

Parte I

**Simetrías Cilíndricas en
Relatividad General**

Nilton O. Santos

Observatório Nacional CNPq.
Departamento de Astrofísica
rua General José Cristino 77,
20921Rio de Janeiro, Brazil

e-mail: nos@obsn.on.br

Introducción

En la teoría de gravitación de Newton al calcular el potencial V_1 exterior a una esfera llena de materia, obtenemos

$$V_1 = -\frac{M}{r} \quad (1.1)$$

donde M se interpreta como la masa de la esfera y r la distancia entre el punto de observación y el centro de la esfera. Abordando este mismo problema en la teoría de Einstein, obtenemos la métrica dada por

$$ds^2 = -(1 + 2V_1)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + 2V_1} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.2)$$

Este resultado fue obtenido por Schwarzschild [33] en 1916. Vemos de (1.2) que la teoría de Einstein no introduce nuevos aspectos respecto de la teoría de Newton al menos en lo que concierne a las características de la fuente. Esto quiere decir que sólo la masa total M es lo que se requiere para describir la fuente. Pero notemos que este resultado está íntimamente vinculado a la forma de la fuente. Si ahora calculamos el potencial newtoniano exterior a un cilindro infinito lleno de materia, obtenemos

$$V_2 = 2\sigma \ln r \quad (1.3)$$

donde σ se interpreta como la masa por unidad de longitud y r es la distancia radial al centro del cilindro. Calculando el

campo producido por un cilindro infinitamente largo lleno de materia estática en la teoría de Einstein, obtenemos

$$ds^2 = -ae^{2V_2}dt^2 + \frac{1}{a}r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + \frac{1}{a}r^{2(2\sigma-1)}d\phi^2 \quad (1.4)$$

Este resultado fue obtenido por primera vez por Levi-Civita[23] en 1919. Observemos que en (1.4) aparece el potencial newtoniano pero también que ha aparecido un segundo parámetro a . De modo que en la teoría de Einstein necesitamos dos parámetros para describir a la fuente estática, mientras que solamente se requiere un parámetro en la teoría de Newton. En años recientes la constante cosmológica Λ ha adquirido gran importancia sugiriendo algunas especulaciones relacionadas con su efecto a través de un valor muy pequeño, en la evolución del Universo. La constante cosmológica puede ser interpretada hidrodinámicamente como un fluido con densidad de masa ρ y presión p dadas por

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad p = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (1.5)$$

Si en la teoría de Newton calculamos el potencial V_3 afuera de una esfera de masa M en una posición r en un espacio con constante cosmológica diferente de cero, obtenemos

$$V_3 = -\frac{M}{r} - \frac{4\pi}{3}\Lambda r^2 \quad (1.6)$$

La contraparte de este resultado en la teoría de Einstein arroja la siguiente métrica:

$$ds^2 = -(1 + 2V_3)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + 2V_3} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.7)$$

Partiendo de (1.7) vemos que aún no surgen nuevos aspectos en la teoría de Einstein, comparada con los resultados newtonianos.

El mismo cilindro que produce el potencial (1.3) en un espacio con constante cosmológica Λ crea un potencial dado por

$$V_4 = 2\sigma \ln r + \pi r^2 \rho \ln r = 2\sigma \ln r + \frac{\Lambda}{8} r^2 \rho \ln r \quad (1.8)$$

En la teoría de Einstein este resultado deviene para $\Lambda > 0$ en

$$ds^2 = -f dt^2 + dr^2 + e^\mu dz^2 + l d\phi^2 \quad (1.9)$$

donde

$$f(r) = \frac{\mu^2(r)}{e^{\mu(r)} l(r)}, \quad (1.10)$$

$$e^{\frac{2}{3}\mu(r)} = \alpha \mu(r) e^{\frac{\delta}{\gamma} \Theta(r)}, \quad (1.11)$$

$$l(r) = C_3 \left\{ \tan \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{3\Lambda} r + \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \right) \right] \right\}^{\frac{C_4}{\sqrt{3\Lambda} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}}} \cdot \left[C_1 \cos(\sqrt{3\Lambda} r) + C_2 \sin(\sqrt{3\Lambda} r) \right]^{2/3}, \quad (1.12)$$

donde

$$\mu(r) = C_1 \cos(\sqrt{3\Lambda} r) + C_2 \sin(\sqrt{3\Lambda} r), \quad (1.13)$$

$$\Theta(r) = \frac{\gamma}{\sqrt{3\Lambda} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \ln \left\{ \tan \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{3\Lambda} r + \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \right) \right] \right\} + \xi, \quad (1.14)$$

y $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha, \delta, \gamma$ y ξ son constantes que satisfacen

$$9C_4^2 + 4\delta^2 + 6C_4\delta = 36\Lambda (C_1^2 + C_2^2). \quad (1.15)$$

Difícilmente esta solución guarda algún parecido con el potencial newtoniano (1.8). Aparecen incluso más parámetros comparado con el caso sin constante cosmológica (1.4).

Con estos ejemplos vemos que la simetría cilíndrica en la teoría de Einstein entraña una gran diferencia respecto de

su contraparte newtoniana. Esta diferencia se refleja en el número de nuevos parámetros que emergen después de la integración de las ecuaciones de campo. El objetivo de los siguientes capítulos es arrojar algo de luz en sistemas cilíndricos en la teoría de Einstein dando posibles interpretaciones *a* sus parámetros.

El Espaciotiempo de Levi-Civita

2.1 Introducción

Levi-Civita obtuvo la solución (2.1) en 1917, la solución general de las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de un espaciotiempo vacío, estático y cilíndricamente simétrico. Resulta que la métrica tiene dos parámetros independientes. Es en tiempos recientes que el significado físico de estos parámetros ha sido gradualmente clarificado. La intención de este capítulo es estudiar las propiedades del espaciotiempo de Levi-Civita. En primer lugar consideramos las geodésicas seguidas por partículas de prueba prestándole atención a los efectos de ambos parámetros en su trayectoria. Luego calculamos los escalares de Cartan para ver cómo estos escalares curvan el espaciotiempo. Luego consideramos diferentes límites del espaciotiempo y finalmente estudiaremos algunas fuentes del espaciotiempo de Levi-Civita, de particular interés.

2.2 Ecuaciones de Campo

El elemento de línea más general correspondiente a un espacio-tiempo cilíndricamente simétrico y estático, está dado por

$$ds^2 = -f dt^2 + e^\mu(dr^2 + dz^2) + l d\phi^2, \quad (2.1)$$

donde f , μ y l son funciones sólo de r , y los rangos de las coordenadas t , z y ϕ son

$$-\infty < t < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (2.2)$$

e identificaremos a las hipersuperficies $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$. Las coordenadas están numeradas de acuerdo con el orden

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = z, \quad x^3 = \phi \quad (2.3)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío, son

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

y para la métrica (2.1) las componentes no idénticamente nulas, resultan

$$2e^\mu DR_0^0 = \left(\frac{l f'}{D} \right)' \quad (2.5)$$

$$2e^\mu DR_3^3 = \left(\frac{f l'}{D} \right)' \quad (2.6)$$

$$2R_1^1 = -\mu'' + \mu' \frac{D'}{D} - 2 \frac{D''}{D} + \frac{f' l'}{D^2} \quad (2.7)$$

$$2R_{22} = -\mu'' - \mu' \frac{D'}{D} \quad (2.8)$$

donde las primas denotan derivación respecto de la coordenada r , y

$$D^2 = f l \quad (2.9)$$

La solución general de (2.4) para la métrica (2.1) se conoce como la métrica estática de Levi-Civita [23],

$$f = ar^{1-n} \quad e^\mu = r^{(n^2-1)/2} \quad l = \frac{1}{a}r^{1+n} \quad (2.10)$$

donde n y a son constantes reales

2.3 Geodésicas

Las ecuaciones que gobiernan a las curvas geodésicas, pueden derivarse del lagrangeano

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.11)$$

donde λ es un parámetro afín a lo largo de las geodésicas. Para geodésicas tipo tiempo λ es el tiempo propio. Del problema extremal resultan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (2.12)$$

y de ellas obtenemos las geodésicas dadas por

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (2.13)$$

donde el punto significa derivación respecto de λ . Para el espaciotiempo dado por la ecuación (2.1), el lagrangeano (2.11) es

$$2\mathcal{L} = -f \dot{t}^2 + e^\mu (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + l \dot{\phi}^2, \quad (2.14)$$

y las ecuaciones de las geodésicas (2.13), resultan

$$D\ddot{t} + \frac{l f'}{D} \dot{t} \dot{r} = 0 \quad (2.15)$$

$$2\ddot{r} + e^{-\mu}(f'\dot{t}^2 - l') + \mu'(r^2 + z^2) = 0 \quad (2.16)$$

$$\ddot{z} + \mu'r\dot{z} = 0 \quad (2.17)$$

$$D\ddot{\phi} = \frac{f'l'}{D}\dot{\phi}. \quad (2.18)$$

Los correspondientes momentos canónicos a (2.14) son

$$p_t \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = f\dot{t}, \quad (2.19)$$

$$p_r \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = e^\mu \dot{r}, \quad (2.20)$$

$$p_z \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = e^\mu \dot{z}, \quad (2.21)$$

$$p_\phi \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = l\dot{\phi}. \quad (2.22)$$

Las integrales de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.12)

$$\frac{dp_t}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{dp_z}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{dp_\phi}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.25)$$

y las cantidades conservadas son

$$p_t = E, \quad p_z = P, \quad p_\phi = L, \quad (2.26)$$

donde las constantes E, P y L representan respectivamente la energía total de la partícula de prueba, su momento a lo largo

del eje z y su momento angular a lo largo del eje z . Partiendo de (2.19), (2.21), (2.22), (2.26), tenemos

$$\dot{t} = \frac{El}{D^2}, \quad (2.27)$$

$$\dot{z} = Pe^\mu, \quad (2.28)$$

$$\dot{\phi} = \frac{Lf}{D^2}, \quad (2.29)$$

y en lugar de integrar (2.16) podemos usar el elemento de línea (2.1) para obtener

$$-\epsilon = -f \dot{t}^2 + e^\mu (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + l \dot{\phi}^2, \quad (2.30)$$

donde $\epsilon = 0, 1$ o -1 si las geodésicas son nulas, tipo tiempo o tipo espacio respectivamente.

2.4 Geodésicas Circulares

Ahora nos restringiremos al estudio de geodésicas circulares suponiendo que

$$\dot{r} = \dot{z} = 0, \quad \ddot{t} = 0, \quad \ddot{\phi} = 0, \quad (2.31)$$

de modo que (2.16) resulta;

$$f' \dot{t}^2 - l' \dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.32)$$

La velocidad angular de la partícula de prueba está dada por

$$\omega = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}, \quad (2.33)$$

que usando (2.32) podemos reescribir como

$$\omega = \pm \left(\frac{f'}{l'} \right)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Para un espaciotiempo estático la velocidad normal W^μ de la partícula definida como el cambio en el desplazamiento normal a $\tau^\mu = (1, 0, 0, 0)$ respecto a su desplazamiento paralelo a τ^μ , donde τ^μ es un vector de Killing tipo tiempo, es [2]

$$W^\mu = \left[(-g_{00})^{1/2} dx^0 \right]^{-1} V^\mu, \quad (2.35)$$

donde

$$V^\mu = (0, dx^1, dx^2, dx^3). \quad (2.36)$$

Considerando la métrica (2.1) y las expresiones para ω , (2.33), entonces (2.35), resulta

$$W^\mu = (0, 0, 0, f^{-1/2}\omega). \quad (2.37)$$

El módulo de W^μ , definido por $W^2 = W^\mu W_\mu$, y usando (2.37) es

$$W = \frac{D\omega}{f}. \quad (2.38)$$

Podemos escribir (2.30) considerando (2.33)

$$\frac{\epsilon}{t^2} = f - l\omega^2. \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.38) en (2.39) obtenemos

$$\frac{\epsilon}{t^2} = Df (1 - W^2), \quad (2.40)$$

que muestra que las geodésicas circulares son tipo tiempo, nulas o tipo espacio para $W < 1$, $W = 1$, o $W > 1$, respectivamente.

2.5 Escalares de Cartan

Podemos hacer una caracterización local completa del espaciotiempo a través de los escalares de Cartan, que son las componentes del tensor de Riemann y de sus derivadas covariantes calculadas en un sistema constante (ver Apéndice A).

Calculando las componentes de Cartan para la métrica de Levi-Civita (2.10), obtenemos

$$\Psi_2 = -\frac{1}{8} (n^2 - 1) r^{-(n^2+3)/2} \quad (2.41)$$

$$\Psi_0 = \Psi_4 = -n\Psi_2, \quad (2.42)$$

$$\nabla\Psi_{01'} = \nabla\Psi_{50'} = -\frac{2^{1/2}}{16} n (n^4 - 1) r^{-3(n^2+3)/4}, \quad (2.43)$$

$$\nabla\Psi_{10'} = \nabla\Psi_{41'} = -\frac{2^{1/2}}{8} n (n^2 - 1) r^{-3(n^2+3)/4}, \quad (2.44)$$

$$\nabla\Psi_{21'} = \nabla\Psi_{30'} = -\frac{2^{1/2}}{32} n (n^2 + 3) \binom{n^2}{n_1} r^{-3(n^2+3)/4}. \quad (2.45)$$

A partir de los escalares de Cartan nosotros vemos que solamente n y no a , curva el espaciotiempo y que para $r \rightarrow 0$ la curvatura se vuelve infinita para todos los valores de n excepto para $n = \pm 1$. Por tanto, la métrica de Levi-Civita tiene una singularidad a lo largo del eje $r = 0$, y podemos decir que este espaciotiempo está generado por una fuente lineal, uniforme e infinita.

2.6 Límite newtoniano y el efecto Aharonov-Bohm

Podemos escribir f dado por (2.10) como

$$f = e^2 U, \quad (2.46)$$

entonces U es

$$U = 2\sigma \log r + \frac{1}{2} \log a, \quad (2.47)$$

donde σ está dada por

$$\sigma = \frac{1}{4}(1 - n). \quad (2.48)$$

En la teoría newtoniana, (2.47) es el potencial gravitacional de una línea infinita y uniforme con una masa por unidad de longitud igual a σ . La constante $(1/2) \log a$ en (2.47) representa el potencial arbitrario y constante que existe en la solución newtoniana. Existen geodésicas circulares tipo tiempo $0 < n < 1$, o $0 < \sigma < 1/4$, como era de esperarse en el análogo newtoniano. Cuando $\sigma = 1/4$ las geodésicas circulares se vuelven nulas.

El espaciotiempo de Levi-Civita (2.10) tiene curvatura infinita de acuerdo a los escalares de Cartan (2.41), (2.42), (2.43), (2.44), (2.45), a lo largo del eje z en $r = 0$ para todos los n excepto $n = \pm 1$, implicando $\sigma = 0$ y $1/2$. Por consiguiente nosotros podemos decir que este espaciotiempo está generado por una fuente lineal uniforme e infinita de densidad $0 < \sigma < 1/4$ si no queremos admitir geodésicas tipo espacio.

Cuando $n = 1$, implicando que $\sigma = 0$ nosotros tenemos a partir de (2.10)

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 + dz^2 + \frac{r^2}{a} d\phi^2, \quad (2.49)$$

dando lugar a un espaciotiempo localmente plano. En este caso (2.49) representa el espaciotiempo generado por una cuerda

a lo largo del eje de simetría con densidad de energía lineal ς dado por [26]

$$\varsigma = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a^{1/2}} \right), \quad (2.50)$$

siendo $a > 1$. Por consiguiente la constante a está directamente vinculada al análogo gravitacional del efecto Aharonov-Bohm [12]. Este efecto muestra que la gravitación depende de la estructura topológica del espaciotiempo dando lugar a un déficit angular δ igual a

$$\delta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{a^{1/2}} \right), \quad (2.51)$$

como en el efecto Aharonov-Bohm electromagnético, donde una cantidad clásicamente no observable, el vector potencial, resulta observable (parte de ella) a través de un efecto no local. Su análogo gravitacional permite que una cantidad newtoniana no observable (la constante adicional al potencial newtoniano) resulte observable en la teoría relativista a través del déficit angular en las cuerdas.

Con las interpretaciones de los dos parámetros n y a que aparecen en la métrica de Levi-Civita (2.10) podemos analizar la velocidad angular (2.34) y la velocidad tangencial (2.38) de las geodésicas circulares. Usando (2.10) podemos expresar (2.34) como

$$\omega_0^2 = \frac{1-n}{1+n} a^2 r^{-2n} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma} a^2 r^{2(4\sigma-1)}, \quad (2.52)$$

A partir de (2.51) podemos ver que cuando el defecto topológico decrece el ángulo total alrededor del eje z , siendo $a > 0$, se incrementa la velocidad angular. Esta situación se revierte para $a < 1$. Note que (2.38) resulta con (2.10)

$$W_0^2 = \frac{1-n}{1+n} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}, \quad (2.53)$$

que también puede ser reescrita como

$$W_0 = \frac{r^n}{a}\omega_0, \quad (2.54)$$

mostrando claramente el límite newtoniano $W_0 = r\omega_0$. A partir de (2.40) tenemos

$$\in \frac{1-4\sigma}{i^2 a (1-2\sigma)} r^{4\sigma+1}. \quad (2.55)$$

Así, las geodésicas circulares son tipo tiempo, nulas o tipo espacio cuando $0 \leq \sigma, \sigma = 0$ y $1/4 < \sigma \leq 1/2$. El límite $\sigma \rightarrow 1/2$ implica que $W \rightarrow \infty$.

2.7 Espaciotiempo interior

Se han estudiado muchas fuentes diferentes para el espaciotiempo de Levi-Civita. Aquí nosotros presentamos como un ejemplo pero con propiedades interesantes un espaciotiempo interior descrito por un cilindro lleno de un polvo rotacionalmente simétrico y con momento angular neto igual a cero. El tensor de energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\rho(u_\mu u_\nu + v_\mu v_\nu), \quad (2.56)$$

donde ρ es la densidad de energía y u^μ y v^μ son las cuadrivelocidades

$$u^\mu = (u^0, 0, 0, \omega), \quad v^\mu = (u^0, 0, 0, -\omega), \quad (2.57)$$

que satisfacen

$$u^\mu u_\mu = v^\mu v_\mu = -1. \quad (2.58)$$

A partir de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.59)$$

y usando (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) y (2.56)

$$fl = r^2, \quad (2.60)$$

$$\mu' = -\frac{f'}{f} \left(1 - \frac{rf'}{2f} \right), \quad (2.61)$$

$$kpr e^\mu = -(r\mu')', \quad (2.62)$$

$$W^2 = \left(\frac{\omega r}{f} \right)^2 = \frac{rf'}{2f} \left(1 - \frac{rf'}{2f} \right)^{-1}, \quad (2.63)$$

donde hemos computado en (2.63) la velocidad (2.38) de la partícula en el polvo. Note que aunque las partículas están rotando, esta fuente con momento angular igual a cero, genera un espaciotiempo estático.

2.7.1 Cúmulo de polvo homogéneo

Considerando una distribución homogénea de polvo adentro del cilindro $0 \leq r \leq R$, tenemos

$$\rho = \rho_0 = \text{constan } t. \quad (2.64)$$

La solución (2.61) y (2.62) con (2.64), adecuada para acoplar a la métrica de Levi-Civita, es

$$f = \frac{1}{2^{1/2}} \left[1 - 3br^2 + (1 + br^2)^{1/2} (1 - 7br^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2.65)$$

$$\times \exp, \left\{ \frac{7^{1/2}}{2} \arcsin \left(-\frac{3 + 7br^2}{4} \right) - \arcsin \left(-\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$e^\mu = (1 + br^2)^{-2}, \quad (2.66)$$

donde hemos impuesto que la geometría en el eje de rotación sea euclídeana y

$$b \equiv \frac{k\rho_0}{8}. \quad (2.67)$$

A partir de (2.63) y (2.66), tenemos la velocidad de las partículas de polvo

$$W^2 = \frac{(1 + br^2)^{1/2} - (1 - 7br^2)^{1/2}}{(1 + br^2)^{1/2} + (1 - 7br^2)^{1/2}}. \quad (2.68)$$

A partir de la ecuación (2.66) podemos ver que hay una restricción en el radio de la órbita del cúmulo homogéneo de partículas para una masa gravitacional por unidad de longitud del cilindro dada. Más específicamente necesitamos que

$$r^2 \leq \frac{8}{7k\rho_0}, \quad (2.69)$$

para que el potencial métrico f sea real. La ecuación (2.68) muestra que en este límite la velocidad de las partículas de polvo es igual a la unidad. Un comportamiento similar se encuentra también en la solución de van Stockum (ver capítulo (5)).

El espaciotiempo está dividido en dos regiones: la interior con $0 \leq r \leq R$, a una superficie cilíndrica de radio r centrada a lo largo de z ; y la exterior, con $R \leq r \leq \infty$. En la frontera $r = R$ la primera y la segunda forma fundamental deben ser continuas [10]. Eligiendo las mismas coordenadas para los espaciotiempo exterior e interior, estas condiciones son

$$\left[g_{\mu\nu}^- - g_{\mu\nu}^+ \right]_{\Sigma} = 0, \quad (2.70)$$

$$\left[g_{\mu\nu}^{-'} - g_{\mu\nu}^{+'} \right]_{\Sigma} = 0, \quad (2.71)$$

donde los índices $-$ y $+$ se refieren a los espaciotiempo interiores y exteriores respectivamente.

Considerando el acoplamiento entre las métricas interior y exterior dado por (2.70) y (2.71), obtenemos

$$\sigma = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1 - 7bR^2}{1 + bR^2} \right)^{1/2} \right], \quad (2.72)$$

$$a = \frac{b^2 R^{4(2\sigma^2 - \sigma + 1)}}{\sigma^2 (2\sigma - 1)^2} = (1 + bR^2)^2 R^{4bR^2/(1+bR^2)}. \quad (2.73)$$

La ecuación (2.72) impone un límite superior al radio de la frontera de la fuente. Este límite es idéntico al que impone la ecuación (2.69). Más aún, (2.72) implica que $0 \leq \sigma \leq 1/4$, con $\rho_0 = 0$ correspondiente a $\sigma = 0$. El valor $\sigma = 1/4$ corresponde a $W = 1$ de la ecuación (2.68). Obsérvese que los límites impuestos por las ecuaciones (2.53) y (2.55) están relacionados con la existencia de geodésicas circulares para partículas de prueba en el espaciotiempo de Levi-Civita, mientras que los límites de arriba surgen de las condiciones de acoplamiento. Aunque estas condiciones de acoplamiento (2.72) y (2.73) no imponen ninguna restricción sobre el valor $\sigma = 1/4$, ecuación (2.68) como vimos muestra que cuando $\sigma = 1/4$ lo que significa $R^2 = 8/(7\kappa\rho_0)$, la velocidad de las partículas es igual a la unidad. Así, las partículas de polvo viajan con la velocidad de la luz y a modo de evitar ésto debemos excluir el valor $\sigma = 1/4$.

2.7.2 Cúmulo de polvo con rotación constante

Consideremos ahora la solución obtenida por Teixeira y Som [36], donde

$$\omega = \omega_1 = \text{const} \tan tn, \quad (2.74)$$

dada por

$$f = \frac{1}{2} \left[1 + (1 + 4\omega_1^2 r^2)^{1/2} \right], \quad (2.75)$$

$$e^\mu = (1 + 4\omega_1^2 r^2)^{-1/4}, \quad (2.76)$$

$$\frac{k}{4}\rho = \frac{\omega_1^2}{\left[1 + (1 + 4\omega_1^2 r^2)^{1/2} \right]^2}, \quad (2.77)$$

$$W^2 = \frac{4\omega_1^2 r^2}{\left[1 + (1 + 4\omega_1^2 r^2)^{1/2} \right]^2}, \quad (2.78)$$

Ahora considerando el acoplamiento (2.70) y (2.71), obtenemos

$$\sigma = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{1}{(1 + 4\omega_1^2 R^2)^{1/2}} \right], \quad (2.79)$$

$$a = R^{4\sigma(2\sigma-1)} (1 + 4\omega_1^2 R^2)^{1/4}. \quad (2.80)$$

Veremos ahora algunas de las propiedades de este acoplamiento. Podemos notar que si $\sigma = 0$ las ecuaciones (2.79) y (2.80) dan $R\omega_1 = 0$ y $a = 0$, produciendo el espacio de Minkowski como es de esperarse. Note que la solución se comporta bien en $R = 0$ puesto que esto implica $\sigma = 0$ (i.e., una densidad de energía por unidad de longitud finita para la línea infinita de masa). Por otra parte, incluso cuando $R = 0$ de la ecuación (2.77), la densidad de energía ρ de la fuente se anula sólo si tenemos $\omega_1 = 0$.

La ecuación (2.79) muestra que

$$\lim \sigma = 1/4. \quad (2.81)$$

De modo que 1/4 representa un límite superior para σ para que la solución interior genere un espaciotiempo exterior de Levi-Civita. Lathrop y Orsene [22] consiguieron el mismo

límite para la densidad lineal de masa de la solución de Teixeira y Som. Ellos usaron una definición para este parámetro dada por Vishveshwara y Vinicour [38]. Esta fuente sin embargo no presenta una limitación en el radio de su frontera. Como en el caso del cúmulo homogéneo aquí el valor $1/4$ para el parámetro σ implica que las partículas del cúmulo están viajando a la velocidad de la luz, como se puede ver de la ecuación (2.78). De modo que nosotros de nuevo necesitamos evitar el valor $\sigma = 1/4$ o de lo contrario considerar la posibilidad de fotones rotando.

El Espaciotiempo de Lewis

3.1 Introducción

Lewis [25] en 1932 obtuvo la solución general a las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío, correspondiente a la métrica de un espaciotiempo cilíndricamente simétrico y estacionario. Más tarde, en 1937, van Stockum [37] redescubrió esta métrica. Dicha métrica tiene cuatro parámetros que pueden ser todos reales, representando la clase de Weyl, o complejos representando la clase de Lewis. Apenas recientemente es cuando se le ha dado alguna interpretación física a estos parámetros y aún no se conoce si son o no independientes. En este capítulo presentaremos la integración general de las geodésicas para un espaciotiempo estacionario y cilíndricamente simétrico. En el capítulo siguiente usaremos las geodésicas integradas para estudiar los parámetros de la clase de Weyl; para la clase de Lewis esto aún no ha sido hecho. Acoplaremos la métrica de Lewis a una fuente general sin imponer ninguna ecuación de estado de un fluido estacionario y anisótropo. Luego estudiaremos los escalares de Cartan para determinar cómo los parámetros influyen la curvatura del espaciotiempo. Finalmente consideraremos diferentes límites de la métrica de Lewis.

3.2 Ecuaciones de Campo

El elemento de línea más general correspondiente a un espaciotiempo cilíndricamente simétrico y estacionario, está dado por

$$ds^2 = -f dt^2 + e^\mu(dr^2 + dz^2) + l d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde f , k , μ y l son funciones sólo de r , y los rangos de las coordenadas t , z y ϕ son

$$-\infty < t < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (3.2)$$

e identificaremos a las hipersuperficies $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$. Las coordenadas están numeradas de acuerdo con el orden

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = z, \quad x^3 = \phi \quad (3.3)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío, son

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.4)$$

y para la métrica (3.1) las componentes no idénticamente nulas, en la notación de van Stockum [37], resultan

$$2e^\mu DR_0^0 = \left(\frac{lf' + kk'}{D} \right)', \quad (3.5)$$

$$2e^\mu DR_0^3 = \left(\frac{fk' - kf'}{D} \right)', \quad (3.6)$$

$$2e^\mu DR_3^0 = \left(\frac{kl' - lk'}{D} \right)', \quad (3.7)$$

$$2e^\mu DR_3^3 = \left(\frac{fl' + kk'}{D} \right)' \quad (3.8)$$

$$2R_1^1 = -\mu'' + \mu' \frac{D'}{D} - 2 \frac{D''}{D} + \frac{k'^2 + f'l'}{D^2} \quad (3.9)$$

$$2R_{22} = -\mu'' - \mu' \frac{D'}{D} \quad (3.10)$$

donde las primas denotan derivación respecto de la coordenada r , y

$$D^2 = k^2 + fl. \quad (3.11)$$

Las cuatro ecuaciones (3.5),(3.6),(3.7),(3.8) no son todas independientes; cualquiera de ellas puede ser expresada en términos de las tres restantes. La solución general de (3.4) para la métrica (3.1) es la métrica estacionaria de Lewis.[25], dada en la notación de [19]

$$f = ar^{1-n} - \frac{c^2}{n^2 a} r^{1+n} \quad (3.12)$$

$$k = -Af \quad (3.13)$$

$$e^\mu = r^{(n^2-1)/2} \quad (3.14)$$

$$l = \frac{r^2}{f} - A^2 f \quad (3.15)$$

con

$$A = \frac{cr^{1+n}}{naf} + b \quad (3.16)$$

Las constantes n , a , b , y c son reales o complejas y las soluciones correspondientes pertenecen a la clase de Weyl o a la de Lewis. Para la clase de Lewis estas constantes están dadas por

$$n = im, \quad (3.17)$$

$$a = \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2) + ia_1 b_1, \quad (3.18)$$

$$b = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{i}{a_1^2 + b_1^2}, \quad (3.19)$$

$$c = \frac{1}{2} m (a_1^2 + b_1^2), \quad (3.20)$$

donde m , a_1 , b_1 , a_2 y b_2 son constantes reales que satisfacen

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \quad (3.21)$$

Las ecuaciones (3.17)-(3.21) revelan que si los valores de los parámetros n y a o n y b son conocidos, podemos obtener el parámetro c . Sin embargo, conociendo n y c no podemos obtener a y b . Los coeficientes métricos (3.12)-(3.15) tomando en cuenta (3.18)-(3.21) resultan [25]

$$f = (a_1^2 - b_1^2)r \cos(m \log r) + 2a_1 b_1 r \operatorname{sen}(m \log r), \quad (3.22)$$

$$k = -(a_1 a_2 - b_1 b_2)r \cos(m \log r) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)r \operatorname{sen}(m \log r), \quad (3.23)$$

$$e^\mu = r - (1 + m^2)/2, \quad (3.24)$$

$$l = -(a_2^2 - b_2^2)r \cos(m \log r) - 2a_2 b_2 r \operatorname{sen}(m \log r), \quad (3.25)$$

3.3 Geodésicas

Las ecuaciones que gobiernan a las curvas geodésicas, pueden derivarse del lagrangeano

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (3.26)$$

donde λ es un parámetro afín a lo largo de las geodésicas. Para geodésicas tipo tiempo λ es el tiempo propio. Del problema extremal resultan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (3.27)$$

y de ellas obtenemos las geodésicas dadas por

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (3.28)$$

donde el punto significa derivación respecto de λ . Para el espaciotiempo dado por la ecuación (3.1), el lagrangeano (3.26) es

$$2\mathcal{L} = -f \dot{t}^2 + e^\mu (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + l \dot{\phi}^2, \quad (3.29)$$

y las ecuaciones de las geodésicas (3.28), resultan

$$D\ddot{t} + \frac{lf' + kk'}{D} \dot{t}\dot{r} + \frac{kl' - lk'}{D} \dot{r}\dot{\phi} = 0 \quad (3.30)$$

$$2\ddot{r} + e^{-\mu}(f'\dot{t}^2 - 2k'\dot{t}\dot{\phi} - l'\dot{\phi}^2) + \mu'(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) = 0 \quad (3.31)$$

$$\ddot{z} + \mu'\dot{r}\dot{z} = 0 \quad (3.32)$$

$$D\ddot{\phi} + \frac{fk' - kf}{D} \dot{f}\dot{r} + \frac{fl' + kk}{D} \dot{r}\dot{\phi} = 0 \quad (3.33)$$

Los correspondientes momentos canónicos a (3.29) son

$$p_t \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = f \dot{t} - k \dot{\phi}, \quad (3.34)$$

$$p_r \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = e^\mu \dot{r}, \quad (3.35)$$

$$p_z \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = e^\mu \dot{z}, \quad (3.36)$$

$$p_\phi \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = k \dot{t} + l \dot{\phi}. \quad (3.37)$$

Las integrales de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.27)

$$\frac{dp_t}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{dp_z}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{dp_\phi}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.40)$$

y las cantidades conservadas son

$$p_t = E, \quad p_z = P, \quad p_\phi = L, \quad (3.41)$$

donde las constantes E, P y L representan respectivamente la energía total de la partícula de prueba, su momento a lo largo del eje z y su momento angular a lo largo del eje z . Partiendo de (3.34), (3.36), (3.37), (3.41), tenemos

$$\dot{t} = \frac{1}{D^2}(Lk + El), \quad (3.42)$$

$$\dot{z} = Pe^\mu, \quad (3.43)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{D^2}(Lf - Ek), \quad (3.44)$$

y en lugar de integrar (3.31) podemos usar el elemento de línea (3.1) para obtener

$$-\epsilon = -f \dot{t}^2 + 2k\dot{t}\dot{\phi} + e^\mu(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + l \dot{\phi}^2, \quad (3.45)$$

donde $\epsilon = 0, 1$ o -1 si las geodésicas son nulas, tipo tiempo o tipo espacio respectivamente.

3.4 Geodésicas Circulares

Ahora nos restringiremos al estudio de geodésicas circulares suponiendo que

$$\dot{r} = \dot{z} = 0, \quad \ddot{t} = 0, \quad \ddot{\phi} = 0, \quad (3.46)$$

de modo que (3.31) resulta;

$$f't^2 - 2k't\dot{\phi} - l'\dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.47)$$

La velocidad angular de la partícula de prueba está dada por

$$\omega = \frac{\dot{\phi}}{t}, \quad (3.48)$$

que usando (3.47) podemos reescribir como

$$\omega = \frac{1}{l'} \left[-k' \pm (k'^2 + f'l')^{1/2} \right]. \quad (3.49)$$

Para un espaciotiempo estacionario la velocidad normal W^μ de la partícula definida como el cambio en el desplazamiento normal a $\tau^\mu = (1, 0, 0, 0)$ respecto a su desplazamiento paralelo a τ^μ , donde τ^μ es un vector de Killing tipo tiempo, es [16]

$$W^\mu = \left[(-g_{00})^{1/2} \left(dx^0 + \frac{g_{0a}}{g_{00}} dx_a \right) \right]^{-1} V^\mu, \quad (3.50)$$

donde

$$V^\mu = \left(-\frac{g_{0a}}{g_{00}} dx_a, dx^1, dx^2, dx^3 \right). \quad (3.51)$$

y los índices latinos van de 1 a 3. Considerando la métrica (3.1) y las expresiones para ω , (3.48), entonces (3.50), resulta

$$W^\mu = \frac{(k\omega, 0, 0, f\omega)}{f^{1/2}(f - k\omega)}. \quad (3.52)$$

El módulo de W^μ , definido por $W^2 = W^\mu W_\mu$, y usando (3.52) es

$$W = \frac{D\omega}{f - k\omega}. \quad (3.53)$$

Podemos escribir (3.45) considerando (3.48)

$$\frac{\epsilon}{\dot{t}^2} = f - 2k\omega - l\omega^2. \quad (3.54)$$

Sustituyendo (3.53) en (3.54) obtenemos

$$\frac{\epsilon}{\dot{t}^2} = \frac{D^2 f}{(D + kW)^2} (1 - W^2), \quad (3.55)$$

que muestra que las geodésicas circulares son tipo tiempo, nulas o tipo espacio para $W < 1$, $W = 1$, o $W > 1$, respectivamente.

3.5 Espaciotiempo interior

Con el fin de comenzar a comprender el significado físico de los parámetros que aparecen en el espaciotiempo de Lewis, estudiaremos un espaciotiempo interior lleno de un fluido anisótropo estacionario, que genera al de Lewis. Las ecuaciones de Einstein que describen este fluido, están dadas por

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (3.56)$$

donde el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_r) u_\mu u_\nu + P_r g_{\mu\nu} + (P_\phi - P_r) K_\mu K_\nu + (P_z - P_r) S_\mu S_\nu. \quad (3.57)$$

En (3.57) ρ es la densidad de energía, P_r , P_z y P_ϕ son las presiones principales y u_μ , K_μ y S_μ son cuadvectores que satisfacen

$$u_\mu u^\mu = -1 \quad K_\mu K^\mu = S_\mu S^\mu = 1, \quad (3.58)$$

$$K_\mu u^\mu = S_\mu u^\mu = K_\mu S^\mu = 0 \quad (3.59)$$

Considerando la fuente bajo rotación rígida y eligiendo las coordenadas en un sistema comóvil, obtenemos para u^μ , K^μ y S^μ usando (3.1) y (3.58),(3.59),

$$u^\mu = \left(\frac{1}{f^{1/2}}, 0, 0, 0 \right), \quad (3.60)$$

$$K^\mu = \left(\frac{k}{Df^{1/2}}, 0, 0, \frac{f^{1/2}}{D} \right), \quad (3.61)$$

$$S^\mu = \left(0, 0, e^{-\mu/2}, 0 \right), \quad (3.62)$$

Calculando el tensor de energía-momento (3.57) usando (3.1) y (3.60)-(3.62) conseguimos que las componentes no nulas son

$$T_0^0 = -\rho \quad T_1^1 = P_r \quad T_2^2 = P_z \quad T_3^3 = P_\phi \quad T_3^0 = \frac{k}{f}(\rho + P_\phi). \quad (3.63)$$

Observemos que $T_0^3 = 0$, y que por tanto la componente correspondiente de las ecuaciones de campo de Einstein (3.56), resulta

$$\left(\frac{fk' - kf'}{D} \right)' = 0, \quad (3.64)$$

donde hemos usado (3.6). Integrando (3.64) obtenemos

$$fk' - kf' = \xi D, \quad (3.65)$$

donde ξ es una constante de integración.

El tensor de vorticidad $\omega_{\alpha\beta}$ de la materia adentro del cilindro está dado por

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha}) + \frac{1}{2}(u_{\alpha;\nu}u^\nu u_\beta - u_{\beta;\nu}u^\nu u_\alpha). \quad (3.66)$$

Con (3.1) y (3.60) obtenemos las componentes no nulas de (3.66),

$$\omega_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{k'}{f^{1/2}} - \frac{k f'}{f f^{1/2}} \right). \quad (3.67)$$

El vector de vorticidad ω^α es por definición

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{g^{1/2}} u_\beta \omega_{\gamma\delta}, \quad (3.68)$$

y con (3.1) y (3.60) y (3.67) obtenemos

$$\omega^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{3\alpha 10}}{D e^\mu} \left(k' - k \frac{f'}{f} \right). \quad (3.69)$$

Ahora, calculando la magnitud de ω^α a partir de (3.69) y considerando (3.22), tenemos

$$(\omega_\alpha \omega^\alpha)^{1/2} = \frac{\xi}{2f e^{\mu/2}}. \quad (3.70)$$

Por consiguiente, vemos de (3.70) que ξ mide la vorticidad del cilindro.

Aunque no resolvimos todas las ecuaciones de campo interiores para la fuente general (3.57), puede demostrarse que la solución existe. En la referencia [20] por ejemplo, se da un conjunto completo de soluciones de las ecuaciones de campo para una fuente constituida por un fluido perfecto, acopladas a las correspondiente soluciones exteriores. Otra solución interior es la de van Stockum [37], con presión nula. Debido a su importancia, la solución de van Stockum será tratada en un capítulo separado.

En la superficie de discontinuidad Σ , $r = R$, que separa el interior del cilindro lleno con un fluido anisótropo estacionario, de su exterior descrito por el espaciotiempo de Lewis,

las condiciones de acoplamiento son las de Darmois [10]. Estas condiciones establecen que la primera y la segunda forma fundamental deben ser continuas. Eligiendo las mismas coordenadas para los espaciotiempo interior y exterior, estas condiciones resultan

$$\left[g_{\mu\nu}^- - g_{\mu\nu}^+ \right]_{\Sigma} = 0, \quad (3.71)$$

$$\left[g_{\mu\nu}^{-'} - g_{\mu\nu}^{+'} \right]_{\Sigma} = 0, \quad (3.72)$$

donde los índices $-$ y $+$ se refieren a los espaciotiempo interiores y exteriores respectivamente.

En $r = R$ considerando (3.12)-(3.15), (3.65) y (3.71),(3.72) obtenemos

$$c = -\frac{\xi}{2}. \quad (3.73)$$

Por lo tanto, partiendo de (3.70) y (3.73) tenemos que la constante c mide la vorticidad de la fuente descrita como un cilindro lleno de un fluido anisótropo rotando rígidamente. Para que la vorticidad de la fuente sea cero, $\xi = 0$, necesitamos para la clase de Weyl que $c = 0$. Sin embargo, para la clase de Lewis, gracias a que (3.20) se satisface, para esta misma condición necesitamos que $m = 0$ puesto que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$.

3.6 Escalares de Cartan

Podemos hacer una caracterización local completa del espaciotiempo a través de los escalares de Cartan, que son las componentes del tensor de Riemann y de sus derivadas covariantes calculadas en un sistema de referencia constante (ver Apéndice A).

Calculando las componentes de Cartan para la métrica de Weyl, obtenemos

$$\Psi_2 = -\frac{1}{8} (n^2 - 1) r^{-(n^2+3)/2} \quad \Psi_0 = \Psi_4 = -n\Psi_2, \quad (3.74)$$

$$\nabla\Psi_{01'} = \nabla\Psi_{50'} = -\frac{2^{1/2}}{16} n (n^4 - 1) r^{-3(n^2+3)/4}, \quad (3.75)$$

$$\nabla\Psi_{10'} = \nabla\Psi_{41'} = -\frac{2^{1/2}}{8} n (n^2 - 1) r^{-3(n^2+3)/4}, \quad (3.76)$$

$$\nabla\Psi_{21'} = \nabla\Psi_{30'} = -\frac{2^{1/2}}{32} (n^2 + 3) (n^2 - 1) r^{-3(n^2+3)/4}. \quad (3.77)$$

A partir de los escalares de Cartan nosotros vemos que solamente n ayuda a curvar para la clase de métricas de Weyl. Por tanto puede demostrarse que los escalares de Cartan para la métrica estática de Levi-Civita,

$$ds^2 = -r^{-n+1} d\tau^2 + r^{(n^2-1)}(dr^2 + dz^2) + \frac{1}{a} r^{n+1} d\bar{\phi}^2, \quad (3.78)$$

son idénticos a los de la métrica de Lewis de la clase de Weyl. Por consiguiente, desde el punto de vista de la curvatura, la métrica estática de Levi-Civita (3.78) y la métrica estacionaria de la clase de Weyl son indistinguibles. Sin embargo, como mostraremos más adelante, estas dos métricas poseen comportamientos topológicos muy diferentes.

La transformación [7]

$$d\tau = a^{1/2}(dt + b d\phi), \quad (3.79)$$

$$d\bar{\phi} = \frac{1}{n}[-c dt + (n - bc) d\phi], \quad (3.80)$$

lleva la métrica (3.1) a la (3.78). Sin embargo, puesto que $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ han sido identificados, τ definido en (3.79) asume una naturaleza periódica a menos que $b = 0$ [7]. Por otra parte, la nueva coordenada $\bar{\phi}$ barre de $-\infty$ a ∞ . Con el fin de transformar globalmente la métrica de Lewis de clase Weyl, a la métrica de Levi-Civita, tenemos que hacer $b = 0$ y $c = 0$. Notemos que en este caso, partiendo de la transformación (3.79) y (3.80), τ y ϕ resultan respectivamente el tiempo verdadero y la coordenada angular. Por tanto, podemos decir que b y c son responsables de la no estaticidad de esta familia de soluciones en la métrica de Lewis.

Calculando ahora los escalares de Cartan para la clase de Lewis con (3.22)-(3.25), obtenemos

$$\Psi_2 = \frac{1}{8} (m^2 + 1) r^{(m^2-3)/2}, \quad (3.81)$$

$$\Psi_0 = \Psi_4 = -im\Psi_2, \quad (3.82)$$

$$\nabla\Psi_{01'} = \nabla\Psi_{50'} = -\frac{2^{1/2}}{16} im (m^4 - 1) r^{3(m^2-3)/4}, \quad (3.83)$$

$$\nabla\Psi_{10'} = \nabla\Psi_{41'} = \frac{2^{1/2}}{8} im (m^2 - 1) r^{3(m^2-3)/4}, \quad (3.84)$$

$$\nabla\Psi_{21'} = \nabla\Psi_{30'} = \frac{2^{1/2}}{32} (m^2 - 3) (m^2 + 1) r^{3(m^2-3)/4}. \quad (3.85)$$

Vemos que para la clase de Weyl también, sólo un parámetro, m , curva el espaciotiempo.

Usando la transformación

$$d\phi = d\bar{\phi} + \vartheta dt, \quad (3.86)$$

donde

$$\vartheta = -\frac{k}{l} \quad (3.87)$$

la métrica (3.1) puede ser diagonalizada. Para poder tener una transformación de coordenadas integral, ϑ debe ser constante; por tanto, a partir de (3.24) y (3.26), $m = 0$. Esto implica, tomando en cuenta (3.18) y (3.21), que $n = 0$ y que $c = 0$. Por tanto, el elemento de línea resulta

$$ds^2 = \frac{r}{a_2^2 - b_2^2} dt^2 + r^{-1/2} (dr^2 + dz^2) - r(a_2^2 - b_2^2) d\bar{\phi}^2. \quad (3.88)$$

Este es un caso particular de la métrica de Levi-Civita. Al contrario que en el caso de la clase de Weyl, los escalares de Cartan para la clase de Lewis son distinguibles de los de la métrica de Levi-Civita, excepto para $m = 0$. Más aún, no hay ningún valor de m para el cual los escalares de Cartan sean todos ceros, y esto significa a su vez, que la clase de Lewis no incluye a Minkowski como una clase especial.

3.7 Límite newtoniano y el efecto Aharanov-Bohm en la clase de Weyl

En el límite newtoniano el término de la vorticidad es despreciable, entonces, de (3.73) $c \approx 0$, y recordando (3.12)

$$f = e^{2U}, \quad (3.89)$$

entonces U es

$$U = 2\sigma \log r + \frac{1}{2} \log a, \quad (3.90)$$

donde σ está dada por

$$\sigma = \frac{1}{4} (1 - n). \quad (3.91)$$

En la teoría newtoniana, (3.90) es el potencial gravitacional de una línea infinita y uniforme con una masa por unidad de

longitud igual a σ . La constante $(1/2)\log a$ en(3.90) representa el potencial arbitrario y constante que existe en la solución newtoniana. Existen geodésicas circulares tipo tiempo $0 < n < 1$, o $0 < \sigma < 1/4$, como era de esperarse en el análogo newtoniano. Cuando $\sigma = 1/4$ las geodésicas circulares se vuelven nulas.

La métrica (3.12)-(3.15) tiene curvatura infinita de acuerdo a los escalares de Cartan (3.74)-(3.77), a lo largo del eje z en $r = 0$ para todos los n excepto $n = \pm 1$, i. e., $\sigma = 0$ y $1/2$ de acuerdo con (3.91). Por tanto, las métricas de la clase de Weyl tienen una singularidad a lo largo del eje $r = 0$, por consiguiente podemos decir que este espaciotiempo está generado por una fuente lineal uniforme e infinita de densidad $0 < \sigma < 1/4$.

Considerando el límite estático para las métricas de la clase de Weyl cuando $n = 1$, ($\sigma = 0$) y $b = c = 0$, tenemos de (3.1)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + \frac{r^2}{a}d\phi^2, \quad (3.92)$$

dando lugar a un espaciotiempo localmente plano. En este caso (3.92) representa el espaciotiempo generado por una cuerda a lo largo del eje de simetría con densidad de energía lineal ς dado por [26]

$$\varsigma = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a^{1/2}} \right), \quad (3.93)$$

siendo $a > 1$. Por tanto la constante a directamente vinculada al análogo gravitacional del efecto Aharanov-Bohm [12]. Este efecto muestra que la gravitación depende de la estructura topológica del espaciotiempo dando lugar a un déficit angular δ igual a

$$\delta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{a^{1/2}} \right), \quad (3.94)$$

como en el efecto Aharanov-Bohm electromagnético, donde una cantidad clásicamente no observable, (el vector potencial), resulta observable (parte de ella) a través de un efecto cuántico no local. Su análogo gravitacional permite que una cantidad (newtoniana) no observable (la constante adicional al potencial newtoniano) resulte observable en la teoría relativista a través del déficit angular en las cuerdas.

Considerando $c = 0$ y $n = 1$ ($\sigma = 0$) en (3.1) tenemos de (3.12)-(3.15) y (3.79)

$$ds^2 = -d\tau^2 - 2b a^{1/2} d\tau d\phi + dr^2 + dz^2 + \left(\frac{r^2}{a} - b^2 a \right) d\phi^2, \quad (3.95)$$

produciendo un espaciotiempo localmente plano. En este caso (3.95) representa el espaciotiempo exterior a una cuerda girando a lo largo del eje de simetría [17] con la misma densidad de energía lineal ς dada por (3.93) y momento angular J dado por

$$J = -\frac{1}{4} b a^{1/2}, \quad (3.96)$$

puesto que $a > 1$.

Como ha sido demostrado [17], una partícula escalar cuántica moviéndose alrededor de una cuerda cósmica rotante como la dada por (3.95), exhibe un factor de fase proporcional a J , en su momento angular; una reminiscencia evidente del efecto Aharanov-Bohm. Vale la pena mencionar que incluso en el caso $b = 0$ aparece un efecto tipo Aharanov-Bohm (de una clase diferente) como se comentó en el caso estático, puesto que el espectro del momento angular difiere del usual, sólo si $a > 1$.

Geodésicas en Espaciotiempo de la clase de Weyl

4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos geodésicas circulares, radiales y a lo largo del eje z para la clase de Weyl. Supondremos diferentes valores para los parámetros. En particular enfatizaremos las propiedades de confinamiento que surge en los espaciotiempo de la clase de Weyl. Llamaremos la atención también acerca de una fuerza de un origen no newtoniano que aparece a lo largo del eje z .

4.2 Geodésicas circulares

Discutiremos la expresión (3.49) para la velocidad angular y la velocidad tangencial (3.53). Con el fin de exhibir más claramente el papel de los parámetros, consideraremos dos casos diferentes, cuando $b = 0, c \neq 0$ y $b \neq 0, c = 0$.

4.2.1 Caso $b = 0, c \neq 0$

Para este caso, sustituyendo la métrica (3.12)-(3.15) en (3.49), obtenemos

$$\omega = \frac{c}{n} \pm \omega_0 = \frac{c}{1+4\sigma} \pm \omega_0 \quad (4.1)$$

donde ω_0 es la velocidad angular cuando el espaciotiempo es estático dado por la métrica de Levi-Civita,

$$\omega_0^2 = \frac{1-n}{1+n} a^2 r^{-2n} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma} a^2 r^{2(4\sigma-1)} \quad (4.2)$$

y hemos usado (3.91).

A partir de (4.2) podemos ver que cuando el defecto topológico a decrece el ángulo total alrededor del eje z , siendo $a > 1$, entonces incrementa la velocidad angular. La situación se invierte para $a < 1$.

El término $c/(1-4\sigma)$ representa una corrección de arrastre de sistema de referencia inercial al caso estático, similar al que aparece en el caso de la métrica de Kerr [30] o en el campo de un monopolo magnético masivo y cargado[8]. La presencia de c en ese término resulta inteligible cuando recordamos que este parámetro mide la vorticidad de la fuente caracterizada por un cilindro anisótropo rotando rígidamente [11]. Este término aumenta o disminuye el módulo de ω si la vorticidad está respectivamente en la misma dirección o en la opuesta que la rotación de una partícula de prueba. Más aún, el término de arrastre se incrementa por la masa newtoniana por unidad de longitud. Calculando la velocidad tangencial de la partícula, (3.53), tomando en cuenta (3.12)-(3.15) y (3.56), obtenemos

$$W = \left(\frac{c}{n} \pm \omega_0 \right) \frac{r^n}{a} \left(1 \pm \omega_0 \frac{cr^{2n}}{na^2} \right)^{-1}, \quad (4.3)$$

$$= \left[\frac{cr^{1-4\sigma}}{a(1-4\sigma)} \pm W_0 \right] \left[1 \pm W_0 \frac{cr^{1-4\sigma}}{a(1-4\sigma)} \right]^{-1} \quad (4.4)$$

donde W_0 es la velocidad en el espaciotiempo estático de Levi-Civita,

$$W_0^2 = \frac{1-n}{1+n} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}, \quad (4.5)$$

que también puede ser reescrita como

$$W_0 = \frac{r^n}{a}\omega_0, \quad (4.6)$$

mostrando claramente el límite newtoniano $W_0 = r\omega_0$. Podemos ver que el término de dragado $(cr^{1-4\sigma})/[a(1-4\sigma)]$ para bajas densidades de energía y $a = 1$ es proporcional a la vorticidad por el radio. Sin embargo, vale la pena señalar que este último término decrece con a y más aún, puesto que $W_0 < 1$, W también decrece con a . Por tanto, tenemos un efecto de dragado, corregido por un defecto topológico. Con el fin de entender porqué W decrece con a , a diferencia de la velocidad angular, que crece con a , debemos observar que la longitud de arco Λ a lo largo de una trayectoria circular en este caso con $n = 1$, resulta $d\Lambda = (r/a^{1/2})d\phi$. Por consiguiente, para un $d\phi$ dado, $d\Lambda$ decrece con a creciente, explicando por tanto el decrecimiento de W . Por otra parte, para un Λ dado, $d\phi$ crece con a , explicando porqué la velocidad angular también crece con a . Este argumento no está exento de problemas. Ciertamente, si $c = 0$, el espaciotiempo se reduce al espaciotiempo estático de Levi-Civita, pero la velocidad tangencial W_0 no se ve afectada por a , contrario al argumento de arriba. Lo mismo será cierto para el siguiente caso que discutiremos más abajo, con respecto a b .

Notemos también aquí, en este caso, que c no juega el papel de ningún defecto topológico, i.e., no aparece en el término métrico l , y por consiguiente está restringido a su efecto de dragado del sistema de referencia.

Considerando (3.54) y (3.12)-(3.15), obtenemos

$$\frac{\epsilon}{t^2} = \frac{r^{n+1}}{a} \left[a^2 r^{-2n} - \left(\omega - \frac{c}{n} \right)^2 \right], \quad (4.7)$$

y usando (3.91), resulta

$$\frac{\epsilon}{t^2} = \frac{r^{n+1}}{a} (a^2 r^{-2n} - \omega_0^2) = \frac{(1 - 4\sigma)}{(1 - 2\sigma)} a r^{4\sigma} \quad (4.8)$$

Podemos ver de (4.7) que para geodésicas circulares las condiciones para órbitas tipo tiempo, nulas y tipo espacio, correspondientemente $0 \leq \sigma < 1/4$, $\sigma = 1/4$ y $1/4 \leq \sigma \leq 1/2$, no son afectadas por la vorticidad c de la fuente.

4.2.2 Caso $b \neq 0, c = 0$

Para este caso, luego de sustituir (3.12)-(3.15) en (3.49), obtenemos

$$\omega = \frac{\omega_0 (b\omega_0 \pm 1)}{1 - b^2 \omega_0^2}. \quad (4.9)$$

Ahora tenemos dos clases de términos que aparecen en (4.8). Por una parte la velocidad angular correspondiente al espaciotiempo de Levi-Civita corregido por el factor $1 - b^2 \omega_0^2$, y por otra parte, el término de arrastre topológico del sistema, asociado con b . Lo llamamos arrastre topológico del sistema porque b produce también un defecto topológico, para distinguirlo del arrastre del sistema engendrado por c que no produce defectos topológicos en el caso previo. El aumento de ω con b se interpreta como sigue. En el caso $n = 1$, el elemento de línea (3.1) toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 - 2ba^{1/2} dt d\phi + dr^2 + dz^2 + \left(\frac{r^2}{a} - b^2 a \right) d\phi^2. \quad (4.10)$$

por tanto, partiendo de (4.9) la longitud de arco Λ a lo largo de la trayectoria circular está dada por

$$d\Lambda = \left(\frac{r^2}{a} - b^2 a \right)^{1/2} d\phi \quad (4.11)$$

Así, para un $d\Lambda$ dado, b 's mayores conducen a ϕ 's mayores y por consiguiente a mayores velocidades angulares.

Considerando (3.54) y (3.12)-(3.15), obtenemos

$$\frac{\epsilon}{\dot{t}^2} = ar^{-n+1} (1 + b\omega)^2 - \frac{r^2}{f} \omega^2, \quad (4.12)$$

y usando (3.90), (4.2), (4.8), resulta

$$\frac{\epsilon}{\dot{t}^2} = (1 \mp b\omega_0)^{-2} \frac{r^{n+1}}{a} (a^2 r^{-2n} - \omega_0^2) = (1 \mp b\omega_0)^{-2} \frac{(1 - 4\sigma)}{(1 - 2\sigma)} ar^{4\sigma}. \quad (4.13)$$

Observemos de (4.12) que para geodésicas circulares la condición para órbitas tipo tiempo, nulas y tipo espacio son las mismas que en el caso $b = 0$ y $c \neq 0$.

Calculando la velocidad tangencial de la partícula (3.53) con (3.12)-(3.15), obtenemos

$$W = \frac{r^n}{a} \omega_0 = W_0. \quad (4.14)$$

A partir de (4.13) vemos que la velocidad de la partícula no se ve afectada por b , de hecho, su velocidad es la misma que la que se obtuvo en el espaciotiempo de Levi-Civita. Enfatizemos que b no produce arrastre del sistema sobre W sino un arrastre topológico sobre ω . Mientras que en el caso previo vimos que c producía un arrastre sobre W sin producir defectos topológicos.

En el caso general, $b \neq 0$ y $c \neq 0$ ambos parámetros contribuyen de una manera complicada al arrastre de los sistemas y a efectos topológicos.

4.3 Geodésicas

Sustituyendo (3.42)-(3.44) en (3.45), tenemos una expresión para la rapidez radial de la partícula de prueba,

$$\dot{r}^2 = e^{-\mu} \left(E^2 \frac{l}{D^2} + 2EL \frac{k}{D^2} - \epsilon - L^2 \frac{f}{D^2} - P^2 e^{-\mu} \right). \quad (4.15)$$

Restringiremos el estudio de las geodésicas a $0 < n < 1$, que es la condición para geodésicas circulares tipo tiempo, como es de esperarse en el análogo newtoniano [11].

Partiendo de (3.14) y (3.15), obtenemos

$$\dot{z} = P r^{(1-n^2)/2}, \quad (4.16)$$

que significa que si $P \neq 0$, las partículas incrementan su velocidad a lo largo de z cuando se distancian radialmente del eje, mientras que disminuyen su velocidad axial cuando se mueven radialmente hacia el eje. Este resultado indica que aparece una fuerza paralela al eje z . En el caso plano $n = 1$ tal efecto desaparece mostrando su naturaleza no newtoniana. Partiendo de (3.14) y (3.32) se sigue que

$$\dot{z}^2 = \frac{1 - n^2}{2} \frac{\dot{r} \dot{z}}{r}, \quad (4.17)$$

por tanto, esta fuerza tiende a amortiguar cualquier movimiento a lo largo del eje z cada vez que la partícula se aproxime al eje, esta tendencia se revierte en el caso contrario. Un resultado similar se obtiene en el espaciotiempo de van Stockum (vea el capítulo (5)), aunque en ese caso el efecto está relacionado con la vorticidad de la fuente, mientras que en nuestro caso ni b ni c aparecen en (4.15). Vale la pena señalar

que en el campo de cuerpos rotantes axialmente simétricos [6], también aparecen fuerzas no newtonianas paralelas al eje z , sin embargo estas fuerzas están directamente relacionadas con el espín de la fuente. En un universo rotante estacionario ha sido notado también un potencial repulsivo a lo largo del eje de rotación [32]. Ahora estudiemos (4.14) para los dos casos considerados para geodésicas circulares y nos concentraremos en partículas nulas y tipo tiempo, i.e., $\epsilon = 0$ y 1.

4.3.1 Caso $b = 0$, $c \neq 0$

Para este caso, sustituyendo (3.12)-(3.15), en (4.14), obtenemos

$$\dot{r}^2 = r^{-(1-n)^2} [V_0 - V(r)], \quad (4.18)$$

donde

$$V_0 = \frac{1}{a} \left(E - L \frac{c}{n} \right)^2 > 0, \quad (4.19)$$

$$V(r) = \epsilon r^{1-n} + P^2 r^{(1-n)(3+n)/2} + aL^2 r^{-2n} > 0. \quad (4.20)$$

La aceleración radial de la partícula es, recordando (4.17)

$$\ddot{r} = \frac{1}{4} r^{-1-(1-n)^2/2} [-(1-n)^2 V_0 - (1-n)(1+n)\epsilon r^{1-n} + (1+n)^2 aL^2 r - 2n - (1-n)(1+n)P^2 r^{(1-n)(3+n)/2}]. \quad (4.21)$$

Partiendo de (4.19) conseguimos

$$V'(r) = (1-n)\epsilon r^{-n} - 2naL^2 r^{-1-2n} + \frac{1}{2}(1-n)(3+n)P^2 r^{-1+(1-n)(3+n)/2}. \quad (4.22)$$

La ecuación $V'(r) = 0$ tiene una solución, digamos $r = r_c$, que satisface

$$2naL^2 r_c^{-1-2n} = (1-n)\epsilon r_c^{-n} + \frac{1}{2}(1-n)(3+n)P^2 r_c^{-1+(1-n)(3+n)/2}. \quad (4.23)$$

Puesto que

$$V''(r) = \frac{1}{r} - [n(1-n)\epsilon r^{-n} + 2n(2n+1)aL^2r^{-1-2n} + \frac{1}{2}(1-n)(3+n) \left(\frac{1}{2}(1-n)(3+n) - 1 \right) P^2 r^{-1+(1-n)(3+n)/2}] \quad (4.24)$$

y con (4.22) tenemos

$$V''(r_c) = \frac{1}{r_c} \left\{ (1-n)(1+n)\epsilon r_c^{-n} + \frac{1}{2}(1-n)(3+n) \left(2n + \frac{1}{2}(1-n)(3+n) \right) P^2 r_c^{-1+(1-n)(3+n)/2} \right\} \quad (4.25)$$

Por otra parte, partiendo de (4.19), si $\epsilon \neq 0$ y/o $P \neq 0$, tenemos que cuando $r \rightarrow 0$ o ∞ , $W(r) \rightarrow \infty$. Más aún, partiendo de (4.24) se tiene que $V''(r_c) > 0$, por tanto, la ecuación $V'(r) = 0$ tiene una sola solución $r = r_c$ y corresponde a un mínimo.

Observemos que en este caso el parámetro c afecta sólo a V_0 , (ver ecuación (4.18)) modificando la energía de la partícula y salvo esto, dejando a la geodésica indistinguible del caso del espaciotiempo estático de Levi-Civita.

Caso $\epsilon = 0, P = 0$

Partiendo de (4.19) y (4.20) tenemos

$$V(r) = aL^2r^{-2n}, \quad (4.26)$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{4}r^{-1-(1-n)^2/2} \left[-(1-n)^2V_0 + (1+n)^2aL^2r^{-2n} \right]. \quad (4.27)$$

Una partícula nula con r grande se acerca a z con aceleración negativa decreciente, $\ddot{r} < 0$ y rapidez creciente \dot{r} . Su rapidez alcanza un máximo en $\ddot{r} = 0$ y luego comienza a disminuir puesto que la aceleración se vuelve positiva, $\ddot{r} > 0$. La partícula nula llega a una distancia mínima $r = r_{\min}$ cuando $\dot{r} = 0$ y $V_0 = V(r)$. En $r = r_{\min}$ la partícula nula es reflejada a infinito, $r \rightarrow \infty$ cuando $\dot{r} \rightarrow 0$.

Caso $\epsilon \neq 0, P = 0$

A partir de (4.19) y (4.20), tenemos

$$V(r) = \epsilon r^{1-n} + aL^2 r^{-2n}, \quad (4.28)$$

$$\ddot{r} = \frac{1}{4} r^{-1-(1-n)^2/2} \left[-(1-n)^2 V_0 - (1-n)(1+n)\epsilon r^{1-n} + (1+n)^2 aL^2 r^{-2n} \right]. \quad (4.29)$$

Para este caso $V_0 = V(r)$ tiene dos raíces reales, digamos r_{\min} y r_{\max} . Una partícula tipo tiempo que se acerque a z es reflejada en $r = r_{\min}$ y se mueve hacia afuera hasta cuando $\dot{r} = 0$ en $r = r_{\max}$ repitiendo incesantemente esta trayectoria. Esta clase de confinamiento de la partícula de prueba también ha sido conseguido en el espaciotiempo de van Stockum (vea el capítulo (5)). En este caso si el movimiento es circular, $\dot{r} = 0$, hay órbitas estables porque $V(r)$ tiene un mínimo.

Caso $P \neq 0$

En este caso mientras la partícula se mueve a lo largo del eje z , de acuerdo con (4.15), hay un confinamiento similar al caso previo en el plano $z = \text{constante}$. El efecto de P , si $\epsilon \neq 0$

es disminuir el r_{\min} y el r_{\max} a los que llega la partícula. Es interesante notar que incluso si $\epsilon = 0$ la partícula nula tiene una trayectoria similar en el plano $z = \text{constante}$, que no está permitida si $P = 0$, como fue descrito anteriormente.

4.3.2 Caso $b \neq 0, c = 0$

Para este caso la sustitución (3.12)-(3.15), en (4.14) resulta

$$\dot{r}^2 = r^{-(1-n)^2} [V_0 - V(r)], \quad (4.30)$$

donde

$$V_0 = \frac{1}{a} E^2 > 0, \quad (4.31)$$

$$V(r) = \epsilon r^{1-n} + P^2 r^{(1-n)(3+n)/2} + a(L + bE)^2 r^{-2n} > 0. \quad (4.32)$$

Vemos que contrario a c , b afecta a $V(r)$ y no a V , modificando el momento angular de la partícula de prueba. Partiendo de (4.31) observamos que incluso si $L = 0$ hay un momento angular actuando sobre la partícula. La diferencia entre los parámetros b y c es de esperarse a partir de nuestro análisis de las geodésicas circulares. Para $L \neq 0$ y 0 y $\epsilon = 0, P = 0; P = 0; y P \neq 0$ el comportamiento de las geodésicas es cualitativamente similar al caso $b = 0, c \neq 0$ con $L \neq 0$.

El Espaciotiempo de van Stockum

5.1 Introducción

La fuente más importante estudiada hasta ahora para el espaciotiempo de Lewis es un cilindro de polvo rotando rígidamente. Esto fue considerado por vez primera por van Stockum [37] en 1937 donde dio una solución completa incluyendo las condiciones de acoplamiento apropiadas. Ese fue un artículo realmente adelantado a su tiempo. En este capítulo nosotros presentamos el acoplamiento de esta fuente y mostramos que puede producir cualquiera de las dos clases dependiendo de los valores de sus parámetros. Estudiaremos con profundidad el movimiento geodésico de las partículas de prueba adentro del polvo de van Stockum. Veremos que la propiedad de confinamiento surge naturalmente y sugeriremos posibles vínculos de esta fuente con las explicaciones físicas de los jets extragalácticos.

5.2 Polvo acoplado al espaciotiempo de Lewis rotando rígidamente

Un cilindro de polvo rotando rígidamente y con shear nulo, se describe a través de un tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad (5.1)$$

donde ρ es la densidad de energía, y u_μ es la cuadrivelocidad que satisface $u^\mu u_\mu = -1$. La solución a las ecuaciones de Einstein (3.56) para la métrica (3.1) está dada por

$$f = 1, \quad k = wr^2, \quad \mu = -w^2r^2, \quad l = r^2(1 - a^2r^2), \quad (5.2)$$

donde w es una constante positiva arbitraria. La densidad de energía y la cuadrivelocidad resultan

$$\kappa\rho = 4w^2e^{w^2r^2}, \quad u^\mu = \delta_\circ^\mu, \quad (5.3)$$

donde κ es la constante de acoplamiento gravitacional.

En un punto distante $r = r_1$ a partir del eje podemos hacer una transformación de coordenadas puramente local al sistema localmente no rotante (SLNR) [7]

$$d\bar{\phi} = d\phi + \frac{w}{1 - w^2r_1^2}dt. \quad (5.4)$$

En este sistema la métrica tiene una forma diagonal cerca de r_1 . Puesto que el SLNR tiene velocidad angular $-a(1 - w^2r_1^2)^{-1}$ con respecto al sistema comóvil, la velocidad angular del fluido con respecto al SLNR es $\bar{w} = w(1 - w^2r_1^2)^{-1}$. A medida que $r_1 \rightarrow 0$, $\bar{w} \rightarrow w$, de tal forma que podemos tomar w como la velocidad angular en el eje.

Acoplado el cilindro de polvo rotando rígidamente (5.2) en $r = R$ a la métrica exterior de Lewis dada por la clase de Weyl

(3.12)-(3.15) y la clase de Lewis (3.22)-(3.25) satisfaciendo las condiciones de acoplamiento (3.71) y (3.72), da las siguientes soluciones. Para $wR < 1/2$ (caso I)

$$f = -r \left[2\beta \cosh(2N \ln r) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \sinh(2N \ln r) \right], \quad (5.5)$$

$$k = -r \left[\cosh(2N \ln r) + \frac{\beta}{\alpha} \sinh(2N \ln r) \right], \quad (5.6)$$

$$l = \frac{r}{\alpha} \sinh(2N \ln r), \quad (5.7)$$

$$e^\mu = \lambda \left(\frac{r}{R} \right)^{2N^2 - 1/2}; \quad (5.8)$$

y para $wR > 1/2$ (caso III)

$$f = r \left[2\beta \sin(2N \ln r) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \cos(2N \ln r) \right], \quad (5.9)$$

$$k = r \left[\sin(2N \ln r) - \frac{\beta}{\alpha} \cos(2N \ln r) \right], \quad (5.10)$$

$$l = \frac{r}{\alpha} \cos(2N \ln r), \quad (5.11)$$

$$e^\mu = \lambda \left(\frac{r}{R} \right)^{-2N^2 - 1/2}. \quad (5.12)$$

Las constantes α, β, N y λ están dadas por, para el caso I

$$N = \frac{1}{2} (1 - 4w^2 R^2)^{1/2}, \quad (5.13)$$

$$\alpha = \frac{(1 - 4w^2 R^2)^{1/2}}{2w^3 R^4}, \quad (5.14)$$

$$\beta = -\frac{1 - 2w^2 R^{21/2}}{2w^3 R^4}, \quad (5.15)$$

$$\lambda = e^{-w^2 R^2}; \quad (5.16)$$

y para el caso III

$$N = \frac{1}{2}(4w^2 R^2 - 1)^{1/2}, \quad (5.17)$$

$$\alpha = \frac{(4w^2 R^2 - 1)^{1/2}}{2w^3 R^4}, \quad (5.18)$$

$$\beta = \frac{2w^2 R^2 - 1}{2w^3 R^4}, \quad (5.19)$$

$$\lambda = e^{-w^2 R^2}. \quad (5.20)$$

Caso II, i.e., $wR = 1/2$, es definido por van Stockum [37] a través de un proceso de límite del caso I. Este también es un límite del caso III. Sin embargo, debe ser enfatizado que la sustitución directa de $wR = 1/2$ en los casos I y III no provee el resultado correcto. La solución I de van Stockum pertenece a la clase Weyl donde los parámetros reales n, a, b y c asumen los siguientes valores

$$n = (1 - 4w^2 R^2)^{1/2}, \quad (5.21)$$

$$a = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2\alpha}, \quad (5.22)$$

$$b = \pm \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad (5.23)$$

$$c = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} N; \quad (5.24)$$

mientras que la solución III de van Stockum pertenece a la clase de Lewis, donde los parámetros reales m, a_1, b_1, a_2 y b_2 , asumen los siguientes valores

$$m = (4w^2 R^2 - 1)^{1/2}, \quad (5.25)$$

$$b_2 = 0, \quad (5.26)$$

$$a_2 = -\frac{1}{b_1}, \quad (5.27)$$

$$a_1 = \frac{\beta}{b_1}, \quad (5.28)$$

$$b_1^2 = -\alpha. \quad (5.29)$$

A modo de entender mejor las métricas de la clase de Lewis, consideremos brevemente la métrica de la clase de Weyl. Nosotros demostramos en el Capítulo (3) (3.91) que la masa newtoniana por unidad de longitud está dada por

$$\sigma = \frac{1}{4}(1 - n), \quad (5.30)$$

donde n es una constante real. Así, de (5.21) y (5.30), tenemos

$$\sigma = \frac{1}{4} [1 - (1 - 4w^2 R^2)^{1/2}], \quad (5.31)$$

para el caso I. Para $w^2 R^2 \ll 1$, esta expresión se reduce a

$$\sigma \approx \frac{1}{2} w^2 R^2. \quad (5.32)$$

Este es el mismo resultado obtenido por Bonnor [7] en esta aproximación. Usando este resultado él estableció un límite inferior para la densidad lineal de masa en el caso III ($wR < 1/2$), obteniendo $1/8$. Nosotros creemos que un mejor límite inferior podría ser dado directamente por (5.31), que es $\sigma = 1/4$. El valor $\sigma = 1/4$ representa la frontera entre las métricas de la clase de Weyl y las de la clase de Lewis, al menos para el caso de van Stockum.

Retornando a la clase de Lewis, es importante notar que los escalares de Cartan no admiten un espaciotiempo de Minkowski. Esto está en acuerdo con la existencia de un límite inferior para σ en la solución III de van Stockum puesto que con este límite inferior la fuente no puede ser hecha vacío, y por tanto la solución exterior no puede ser Minkowski.

Los escalares de Cartan imponen un límite superior al parámetro m , dado por

$$m \leq 3^{1/2}, \quad (5.33)$$

puesto que para valores de m más grandes que éste, la singularidad está en $r = \infty$ y no en $r = 0$. Cuando sustituimos este valor en (5.25) considerando la igualdad, se tiene que $wR = 1$, lo cual concuerda con el resultado de Bonnor [7].

5.3 Geodésicas en el espacio de van Stockum

Aquí nosotros consideraremos la integración general de las geodésicas para la métrica (3.1) obtenidas en (3.42)-(3.44) y la expresión que viene del elemento de línea (3.45), y sustituyendo la solución (5.2), obtenemos

$$\dot{t} = E(1 - w^2 r^2) + wL, \quad (5.34)$$

$$\dot{z} = P e^{w^2 r^2}, \quad (5.35)$$

$$\dot{\phi} = L \frac{1}{r^2} - wE, \quad (5.36)$$

$$-\epsilon = -\dot{t}^2 + 2wr^2 \dot{t} \dot{\phi} + e^{-w^2 r^2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + (1 - w^2 r^2) r^2 \dot{\phi}^2, \quad (5.37)$$

donde las constantes E , P y L representan respectivamente la energía total de la partícula de prueba, su momentum a lo largo de z y su momentum angular alrededor del eje z ;

y $\epsilon = 0, 1$ o -1 si las geodésicas son nulas, tipo tiempo o tipo espacio. En lo que sigue nosotros estaremos interesados solamente en las geodésicas nulas y tipo tiempo.

Restringiremos el estudio del movimiento geodésico de las partículas de prueba, que se hará en la próxima sección, al caso $0 \leq wr \leq 1$ puesto que en $wr = 1$ el círculo de este radio alrededor del eje es una curva cerrada nula. Para valores mayores, $wr > 1$ representa curvas tipo tiempo cerradas alrededor del eje [7].

5.4 Movimiento Geodésico en el espaciotiempo de van Stockum

Derivando (5.37) con respecto al parámetro afín a lo largo de las geodésicas y sustituyendo en (5.34), (5.35), (5.36) y definiendo

$$0 \leq x \equiv wr \leq 1, \quad (5.38)$$

obtenemos

$$\ddot{x} = w^2 x e^{x^2} \left(2wEL - \epsilon - E^2 x^2 - 2P^2 e^{x^2} + w^2 L \frac{1 - x^2}{x^4} \right). \quad (5.39)$$

A partir de (5.39), tenemos que

$$\dot{x}' = w^2 e^{x^2} \left[-\epsilon (1 + 2x^2) - 2P^2 e^{x^2} (1 + 4x^2) + 2E^2 \frac{g(x)}{x^2} \right], \quad (5.40)$$

donde las primas se refieren a diferenciación con respecto a x y

$$g(x) = C^2 \left(-x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \right) + C(2x^6 + x^4) - x^8 - \frac{3}{2}x^6, \quad (5.41)$$

con

$$C = \frac{wL}{E}. \quad (5.42)$$

Si $L \leq 0$, o $C \leq 0$, tenemos a partir de (5.41) $g < 0$, lo cual significa tomando en cuenta (5.40) que $\ddot{x}' < 0$. Pero si $L > 0$ puesto que a partir de (5.41),

$$g(0) = -\frac{3}{2}C^2 < 0, \quad g(1) = -\frac{5}{2}3C - C^2 < 0, \quad (5.43)$$

y no hay raíces C reales para $g(x) = 0$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, tenemos también que $g(x) < 0$. Por consiguiente, $\ddot{x}' < 0$ para $L > 0$. Por tanto \ddot{x} es decreciente para valores crecientes de x para $L \leq 0$, tanto como para $L > 0$.

Por otra parte, haciendo

$$V_0 \equiv E^2 + 2wEL - \epsilon, \quad V(x) \equiv E^2 x^2 + P^2 e^{x^2} + \frac{w^2 L^2}{x^2}, \quad (5.44)$$

la ecuación (5.37), puede ser escrita como

$$\dot{x}^2 = w^2 e^{x^2} [V_0 - V(x)]. \quad (5.45)$$

Note que $V(x)$ es no negativo. Así, con el fin de que la ecuación (5.45) tenga sentido para x reales, debemos tener $V_0 > 0$, lo cual es equivalente a

$$E > (w^2 L^2 + \epsilon)^{1/2} - wL. \quad (5.46)$$

Para estudiar ulteriormente el movimiento de las partículas de prueba, consideremos los casos cuando $L = 0$ y $L \neq 0$ separadamente.

Caso A: $L = 0$, para este caso las ecuaciones (5.39) y (5.45), resultan

$$\ddot{x} = -w^2 x e^{x^2} (\epsilon + E^2 x^2 + 2P^2 e^{x^2}), \quad (5.47)$$

$$\dot{x} = w^2 e^{x^2} \left[E^2(1 - x^2) - (\epsilon + P^2 e^{x^2}) \right]. \quad (5.48)$$

A partir de (5.48), vemos que para fotones moviéndose radialmente, $\epsilon = 0$ y $P = 0$, el máximo radio que el fotón puede alcanzar es $x = 1$. La aceleración de estos fotones es cero en el eje de simetría, y aumenta exponencialmente con su dirección siempre hacia adentro a medida que x aumenta. Como un resultado, todos ellos serán arrastrados hacia atrás cuando alcancen el radio máximo $x = 1$, donde su velocidad es cero. A medida que ellos se mueven hacia adentro a partir de allí, alcanzan el eje con una velocidad no nula y son reflejados moviéndose hacia afuera. Este comportamiento se repetirá incesantemente.

Para fotones con $P \neq 0$ y/o partículas tipo tiempo el movimiento es similar a lo largo de x , y la diferencia está en que el radio máximo que ellas pueden alcanzar es menor que 1. Pero mientras tanto ellos también tiene movimiento en la dirección axial con una velocidad dada por (5.35),

$$\dot{z} = P e^{x^2}, \quad (5.49)$$

lo cual significa que la partícula incrementa su velocidad a lo largo de z cuando se distancia radialmente a partir del eje, mientras que disminuye su velocidad axial cuando se mueve radialmente hacia el eje. Vea la discusión sobre las fuerzas a lo largo del eje z en III.3.

Por consiguiente, esta clase de fotones y partículas tipo tiempo, están siempre confinadas adentro del cilindro $x = 1$. Observemos que a pesar de que $L = 0$, las partículas tienen una velocidad angular diferente de 0, puesto que (5.36), da

$$\dot{\phi} = -wE, \quad (5.50)$$

debido al arrastre del espaciotiempo.

Caso B: $L \neq 0$. A partir de (5.44), conseguimos

$$V'(x) = 2x \left(E^2 + P^2 e^{x^2} - \frac{w^2 L^2}{x^4} \right). \quad (5.51)$$

Así, $V'(x) = 0$ tiene únicamente una solución, digamos $x = x_c$, que satisface

$$E^2 + P^2 e^{x_c^2} = \frac{w^2 L^2}{x_c^4}. \quad (5.52)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (5.44) conseguimos que cuando $x \rightarrow 0$ o ∞ , $V(x) \rightarrow \infty$. Por tanto se concluye que $x = x_c$ es el punto donde $V(x)$ tiene un mínimo. Vea la figura (5.1)

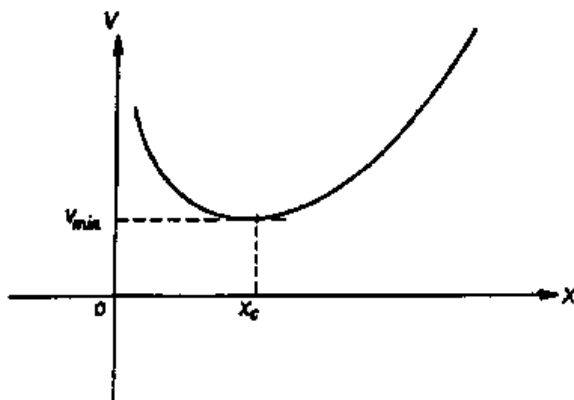


Figura 5.1: La respuesta genérica de la función $V(x)$, definida en la ecuación (12.4). La cual, presenta un único mínimo en $x = x_c$

Partiendo de la ecuación (5.45) y la figura (5.1) podemos ver que si la ecuación

$$V_0 = V(x) = 0, \quad (5.53)$$

tiene dos raíces reales, digamos x_{\min} y x_{\max} con $0 < x_{\min} < x_{\max} \leq 1$, entonces el movimiento de las partículas de prueba estará confinado adentro de la concha $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Si la ecuación (5.53) tiene sólo una raíz real, digamos $x = x_0$ con $0 < x_0 \leq 1$, entonces el movimiento estará confinado afuera del cilindro $x = x_0$. Note que las partículas de prueba con $L \neq 0$ nunca pueden alcanzar el eje $x = 0$ puesto que en este caso las aceleraciones en el eje son infinitamente grandes y dirigidas hacia afuera (Ver (5.39)). Así cualquier partícula tanto tipo tiempo como nula moviéndose inicialmente hacia adentro será halada hacia afuera antes de que alcance el eje por una enorme fuerza proporcional a x^{-3} . Esto indica que el colapso gravitacional de un cilindro con rotación nunca puede desarrollar singularidades en el eje, y en su lugar después de colapsar a lo largo del radio rebotará hacia afuera [34], [35], [3]. Si la ecuación (5.53) no tiene solución real en el intervalo $0 < x \leq 1$, significa que el movimiento de las partículas de prueba está prohibido. Por tanto, estudiar su movimiento se reduce al estudio de las raíces de la ecuación (5.53) para $0 < x \leq 1$. De la figura (5.1) nosotros podemos ver que el número de raíces depende crucialmente del hecho de si $x_c \leq 1$. Claramente si $x_c \geq 1$ el número de raíces de la ecuación (5.53) es uno o cero, dependiendo de si

$$\Delta V \equiv V_0 - V(1) = 2wEL - (\epsilon + w^2L^2 + eP^2), \quad (5.54)$$

es mayor que o igual a cero o menor que cero respectivamente. Cuando $x_c < 1$, la ecuación (5.53) tendrá dos, una o cero raíces dependiendo de si

$$\delta V \equiv V_0 - V_{\min}, \quad (5.55)$$

es mayor que, igual a o menor que cero respectivamente. Para ver si el mínimo de $V(x)$ ocurre adentro del cilindro $x = 1$ o

no, es suficiente considerar $V'(x)$ dada por la ecuación (5.50) en $x = 1$ es mayor que, igual a o menor que cero. Cuando $V'(1) > 0$, nosotros debemos tener $x_c < 1$; cuando $V'(1) = 0$, tenemos $x_c = 1$, y cuando $V'(1) < 0$ debemos tener $x_c > 1$. Ver figura (5.2).

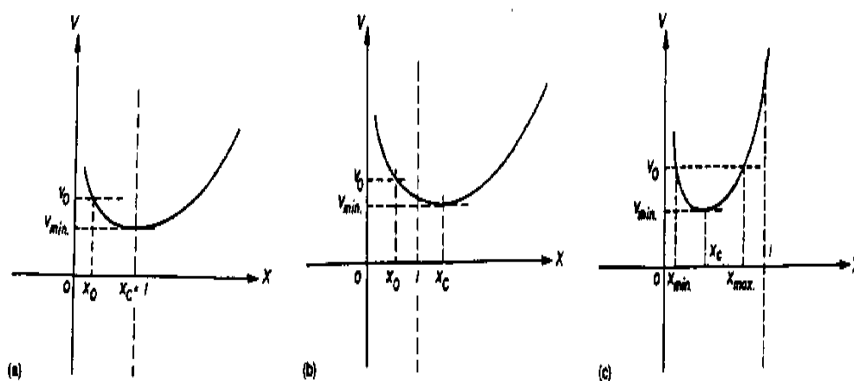


Figura 5.2: Tres casos diferentes para la función $V(x)$:
 (a) $V'(x = 1) = 0$; (b) $V'(x = 1) < 0$; y (c) $V'(x = 1) > 0$.

A partir de la ecuación (5.51) conseguimos que

$$V'(x = 1) = 2 \left[E^2 - (w^2 L^2 - e P^2) \right]. \quad (5.56)$$

así tenemos los siguientes tres subcasos distinguibles

$$(i) \quad \left| \frac{L}{P} \right| > \frac{e^{1/2}}{w}, \quad E^2 = w^2 L^2 - e P^2; \quad (5.57)$$

$$(ii) \quad \left| \frac{L}{P} \right| > \left| \frac{e^{1/2}}{w} \right|, \quad E^2 < w^2 L^2 - e P^2; \quad (5.58)$$

$$(iii) \quad E^2 > w^2 L^2 - e P^2. \quad (5.59)$$

Considerémoslo caso por caso.

Caso B(i): A partir de las ecuaciones (5.46) y (5.54) conseguimos que cuando

$$L < 0; \quad \text{or} \quad L > 0, \quad E < \frac{1}{2wL}(\epsilon + w^2L^2 + \epsilon P^2), \quad (5.60)$$

es válida, nosotros tenemos $\Delta V < 0$. Puesto que en el presente caso $V'(x=1) = 0$ (Ver ecuación (5.58)), entonces tenemos que $\Delta V = V_0 - V(1) = V_0 - V_{\min} < 0$. De modo que para cualquier x siempre tenemos que $\dot{x}^2 = w^2x^2e^{x^2}[V_0 - V(x)] < 0$. En otras palabras, en estos dos subcasos el movimiento de la partícula de prueba está prohibido. Cuando $\Delta V > 0$, lo cual es equivalente a

$$L > 0, \quad E \geq \frac{1}{2wL}(\epsilon + W^2L^2 + \epsilon P^2), \quad (5.61)$$

y cuando la ecuación (5.46) se cumple, la ecuación (5.53) tiene una solución, $x = x_0$ en la cual el movimiento está confinado afuera del cilindro $x = x_0$. Ver figura (5.2)a.

Caso B(ii): De la ecuación (5.54) nosotros conseguimos que cuando se satisface la ecuación (5.60), entonces la ecuación (5.53) no tiene raíces reales para $0 < x \leq 1$. Por tanto el movimiento en este caso está prohibido. Cuando las ecuaciones (5.46) y (5.61) se cumplen, la ecuación (5.53) tiene una solución real $x = x_0$ para $0 < x \leq 1$. En este caso el movimiento está confinado fuera del cilindro $x = x_0$. Ver figura (5.2)b.

Caso B(iii): De la figura (5.2)c podemos ver que cuando $\Delta V \geq 0$ y la ecuación (5.46) se satisface, la ecuación (5.53) tiene una solución real $x = x_0$. Así, en este caso el movimiento está confinado afuera del cilindro $x = x_0$. Cuando $\Delta V \leq 0$, la naturaleza de las raíces de la ecuación (5.53) depende de los signos de δV , definido por (5.55). En particular, cuando

$\delta V > 0$, la ecuación (5.53) tiene dos soluciones reales $x = x_{\min}$ y $x = x_{\max}$, y el movimiento está confinado adentro de la concha $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Mientras más grande sea δV más angosta es la concha. A medida que $\delta V \rightarrow 0^+$, la concha se vuelve infinitamente delgada. Cuando $\delta V < 0$, la ecuación (5.60) no tiene solución y el movimiento está prohibido.

5.5 Discusión y Conclusiones

Del movimiento geodésico de partículas de prueba en un cilindro lleno de polvo rígidamente rotante surgen aspectos interesantes. El espaciotiempo generado por la solución de van Stockum produce la propiedad de confinamiento para partículas de prueba. Eso significa que las partículas están constreñidas a moverse incesantemente entre dos conchas del cilindro. Esta propiedad fue notificada en el espaciotiempo de Gödel [14] independientemente por Kundt [21] y por Chandrasekhar y Wright [9].

Mostramos que las partículas nulas pueden alcanzar el radio máximo $x = 1$ que es el límite causal del espaciotiempo de Stockum, cuando $P = L = 0$. En este caso las partículas nulas se mueven radialmente entre los ejes, $x = 0$ y $x = 1$ donde ellas asumen velocidades nulas. A pesar de que $L = 0$ estas partículas tienen velocidad angular diferente de cero debido al arrastre del espaciotiempo. Si $P \neq 0$ y/o las partículas son masivas, el movimiento radial es similar pero no alcanza hasta $x = 1$. Mientras tanto ellas tienen un movimiento a lo largo del eje, aumentando su velocidad axial cuando se distancian radialmente del eje, y disminuyendo su velocidad axial cuando se mueven hacia el eje.

Si las partículas de prueba tienen $L \neq 0$, nunca alcanzarán

$x = 0$ puesto que en este caso las aceleraciones en el eje son infinitamente grandes y dirigidas hacia afuera. Así cualquier partícula nula o masiva inicialmente moviéndose en la dirección del eje será halada hacia afuera antes de que alcance el eje del cilindro. Este hecho indica que el colapso gravitacional de un cilindro rotante lleno con materia nunca podrá desarrollar singularidades sobre el eje [34], [3], [14]. En este caso las partículas de prueba pueden abandonar o estar confinadas adentro del cilindro $x = -1$ dependiendo del valor de sus parámetros iniciales E, P y L .

En galaxias activas aparecen jets extragalácticos y se han sugerido varios modelos para tratar de explicar su origen. Un modelo clásico es el Blanford y Rees [4], [5]. En su modelo se supone que un plasma caliente está continuamente siendo generado en el centro de la galaxia. El objeto central está rodeado por una nube de gas rotante gravitacionalmente confinada. La presión térmica de esta nube de gas constriñe el flujo hacia afuera del plasma relativista dentro de dos canales opuestos. Un flujo en equilibrio es posible solamente si la forma del canal se ajusta de tal manera que se forme una boquilla donde la presión externa caiga a la mitad de su valor central. La forma del canal se supone que se ajuste por sí misma a una boquilla de Laval. Se sabe que esta configuración, con un fluido ligero soportando un fluido pesado en un campo gravitacional, es inestable. Recientemente, Goncalves, Jatenco Pereira y Opher [15] sugirieron que las sondas de Alfvén creadas por encima del abrupto gradiente de densidad cerca de núcleos galácticos son el origen de los jets extragalácticos. La rotación diferencial y el movimiento turbulento en los núcleos galácticos crean un campo magnético bipolar por acción dinamo y la torsión y la reconexión de las líneas del

campo magnético producen ondas de Alfvén. Se han investigado algunos mecanismos de amortiguamiento de las ondas de Alfvén.

Señalemos aquí que el confinamiento de las partículas de prueba en la dirección radial pudiera proveer otra fuente para la formación de jets extragalácticos. Nuestro argumento es como sigue. El campo gravitacional producido por los jets usualmente es despreciable comparado con el producido por la materia en el centro de la galaxia. Así, en una aproximación de primer orden, es suficiente modelar los jets como hechos de partículas de prueba. También, casi todas las galaxias están rotando, como un primer paso podemos modelar el centro de la galaxia como un cilindro rotante. Esta aproximación luce razonable en lo que concierne al campo gravitacional en el centro de la galaxia rotante, aunque nosotros admitimos que es ciertamente altamente simplificado. Asumiendo que el modelo simplificado de arriba pueda capturar alguna esencia de la física, nosotros podemos ver que el confinamiento pueda relacionarse con los jets. Ciertamente, para que esta idea realmente funcione, se deberían construir modelos realistas. Por ejemplo, una nube de polvo rotando con simetría axial y asintóticamente plana en las tres dimensiones espaciales como la considerada en la referencia [6].

Espaciotiempo de Levi-Civita con Constante Cosmológica

6.1 Introducción

Aquí nosotros presentamos la solución general a las ecuaciones de campo de Einstein para un espaciotiempo vacío, estático y cilíndricamente simétrico con constante cosmológica. Daremos los detalles para obtener la solución puesto que apenas recientemente es cuando se ha conseguido dicha solución. La forma final de la métrica estará restringida al caso de constante cosmológica positiva y al final del capítulo sugeriremos una posible fuente para este espaciotiempo. Todavía se conoce muy poco acerca de las propiedades físicas y geométricas de esta solución.

6.2 Ecuaciones de Campo

El elemento de línea general para un espaciotiempo estático y cilíndricamente simétrico está dado por (2.1). Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, con constante cosmológica Λ pueden ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.1)$$

y sus componentes no nulas tomando en cuenta (2.1), son

$$2e^\mu DR_0^0 = -\left(\frac{lf'}{D}\right)' = 2e^\mu D\Lambda, \quad (6.2)$$

$$2e^\mu DR_3^3 = -\left(\frac{f''}{D}\right)' = 2e^\mu D\Lambda, \quad (6.3)$$

$$2R_1^1 = -\mu'' + \mu' \frac{D'}{D} - 2 \frac{D''}{D} + \frac{f'l''}{D^2} = 2\Lambda, \quad (6.4)$$

$$2R_{22} = -\mu'' - \mu' \frac{D'}{D} = 2e^\mu \Lambda. \quad (6.5)$$

Restando (6.3) de (6.2) obtenemos

$$\left(\frac{f'' - lf''}{D}\right)' = 0, \quad (6.6)$$

y sumando (6.3) y (6.2) obtenemos

$$-\frac{D''}{D} = 2e^\mu \Lambda. \quad (6.7)$$

Restando (6.5) de (6.7) e integrando, tenemos

$$\mu' = \frac{D'}{D} + \frac{\delta}{D}, \quad (6.8)$$

donde δ es una constante de integración.

6.3 Integración de las Ecuaciones de Campo

Con el fin de integrar (6.5) hacemos la transformación

$$dR = e^{\mu/2} dr, \quad (6.9)$$

y definimos G como

$$G \equiv De^{\mu/2}. \quad (6.10)$$

Con (6.9) y (6.10) podemos reescribir como

$$G^{**} + 3\Lambda G = 0 \quad (6.11)$$

donde el $*$ denota diferenciación con respecto a R . Las soluciones de (6.11) son para $\Lambda > 0$,

$$G = C_1 \cos \left[(3\Lambda)^{\frac{1}{2}} R \right] + C_2 \text{sen} \left[(3\Lambda)^{\frac{1}{2}} R \right]; \quad (6.12)$$

para $\Lambda = 0$,

$$G = C_1 + C_2 R; \quad (6.13)$$

y para $\Lambda < 0$,

$$G = C_1 \cosh \left[(3\Lambda)^{\frac{1}{2}} R \right] + C_2 \text{senh} \left[(3\Lambda)^{\frac{1}{2}} R \right]; \quad (6.14)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integraciones. La solución (6.13) corresponde a la solución vacía obtenida por Levi-Civita [24].

Haciendo la sustitución

$$v = \frac{f}{l} \quad (6.15)$$

en (6.6), en el nuevo sistema de coordenadas, tenemos

$$\frac{v^*}{v} = \frac{\gamma}{G} = \Theta^*, \quad (6.16)$$

donde γ es una constante de integración y $\Theta(R)$ es una función definida por

$$\Theta = \gamma \int \frac{dR}{G(R)} + \xi, \quad (6.17)$$

donde ξ es una constante arbitraria. Considerando (6.12), (6.13), (6.14) y (6.17) se tiene para $\Lambda > 0$,

$$\Theta = \frac{\gamma}{[3\Lambda(C_1^2 + C_2^2)]^{\frac{1}{2}}} \log \left\{ \tan \left[\frac{(3\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{2} R + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \right] \right\} + \xi, \quad (6.18)$$

para $\Lambda = 0$

$$\Theta = \frac{\gamma}{C_2} \log(C_1 + C_2 R) + \xi; \quad (6.19)$$

y para $\Lambda < 0$, con $C_1 > |C_2|$

$$\Theta = \frac{\gamma}{[3|\Lambda|(C_1^2 - C_2^2)]^{\frac{1}{2}}} \arctan \left[\frac{(3|\Lambda|)^{\frac{1}{2}}}{2} R + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \right] + \xi, \quad (6.20)$$

y con $C_2 > |C_1|$,

$$\Theta = \frac{\gamma}{[3|\Lambda|(C_2^2 - C_1^2)]^{\frac{1}{2}}} \log \left| \tanh \left[(3|\Lambda|)^{\frac{1}{2}} R + \arctan \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \right] \right| + \xi, \quad (6.21)$$

y con $C_2 = \pm C_1$,

$$\Theta = \pm \frac{\gamma}{(3|\Lambda|)^{\frac{1}{2}} C_1} \exp \left[\pm (3|\Lambda| R)^{\frac{1}{2}} \right] + \xi. \quad (6.22)$$

La ecuación (6.8) puede ser reescrita como

$$\frac{3}{2} \mu^* = \frac{G^*}{G} + \frac{\delta}{G}, \quad (6.23)$$

y sustituyendo G a partir de (6.16) en (6.23), obtenemos

$$\frac{3}{2} \mu^* = \frac{G^*}{G} + \frac{\delta}{\gamma} \Theta^*. \quad (6.24)$$

La integración de (6.24) resulta

$$\exp \left(\frac{3}{2} \mu \right) = \alpha G \exp \left(\frac{\delta}{\gamma} \Theta \right). \quad (6.25)$$

Donde α es una constante de integración. La ecuación (6.25), tomando en cuenta (6.18)-(6.22) da las soluciones para $\mu(R)$. En lo que sigue nosotros nos restringiremos al estudio del caso $\Lambda > 0$.

La ecuación (6.3) con (6.9) y (6.10) resulta

$$\left(\frac{l^*}{l}G\right)^* + 2\Lambda G = 0, \quad (6.26)$$

y con (6.12) y (6.18) después de integrar

$$l(R) = C_3 \exp \left[\left(\frac{\Theta - \xi}{\gamma} \right) C_4 \right] G^{2/3}, \quad (6.27)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración y $\Theta(R)$ y $G(R)$ están dadas respectivamente por (6.12) y (6.18).

Restando (6.5) de (6.4) y recordando (6.7), (6.23) y (6.27), obtenemos

$$36\Lambda (C_1^2 + C_2^2) = 9C_4^2 + 4\delta^2 + 6C_4\delta. \quad (6.28)$$

Si tomamos C_1 de (6.28) y lo sustituimos en (6.12) conseguimos una expresión para G cuyo límite cuando $\Lambda \rightarrow 0$ provee la solución vacía (6.13) de Levi-Civita.

La misma conclusión puede ser obtenida si uno trabaja el caso $\Lambda < 0$.

Así, la solución vacía más general, estática y cilíndricamente simétrica con constante cosmológica positiva está dada por (6.25), (6.27), (6.28) y

$$f(R) = \frac{G(R)^2}{l(R)} e^{-\mu(R)}, \quad (6.29)$$

donde $G(R)$ está dada por (6.12).

6.4 Algunos Comentarios

En la literatura podemos conseguir otra solución dada por Linet [27]. Sin embargo, esa solución es un caso particular de la nuestra. En ella el autor supuso que la métrica debía ser singular en el eje z . Las ecuaciones de campo no imponen ninguna restricción sobre las constantes C_1 y C_2 . Haciendo $C_1 = 0$ en nuestra solución obtenemos la solución de Linet.

Una posible fuente para la métrica de Levi-Civita con constante cosmológica positiva es un cilindro lleno con polvo estático y constante cosmológica positiva, la cual caracteriza al universo estático de Einstein. Por consiguiente, a diferencia de la solución de Levi-Civita que tiene al espaciotiempo de Minkowski como fondo, la solución de Levi-Civita con constante cosmológica positiva puede tener al universo de de Sitter como fondo.

Espaciotiempo de Lewis con Constante Cosmológica

7.1 Introducción

Aquí nosotros presentamos la solución general a las ecuaciones de campo de Einstein para un espaciotiempo vacío, estacionario y cilíndricamente simétrico con constante cosmológica [31]. Daremos los detalles para obtener la solución puesto que, al igual que en el caso de la métrica de Levi-Civita, apenas recientemente es cuando se ha conseguido dicha solución. Daremos la solución general tanto para constante cosmológica positiva como negativa. Veremos que sólo si es negativa podremos considerarle una posible fuente. Al igual que en el caso estático, todavía se conoce muy poco acerca de las propiedades físicas y geométricas de este espaciotiempo.

7.2 Ecuaciones de Campo

El elemento de línea general para un espaciotiempo estacionario y cilíndricamente simétrico está dado por (3.1). Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, con constante cosmológica Λ son (4.1) y sus componentes no nulas, tomando en cuenta (3.1), son y sus componentes no nulas tomando en

cuenta (2.1), son

$$-2e^\mu R_{00} = -f'' - \frac{1}{D^2} \left(\frac{1}{2} f l' f' - \frac{1}{2} l f'^2 - k k' f' + f k'^2 \right) = 2\Lambda e^\mu f, \quad (7.1)$$

$$2R_{11} = -\mu'' - \mu' \frac{D'}{D} - 2 \frac{D''}{D} + \frac{1}{D^2} (k'^2 + f' l') = 2\Lambda e^\mu, \quad (7.2)$$

$$2R_{22} = -\mu'' - \mu' \frac{D'}{D} = 2\Lambda e^\mu, \quad (7.3)$$

$$2e^\mu R_{33} = -l'' - \frac{1}{D^2} \left(\frac{1}{2} l l' f' - \frac{1}{2} l f'^2 - k k' l' + l k'^2 \right) = 2\Lambda e^\mu l, \quad (7.4)$$

$$2e^\mu R_{03} = -k'' + \frac{1}{D^2} \left(\frac{1}{2} f l' k' + \frac{1}{2} l f' k' - k f' l' \right) = 2\Lambda e^\mu k \quad (7.5)$$

Considerando (7.1), (7.4) y (7.5) obtenemos para $R_0^0 + R_3^3$ la simple expresión

$$-\frac{D''}{D} = 2\Lambda e^\mu. \quad (7.6)$$

Realizando las siguientes restas: (7.1) xl menos (7.4) xf , (7.4) xk menos (7.5) xl , y (7.1) xk menos (7.5) xf , obtenemos respectivamente

Restando (6.5) de (6.7) e integrando, tenemos

$$\left(\frac{f l' - f' l}{D} \right)' = 0, \quad (7.7)$$

$$\left(\frac{l k' - l' k}{D} \right)' = 0, \quad (7.8)$$

$$\left(\frac{k f' - k' f}{D} \right)' = 0. \quad (7.9)$$

7.3 Integración de las Ecuaciones de Campo

El sistema de ecuaciones (6.7)-(7.9) no es independiente, una de las ecuaciones es consecuencia de las dos restantes. Consideremos (6.7) y (7.8) y hagamos uso de la misma sustitución introducida por van Stockum [37],

$$u = \frac{f}{l}, \quad v = \frac{k}{l} \quad (7.10)$$

entonces tenemos

$$\left(\frac{Du'}{u+v^2} \right)' = 0, \quad \left(\frac{Dv'}{u+v^2} \right)' = 0. \quad (7.11)$$

La solución de (7.11) se puede escribir como

$$u' = \Theta'(u+v^2), \quad v' = \Phi'(u+v^2), \quad (7.12)$$

donde Θ y Φ satisfacen

$$(D\Theta)' = 0, \quad (D\Phi)' = 0. \quad (7.13)$$

A partir de (7.13), tenemos

$$\Phi = A\Theta + B, \quad (7.14)$$

donde A y B son constantes, y (7.14) implica, partiendo de (7.12), que

$$v = Au + B, \quad (7.15)$$

y el sistema (7.12) se reduce a

$$\frac{u'}{A^2u^2 + (2AB + 1)u + B^2} = \Theta'. \quad (7.16)$$

Cuando $A \neq 0$ y $B = 0$ o bien $A = 0$ y $B \neq 0$, o $A = B = 0$, la métrica (3.1) puede reducirse a través de una transformación lineal, al caso estático, que ha sido estudiado en el capítulo 6. La integración de (7.16) arroja los siguientes resultados en los cuales introducimos nuevas constantes α y β .

i. Para $4AB + 1 > 0$,

$$\frac{l}{D} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{senh} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right), \quad (7.17)$$

$$\frac{k}{D} = -\cosh \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right) - \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{senh} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right), \quad (7.18)$$

$$\frac{f}{D} = -2\beta \cosh \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} \operatorname{senh} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right), \quad (7.19)$$

y sustituyendo (7.3) y (7.17)-(7.19) en (7.2), tenemos

$$\mu' = \frac{D''}{D'} - \frac{1}{2} \frac{D'}{D} + \frac{\alpha^2}{8\beta^2} \frac{D'}{D} \Theta'^2. \quad (7.20)$$

ii. Para $4AB + 1 = 0$,

$$\frac{l}{D} = \frac{1}{2\beta} \Theta, \quad (7.21)$$

$$\frac{k}{D} = -\frac{1}{2} \Theta - 1, \quad (7.22)$$

$$\frac{f}{D} = -2\beta - \frac{\beta}{2} \Theta, \quad (7.23)$$

y sustituyendo (7.3) y (7.21)-(7.23) en (7.2), tenemos

$$\mu' = \frac{D''}{D'} - \frac{1}{2} \frac{D'}{D}. \quad (7.24)$$

iii. Para $4AB + 1 < 0$,

$$\frac{l}{D} = \frac{1}{\alpha} \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right), \quad (7.25)$$

$$\frac{k}{D} = -\cos \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right) - \frac{\beta}{\alpha} \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right), \quad (7.26)$$

$$\frac{f}{D} = -2\beta \cos \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2\beta} \Theta \right), \quad (7.27)$$

y sustituyendo (7.3) y (7.25)-(7.27) en (7.2), tenemos

$$\mu' = \frac{D''}{D'} - \frac{1}{2} \frac{D'}{D} - \frac{\alpha^2}{8\beta^2} \frac{D'}{D} \Theta'^2. \quad (7.28)$$

Podemos hacer aún dos integraciones. Restando (7.3) de (7.6) e integrando, resulta

$$\mu' = \frac{D'}{D} + \frac{\alpha}{D}, \quad (7.29)$$

y luego de integrar (7.13) tenemos

$$\Theta' = \frac{\gamma}{D} \quad (7.30)$$

donde γ y δ son constantes de integración.

7.4 Transformación de Variables

Definiendo la transformación

$$d\tilde{r} = e^{\mu/2} dr, \quad \Psi = D e^{\mu/2}, \quad (7.31)$$

podemos expresar (7.13) como

$$\Psi^{**} + 3\Lambda\Psi = 0, \quad (7.32)$$

donde el asterisco denota diferenciación con respecto a la variable \tilde{r} . Las soluciones de (7.32) son

$$\Psi = C_1 \cosh\left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}}\right) + C_2 \operatorname{senh}\left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}}\right) \quad \Lambda < 0; \quad (7.33)$$

$$\Psi = C_1 + C_2 \tilde{r} \quad (7.34)$$

$$\Psi = C_1 \cos\left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}}\right) \quad \Lambda > 0; \quad (7.35)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. La solución (7.34) da la métrica vacía obtenida por Lewis [25] discutida en el capítulo (3).

Con la transformación (7.31) podemos escribir (7.29) y (7.30), como

$$\frac{3}{2}\mu^* = \frac{\Psi^*}{\Psi} + \frac{\delta}{\Psi}, \quad (7.36)$$

$$\Theta^* = \frac{\gamma}{\Psi} \quad (7.37)$$

e integrando resulta

$$e^{\frac{3}{2}\mu} = \varepsilon \Psi \exp(\delta\Omega), \quad (7.38)$$

$$\Theta = \gamma\Omega + \zeta \quad (7.39)$$

donde ε y ζ son constantes de integración y para el caso $\Lambda < 0$, Ω está dado por

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{3|\Lambda|\sqrt{C_2^2 - C_1^2}}} \arctan \left| \operatorname{senh}\left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}} + \arctan h \frac{C_1}{C_2}\right) \right| \quad C_1 > |C_2|; \quad (7.40)$$

$$\Omega = \mp \frac{1}{\sqrt{3|\Lambda|C_1}} \exp\left(\mp \sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}}\right) \quad C_1 = \pm C_2, \quad (7.41)$$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{3|\Lambda|\sqrt{C_2^2 - C_1^2}}} \log \left| \tanh \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}} + \arctan h \frac{C_1}{C_2} \right) \right] \right|$$

$C_2 > |C_1|;$
(7.42)

Para $\Lambda = 0$

$$\Omega = \frac{1}{C_2} \log(C_1 + C_2 \tilde{r}); \quad (7.43)$$

y para $\Lambda > 0$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{3|\Lambda|\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}} \log \left| \tanh \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{3|\Lambda|\tilde{r}} + \arctan h \frac{C_1}{C_2} \right) \right] \right|.$$

(7.44)

Ahora tenemos $\mu(\tilde{r})$, $\Theta(\tilde{r})$ y $D(\tilde{r})$, puesto que (7.38) puede expresarse como

$$D^3 = \frac{1}{\varepsilon} \Psi^2 \exp(-\delta\Omega). \quad (7.45)$$

Sustituyendo en (7.20), (7.24) y (7.28) las expresiones (7.29), (7.30), (7.33) y (7.35), obtenemos las siguientes relaciones entre las constantes:

i. Para $4AB + 1 > 0$

$$3|\Lambda|(C_1^2 - C_2^2) + \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{3\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} = 0, \quad \Lambda < 0; \quad (7.46)$$

$$-C_2^2 + \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{3\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} = 0, \quad \Lambda = 0; \quad (7.47)$$

$$-3\Lambda(C_1^2 + C_2^2) + \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{3\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} = 0, \quad \Lambda > 0; \quad (7.48)$$

ii. Para $4AB + 1 = 0$

$$3|\Lambda|(C_1^2 - C_2^2) + \frac{1}{4}\delta^2 = 0, \quad \Lambda < 0; \quad (7.49)$$

$$-C_2^2 + \frac{1}{4}\delta^2 = 0, \quad \Lambda = 0; \quad (7.50)$$

$$-3\Lambda(C_1^2 + C_2^2) + \frac{1}{4}\delta^2 = 0, \quad \Lambda > 0; \quad (7.51)$$

iii. Para $4AB + 1 < 0$

$$3|\Lambda|(C_1^2 - C_2^2) + \frac{1}{4}\delta^2 - \frac{3\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} = 0, \quad \Lambda < 0; \quad (7.52)$$

$$-C_2^2 + \frac{1}{4}\delta^2 - \frac{3\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} = 0, \quad \Lambda = 0; \quad (7.53)$$

$$-3\Lambda(C_1^2 + C_2^2) + \frac{1}{4}\delta^2 - \frac{3\alpha^2\gamma^2}{16\beta^2} = 0, \quad \Lambda > 0. \quad (7.54)$$

La métrica (3.1) con la transformación (7.31) está dada por

$$ds^2 = -f dt^2 + 2k d\phi dt + d\tilde{r}^2 + e^\mu dz^2 + l d\phi^2, \quad (7.55)$$

y ahora las ecuaciones de Einstein están completamente resueltas porque podemos obtener $f(\tilde{r})$, $k(\tilde{r})$, $l(\tilde{r})$ a partir de (7.17)-(7.19), (7.21)-(7.23) y (7.25)-(7.27), y $\mu(\tilde{r})$ de (7.38).

7.5 Algunos Comentarios

En la literatura podemos conseguir esta solución en una forma diferente[20] que es menos conveniente porque elige las coordenadas de tal forma que es difícil de obtener el límite estático. Una posible fuente para la métrica de Lewis con constante cosmológica negativa es un cilindro lleno de polvo homogéneo y anisótropo, rotante, descrito por el universo de Gödel.

Apéndice A

En este apéndice presentaremos los pasos principales para calcular los escalares de Cartan. Las referencias dan los detalles de cómo obtenerlos y las expresiones usadas corresponden a la clase de métricas Weyl, porque para las clases de Levi-Civita y Lewis basta con sustituir en ellas los valores apropiados.

Los escalares de Cartan pueden calcularse usando el sistema de computación algebraico SHEEP [13], el programa CLASSI [1] y su interface con REDUCE [29]. La implementación práctica de estos algoritmos trabaja con espinores en lugar de con tensores, ya que de esta manera se logra un mejor manejo de las simetrías. MacCallum y Aman [28] encontraron un conjunto mínimo de escalares de Cartan algebraicamente independientes en el formalismo espinorial, que para soluciones en el vacío, como en las métricas de la clase de Weyl, son hasta primer orden:

$$\begin{aligned}
 0^{th} \text{ derivada} & : \Psi_A, & A = (0, \dots, 4); \\
 1^{th} \text{ derivada} & : \nabla \Psi_{AB'}, & A = (0, \dots, 5), \quad B = (0, 1);
 \end{aligned}$$

donde Ψ_A es el espinor de Weyl y $\nabla \Psi_{AB'}$ es la primera derivada covariante simetrizada de Ψ_A [29].

Con el fin de calcular los escalares de Cartan para las métrica

de la clase de Weyl, elegimos la siguiente tétrada de Lorentz:

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \sqrt{f} dt - \frac{k}{\sqrt{f}} d\varphi, \\ \theta^1 &= \frac{1}{\sqrt{f}} r d\varphi, \\ \theta^2 &= e^{\mu/2} dr, \\ \theta^3 &= e^{\mu/2} dz.\end{aligned}$$

Puesto que los escalares de Cartan se calculan en el formalismo espinorial, debemos usar un sistema nulo, que puede ser definido a partir de la tétrada anterior, como

$$\begin{aligned}\omega^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 + \theta^1), \\ \omega^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 - \theta^1), \\ \omega^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^2 + i\theta^3), \\ \omega^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^2 - i\theta^3).\end{aligned}\tag{8.1}$$

Siguiendo las técnicas usuales [18], conseguimos que el sistema nulo estándar está dado por la transformación

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^0 &= \left(\frac{na-cr^n}{na+cr^n}\right)^{1/2} \omega^0, \\ \bar{\omega}^1 &= \left(\frac{na+cr^n}{na-cr^n}\right)^{1/2} \omega^1, \\ \bar{\omega}^2 &= \omega^2, \\ \bar{\omega}^3 &= \omega^3.\end{aligned}\tag{8.2}$$

El sistema de Lorentz estándar que le corresponde puede conseguirse usando (8.1), y resulta

$$\begin{aligned}\bar{\theta}^0 &= na \left(\frac{f}{n^2 a^2 - c^2 r^{2n}}\right)^{1/2} (dt + b d\varphi), \\ \bar{\theta}^1 &= \left(\frac{f}{n^2 a^2 - c^2 r^{2n}}\right)^{1/2} r^n [-cdt + (n - bc) d\varphi], \\ \bar{\theta}^2 &= e^{\mu/2} dr, \\ \bar{\theta}^3 &= e^{\mu/2} dz.\end{aligned}\tag{8.3}$$

En el sistema nulo estándar, los escalares de Cartan resultan ser

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= -\frac{1}{8}(n^2 - 1)r^{-(n^2+3)/2}, \\
\Psi_0 &= \Psi_4 = -n\Psi_2, \\
\nabla\Psi_{01'} &= \nabla\Psi_{50'} = -\frac{\sqrt{2}}{16}n(n^4 - 1)r^{-(n^2+3)/4}, \\
\nabla\Psi_{10'} &= \nabla\Psi_{40'} = -\frac{\sqrt{2}}{8}n(n^2 - 1)r^{-(n^2+3)/4}, \\
\nabla\Psi_{21'} &= \nabla\Psi_{30'} = \frac{\sqrt{2}}{32}(n^2 + 3)(n^2 - 1)r^{-(n^2+3)/4}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Puesto que en la primera derivada no aparece información nueva, no es necesario calcular la segunda derivada.

Bibliografía

- [1] Aman J E 1987 *"Manual for CALASSI- Clasificación Program for Geometries in General Relativity (3th provisional edition) "*, University of Stockholm Report.
- [2] Andreson J L 1967 *Principles of Relativity* (New York: Academic Press) Sec. 10.6(a)
- [3] Apostolatos T A and Thorne K A 1992 *Phys. Rev. D* **46** 2433
- [4] Blanford R D and Rees M J 1974 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **169** 395
- [5] Blanford R D and Rees M J 1975 *Contemp. Phys.* **16** 1
- [6] Bonnor W B 1977 *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** 1674
- [7] Bonnor W B 1980 *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 2121
- [8] Bonnor W B 1991 *Phys. Lett. A* **158** 23
- [9] Chandrasekhar S and Wright J P 1961 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **47** 341

-
- [10] Darmois G 1927 *Memorial des Sciences Mathematiques* (Paris: Gauthier-Villars) Fasc. 25
 - [11] da Silva M F A, Herrera L, Paiva F M and Santos N O 1995 *Gen. Rel. Grav.* **27** 859
 - [12] Dowker J S *Il Nouvo Cimento B* **52** 129
 - [13] Frick I 1977 "*SHEEP-user's guide*". University of Stockholm, Report 77-14
 - [14] Gödel K 1949 *Rev. Mod. Phys.* **21** 447
 - [15] Goncalves D R, Jatenco Pereira V and Opher R 1993 *Astron. Astrophys.* **279** 351
 - [16] J L 1967 *Principles of Relativity* (New York: Academic Press) Sec. 10.6(a)
 - [17] Jensen B y Kučera J 1993 *J. Math Phys.* **B52** 129
 - [18] Karlhede A 1980 *Gen. Rel. Grav.* **12** 653
 - [19] Kramer D, Stephani H, MacCallum M y Herlt E 1980 *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge: Cambridge University Press)
 - [20] Krasinski A 1975 *Acta Phys. Polon.* **B6** 223
 - [21] Kundt W 1956 *Z. Phys.* **145** 611
 - [22] Lathrop J D and Orsene M 1980 *J. Math Phys.* **27** 152
 - [23] Levi-Civita T 1917 *Recond. Ann. Lincei* **26**, 307
 - [24] Levi-Civita T. 1919 *Rend. Acad. Linsei* **26**, 101.

-
- [25] Lewis T 1932 *Proc. R. Soc.* **136** 176
- [26] Linet B 1985 *Gen. Rel. Grav.* **17** 1109
- [27] Linet B 1986 *J. Math. Phys.* **27**, 1817.
- [28] MacCallum M A H y Aman J E 1986 *Class. Quantum Grav.* **3** 1133
- [29] MacCallum M A H y Skea J E F 1994. En *Algebraic Computing in General Relativity: Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra*, M J Reboucas y W L Roque, eds. (Oxford University Press, Oxford), Vol 2
- [30] Rindler W and Perlick V 1990 *Gen. Rel. Grav.* **22** 1067
- [31] Santos N O 1993 *Class. Quantum Grav.* **10**, 2401; (Aparecerá una corrección en *Class. Quantum Grav.*)
- [32] Schücking E L 1966 *Atti del Convegno sulla Cosmologia* (Florence: G. Barbèra Editore)
- [33] Schwarzschild K 1916 *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* 189
- [34] Shapiro S L and Teukolski S A 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 9949
- [35] Shapiro S L and Teukolski S A 1992 *Phys. Rev. D* **45** 2006
- [36] Teixeira A F F and Som M M 1974 *Il Nouvo Cimento B* **21** 64

- [37] van Stockum W J 1937 *Proc. Roy. Soc. Edin.* **57** 135
- [38] Vishveshwara C V and Vinicour J 1977 *J. Math Phys.*
18 **1280**