequeñas desviaciones en la isotropía local, pueden producir fracturas en el sistema, afectando de esta manera la subsecuente evolución del objeto autogravitante.

Así pues, es preciso ser muy cuidadosos con aquellas conclusiones generales que exijan (explícita o implícitamente) una total isotropía local del fluido.

Los procesos disipativos afectan de una forma aún más radical la evolución del sistema.

En el caso de evolución lenta vimos, por un lado, la posible aparición del “peeling” térmico y por otro, la inevitabilidad de la expansión en objetos lo suficientemente cercanos al horizonte, como para que el flujo de calor sea necesariamente negativo.

En el caso dinámico, encontramos un nuevo régimen de inestabilidad cuando

$$\frac{\kappa T}{\tau(\rho + P_r)} = 1,$$

en cuyo caso tendremos $\dot{\omega} \neq 0$ aún cuando $R = 0$.

Es decir, un sistema en equilibrio dinámico ($R = 0; \dot{\omega} = 0$) saldrá de él si $\frac{\kappa T}{\tau(\rho+P_r)}$ adquiere el valor crítico, aún cuando R continúe siendo nulo.

Más aún, si el sistema es lo suficientemente compacto y $R > 0$, $\dot{\omega}$ podrá ser positiva si $\frac{\kappa T}{\tau(\rho+P_r)}$ excede el valor crítico.

Los dos ejemplos presentados en el capítulo anterior (en particular el segundo) ilustran claramente la viabilidad de dicha inestabilidad.

Todo lo anterior refleja bastante bien la importancia que tienen los procesos previos a la relajación térmica en la evolución del sistema, incluso cuando el valor del tiempo de relajación es relativamente pequeño.

Finalmente quisiéramos enfatizar el sentido físico inherente a la definición de masa de Tolman-Whittaker. Este punto requiere sin duda, ser investigado en mayor profundidad.

Bibliografía

- [1] D. Kazanas y D. Schramm, Sources of Gravitational Radiation, L. Smarr ed., (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [2] R. Kippenhan y A. Weigert, Stellar Structure and Evolution, (Springer Verlag, Berlin, 1990).
- [3] W. D. Arnett, *Astrophys. J.*, **218**, 815 (1977).
- [4] D. Kazanas, *Astrophys. J.*, **222**, 2109 (1978).
- [5] J. Lattimer, *Nucl. Phys.*, **A478**, 199 (1988).
- [6] J. C. Collins y M. J. Perry, *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 1353 (1975).
- [7] N. Itoh, *Progress Theor. Phys.*, **44**, 291 (1970).
- [8] A. B. Migdal, *Soviet Phys. JETP*, **34**, 1184 (1971).
- [9] R. F. Sawyer, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 382 (1972).
- [10] A. I. Sokolov, *Soviet Phys. JETP*, **52**, 575 (1980).
- [11] J. B. Hartle, R. Sawyer y D. Scalapino, *Astrophys. J.*, **199**, 471 (1975).

-
- [12] P. B. Jones, *Astrophys. Space Sci.*, **33**, 215 (1975).
- [13] I. Easson y C. J. Pethick, *Phys. Rev. D* **16**, 275 (1977).
- [14] M. Ruderman, *Annu. Rev. Astron. Astrophysics*, **10**, 427 (1972).
- [15] A. G. V. Cameron y V. Canuto, in *Proceedings of the 16th Solvay Conference on Astrophysics and Gravitation: Neutron Stars: General Review* (Éditions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 1973).
- [16] R. Rufini y S. Bonazzola, *Phys. Rev.*, **187**, 1767 (1969).
- [17] M. Gleiser, *Phys. Rev. D*, **38**, 2376 (1988).
- [18] W. D. Arnett, *Astrophys. J.*, **218**, 815 (1977).
- [19] J. H. Jeans, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **82**, 122 (1922).
- [20] J. Binney, *Ann. Rev. Astr. Astr.*, **20**, 399 (1982).
- [21] P. Letelier, *Phys. Rev. D*, **22**, 807 (1980).
- [22] P. Alencar y P. Letelier, *Phys. Rev. D*, **34**, 343 (1986).
- [23] L. Herrera y N. O. Santos, "Local anisotropy in self-gravitating systems", *Phys. Report* (en prensa) (1996).
- [24] H. Bondi, *Proc. R. Soc. London*, **A281**, 39 (1964).
- [25] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York), (1972).
- [26] G. Darrois, *Mémorial des Sciences Mathématiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1927) Fasc.25.

-
- [27] A. Lichnerowicz, *Theories relativistes de la gravitation* (Masson, Paris, 1955).
- [28] W. Bonnor y Vickers, *Gen. Rel. Grav.*, **13**, 29 (1981).
- [29] N. O. Santos, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **216**, 403 (1985).
- [30] L. Herrera, *Phys. Lett.*, **A165**, 206 (1992), *ibid.* **188**, 402 (1994).
- [31] A. Di Prisco, E. Fuenmayor, L. Herrera y V. Varela, *Phys. Lett.*, **A195**, 23 (1994).
- [32] M. Demianski, *Relativistic Astrophysics* (Pergamon Press, Oxford, 1985) p.45.
- [33] H. Bondi, *Lectures on General Relativity* (Prentice Hall, New Jersey, 1964).
- [34] R. Bowers y E. Liang, *Astrophys. J.*, **188**, 657 (1974).
- [35] L. Landau y E. Lifshitz, *Statistical Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1959).
- [36] A. Di Prisco, L. Herrera y V. Varela, "Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy", prepublicación, (1996).
- [37] C. Misner y D. Sharp, *Phys. Rev.*, **136**, B571 (1964).
- [38] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, Mass) vol.2.
- [39] M. Cahill y G. McVittie, *J. Math. Phys.*, **11**, 1382 (1970).

-
- [40] R. Tolman, *Phys. Rev.*, **35**, 875 (1930).
- [41] C. Møller, *The Theory of Relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1952).
- [42] E. T. Whittaker, *Proc. Roy. Soc. London*, **A149**, 384 (1935).
- [43] F. Cooperstock y R. Sarracino, *J. Phys.*, **A11**, 877(1978).
- [44] S. Hawking, *J. Math. Phys.*, **9**, 598 (1968).
- [45] R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. London*, **A381**, 53 (1985).
Twistor Newsletter, **18**, (1985); *ibid.* **20**.
- [46] M. Ludvigsen y J. Vickers, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**, L67 (1983); *ibid.* **16**, 1155.
- [47] D. Lynden-Bell y J. Katz, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **213**, 21 (1985).
- [48] M. May y R. White, *Phys. Rev.*, **141**, 1232 (1966).
- [49] J. Wilson, *Astrophys. J.*, **163**, 209 (1971).
- [50] A. Burrows y J. Lattimer, *Astrophys. J.*, **307**, 178 (1986).
- [51] S. Bruenn, *Astrophys. J. Suppl.*, **58**, 771 (1985).
- [52] R. Adams, B. Cary y J. Cohen, *Astrophys. Space Sci.*, **155**, 271 (1989).
- [53] W. B. Bonnor, *Class. Quant. Grav.*, **9**, 269 (1992).
- [54] A. Lightman, W. Press, R. Price y S. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton University Press, Princeton, 1975).

-
- [55] M. Schwarzschild, *Structure and Evolution of the Stars* (Dover, New York, 1958).
- [56] L. Herrera y N. O. Santos, *Gen. Rel. Grav.*, **27**, 1071 (1995).
- [57] J. Devitt y P. S. Florides, *Gen. Rel. Grav.*, **21**, 585 (1989).
- [58] P. S. Florides, *Proc. Roy. Soc. London*, **A337**, 529 (1974).
- [59] L. Herrera, J. Jiménez y M. Esculpi, *Phys. Lett.*, **A130**, 211 (1988).
- [60] L. Landau y E. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon, Oxford, 1986).
- [61] C. Eckart, *Phys. Rev.*, **58**, 919 (1940).
- [62] L. Landau y E. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, London, 1959).
- [63] A. Renzini, L. Greggio y C. Rittosa, *Astrophys. J.*, **400**, 280 (1992).
- [64] I. Iben, *Astrophys. J.*, **415**, 767 (1993).
- [65] R. Bhaskar y A. Nigam, *Astrophys. J.*, **372**, 592 (1991).
- [66] P. Eggleton y R. Cannon, *Astrophys. J.*, **383**, 757 (1991).
- [67] W. Barreto, L. Herrera y L. Núñez, *Astrophys. J.*, **375**, 663 (1991); W. Barreto, L. Herrera y N. O. Santos, *Astrophys. J.*, **324**, 158 (1989); W. Barreto y L. Núñez, *Astrophys. Sp. Sci.*, **178**, 261 (1991); W. Barreto, L. Herrera

- y N. O. Santos, *Astrophys. Space Sci.*, **187**, 271 (1992);
W. Barreto y S. Rojas, *Astrophys. Space Sci.*, **193**, 201
(1992).
- [68] D. Joseph y L. Preziosi, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 41 (1989).
- [69] W. Israel, *Ann. Phys.*, NY **100**, 310 (1976).
- [70] W. Israel y J. Stewart, *Phys. Lett.*, **A58**, 2131 (1976);
Ann. Phys., NY **118**, 341 (1979).
- [71] D. Pavón, D. Jou y J. Casas-Vázquez, *Ann. Inst. H
Poicaré*, **A36**, 79 (1982).
- [72] B. Carter, *Journées Relativistes*, ed. M. Cahen, R. De-
veber y J. Geheniahau, (ULB, 1976).
- [73] R. Peirls, *Quantum Theory of Solids* (Oxford University
Press, London, 1955).
- [74] W. Band y L. Meyer, *Phys. Rev.*, **73**, 226 (1948).
- [75] J. C. Maxwell, *Phil. Trans. R. Soc.*, **157**, 49 (1867).
- [76] J. Brown, J. Chung y P. Matthews, *Phys. Lett.*, **21**, 241
(1966).
- [77] C. Cattaneo, *Atti. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, **3**, 3
(1948).
- [78] N. Flowers y N. Itoh, *Astrophys. J.*, **230**, 847 (1979);
Astrophys. J., **250**, 750 (1981).
- [79] N. Shibazaki y F. Lamb, *Astrophys. J.*, **346**, 808 (1989).

-
- [80] M. Harwit, *Astrophysical Concepts* (Springer-Verlag, Berlin, 1991), p.316.
- [81] L. Herrera y N. Falcón, *Phys. Lett.*, **A201**, 33 (1995); *Astrophys. Space Sci.*, **229**, 105 (1995); *ibid.*, **234**, 139 (1995).
- [82] J. Triginer y D. Pavón, *Class. Quantum Grav.*, **12**, 689 (1995).
- [83] A. Di Prisco, L. Herrera y M. Esculpi, *Class Quantum Grav.*, **13**, 1053 (1996); A. Di Prisco, L. Herrera, M. Esculpi, N. Falcón y N. O. Santos, “Pre-relaxation processes in a radiating relativistic sphere”, prepublicación (1996).
- [84] J. Martínez, “Transport processes in the gravitational collapse of an anisotropic fluid”, *Phys. Rev. D*, **53**, 6921 (1996).
- [85] R. Tolman, *Phys. Rev.*, **35**, 904 (1930).