LA RUPTURA IMPOSIBLE:
Variaciones, Reflexiones e Interrogaciones Sobre La Física Y Las Matemáticas

Héctor Rago A.
Centro de Astrofísica Teórica
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Mérida

Artículo basado en una conferencia dictada en el marco de la Octava Jornada de Matemáticas, realizada en el Jardín Botánico de la UCV, Caracas, Abril de 1995

Las matemáticas son la puerta y la llave a las Ciencias.

Francis Bacon -año 1.276

Comencemos con una frase rotunda: la física es matemática o no es. Aceptemos que entre una y otra disciplina se tienden una infinidad de puentes y que puede ser imposible dibujar fronteras que deslinden ambos territorios. Pero más allá de la convivencia burocrática bajo los mismos techos en las Facultades de Ciencias, más allá de materias en el *pensum* de toda licenciatura como Métodos Matemáticos de la Física I, II, ... de áreas como Física-
Matemática, de revistas de prestigio como *Journal of Mathematical Physics o Communications in Mathematical Physics*; habría que preguntarse: ¿Cuál es la naturaleza de esa relación?. ¿Qué tienen que ver ellas y su relación con la manera como conjeturamos al mundo?
Las líneas que siguen pretenden hablar de esta debatida relación.. Son comentarios sesgados, no pueden dejar de serlo, desde la perspectiva de la física teórica, de una cuestión que tal vez no admita sino puntos de vista, opiniones particulares llenas de prejuicios pero que a pesar de eso o tal vez por eso mismo, puedan despertar algún interés. Hemos procurado el equilibrio en el enfoque, aunque hemos constatado que una deformación profesional nos demoró en los terrenos de la geometría y la gravitación.

La relación entre las matemáticas y la física son de vieja data y ha oscilado como todas las relaciones, entre la armonía total y el conflicto. Siempre inspiradora, a veces la física ha seducido a las matemáticas por la riqueza de los problemas que le susurra al oído. En otras ocasiones es la física la seducida por la elegancia de una estructura matemática que le viene bien para sus intenciones. Polémica y contradictoria a veces, no pueden ser indiferentes ni abandonarse, y como en el bolero aquel, "*... ni cerca ni distante podemos ya vivir ...*" . Relación prolífica, por la abundancia de frutos que ha ocasionado, no vacilamos en calificarla de decididamente incestuosa, ¿no presuminos acaso un desconocido padre común?. Mantenemos entonces la indisolubilidad de la relación y la imposibilidad de la ruptura.

El Estilo es el Hombre

Wolfang Goethe decía que

> los matemáticos son como los franceses, tú les dices algo, ellos lo trasladan a su lenguaje y presto! es algo enteramente nuevo.

Y es que para los físicos, los matemáticos tienen un estilo que los intriga y hasta los exaspera, pero que al final los subyuga. El físico quisiera entender los conceptos de tal forma de utilizarlos en su trabajo lo más rápido posible y por eso prefiere a menudo ejemplos simples e ilustrativos de conceptos abstractos. El matemático opta por la construcción más general posible. Si ha pensado en términos concretos en la elaboración de estos conceptos, a la hora de presentar los resultados lo hace de tal forma de ocultar su cadena de pensamientos: definiciones- axiomas- proposiciones- lemas- teoremas y corolarios con el pretexto de la claridad, rigor y elegancia, resultan en un estilo impenetrable para el físico, quien opta por el diagrama y el caso particular. A la hora de calcular, el físico suele prestigiar su intuición. Casi acepta el precepto de John Wheeler: "*nunca emprendas un cálculo sin saber cual es el resultado*". Pero luego se beneficiará de la generalidad del método de su colega matemático. Por supuesto, la línea fronteriza entre ambas actividades es difusa, (es posible que en otras épocas nunca existiera tal frontera) y hemos caricaturizado las "*profesiones*"; en todo matemático hay algo de ingeniero y en todo físico resuena algo de la hiperaxiomatización de Nicolás Bourbaki.

La verdad matemática vs. la verdad física

Es un hábito de los científicos sospechar que la filosofía de las ciencias les es tan útil a ellos, como la ictiología a los peces. A pesar de compartir la herejía, tocaremos algunos temas que pertenecen a su ámbito. Más de una vez se ha afirmado que las matemáticas son una gigantesca tautología sin más información que las que pusimos en los axiomas. Las matemáticas por si mismas no son la explicación de nada, o dicho de manera más cruda, de algún modo las matemáticas no tienen nada que ver con la realidad. Las matemáticas son un lenguaje más unas leyes de razonamiento; una manera de deducir afirmaciones a partir de otras; tiene que ver con la estructura del razonamiento, no con la naturaleza de los objetos con los que trata. Tal vez por eso, por no considerarla una *ciencia natural*, Alfred Nobel la excluyó en su testamento, de los apetecidos premios. Aunque pudiera haber sido por la profunda enemistad que le profesaba al matemático sueco Mitag-Leffer por los encantos de una dama, si le damos crédito al insistente rumor de la Suecia chismosa.

No teniendo nada que ver con la realidad, el criterio de *verdad* en matemáticas se apoya en el apego a su lógica interna, es decir, a su coherencia. André Weil decía: "*las matemáticas son consistentes, por eso Dios existe. Pero no podemos probarlo, por eso el Diablo también existe*". Por consiguiente, el conocimiento en matemáticas es acumulativo. Una vieja teoría es tan buena y por tanto no puede ser sustituida por una nueva. La geometría de Euclides es coherente y por tanto insustituible. El teorema de Pitágoras siempre será cierto. No hay una flecha del progreso en matemáticas y en esto, aunque no sólo en esto, tiene puntos en común con el arte: *La Consagración de la Primavera* no sustituye a los *Conciertos de Branderburgo* ni Rodin a Fidias. Ni viceversa.

El físico en cambio, no goza de esa libertad creativa cuasi-absoluta de su colega matemático. Sus teorías no sólo deben tener coherencia interna sino que además tienen una deuda de compatibilidad con lo que vagamente se suele llamar Naturaleza, Mundo Externo, Realidad, Universo, Mundo Físico....En otras palabras, el físico debe (en la medida de lo posible) rendir cuentas de los *hechos, datos experimentales u observaciones* con los que la teoría está conectada a través de una complicada red de relaciones e interpretaciones que a su vez se apoyan en otras teorías. El *hecho*, al menos el hecho de valor científico es siempre un hecho contextualizado; no existe el *datum* puro sino visto a través del prisma de una teoría que es la que lo interpreta y le otorga sentido. Sir Arthur Eddington exageraba hasta la ironía "*...no creer en los hechos hasta que no sean explicados por la teoría* ". Los hechos sin teorías son manía de coleccionista, filatelia. La teoría sin hechos, fantasía tropical.

¿Qué pretende una Teoría Física?

Una teoría física es una parodia de la realidad, un mapa conceptual del mundo, su *alter* ego, una representación simbólica del universo o mejor, de una parte de él. En términos más actuales, un *modelo* del universo físico que le dé coherencia e inteligibilidad a un mundo que se nos presenta con una apariencia errática, desordenado y polimorfo.

En la base misma de la empresa científica subyace la fe de que en algún nivel de la realidad hay leyes, principios fundamentales que determinan la estructura y el funcionamiento del universo, y además que es posible y es nuestro deber encontrarlos.

La historia ha imaginado sucesivamente al Universo como un organismo vivo cuando los griegos, como una secuencia de figuras geométricas regulares cuando Ptolomeo y sus seguidores, como un reloj o mecanismo de exacto funcionamiento de acuerdo con los newtonianos, como una máquina de vapor sujeta a las recién descubiertas leyes de la termodinámica a finales del siglo pasado, o como un computador en imagen tan cara a nuestros modernas tecnologías. Pero sea cualquiera la fantasía con que representemos al universo, la pasión por develar sus principios reguladores ha sido la misma. Entre el griego y sus cuatro elementos y un teórico que intenta unificar las interacciones fundamentales han cambiado los métodos, obviamente, pero no las motivaciones. El *desideratum* lo expresa Einstein así:

> El test supremo del físico es llegar a leyes universales y fundamentales a partir de las cuales el Cosmos se pueda construir por pura deducción.

Es decir, de la misma manera como un lógico descubre a partir de una gota de agua, las Catarátas del Niágara o el Atlántico, como sugiere Conan Doyle.

Para intentar satisfacer su pretensión, los físicos recurren a las matemáticas, siéndole fiel a la tradición inaugurada por Johannes Kepler en la descripción de las curvas que describen los cuerpos celestiales; por Galileo Galilei matematizando el movimiento de cuerpos en la superficie de la Tierra y sobre todo por Isaac Newton, quien usurpando convenientemente el esfuerzo de los dos anteriores, logró concebir la primera teoría física en el sentido contemporáneo de la palabra, su teoría del movimiento y su ley de gravitación universal.

La Irrazonable efectividad de las Matemáticas ...

Así llamó el premio Nobel Eugene Wigner [1]al hecho aparentemente desconcertante de cómo las matemáticas pueden colaborar con la física en su afán de explicar la realidad, a pesar de que en ocasiones la estructura matemática no haya sido concebida para tales fines.
Muchos han creído vislumbrar en esta "*irrazonable efectividad*" una suerte de armonía preestablecida cuya explicación es un verdadero rompecabezas. ¿Es la naturaleza intrínsecamente matemática o sólo así nos parece como un reflejo por la manera como hemos optado por describirla?. En términos ligeramente distintos, ¿obedece realmente el mundo físico a leyes matemáticas o simplemente pareciera adecuarse a ellas porque los físicos han sido cada vez más capaces de meterlo en el *corsé* de las matemáticas?

Bertrand Russel nos da su respuesta:

> La física es matemática no por lo mucho que sabemos del mundo físico sino por lo poco que sabemos de él. Son sólo sus propiedades matemáticas las que podemos descubrir.

Las presuntas explicaciones dependen por supuesto de la concepción que se profese acerca de las matemáticas. Habría que parafrasear las preguntas anteriores: ¿tienen los números y los objetos matemáticos una existencia sin tiempo e independiente de las mentes de los hombres, o son producto de la invención de nuestros cerebros y por tanto tienen una existencia accidental y terrícola moldeada por una enmarañada red de causas y azares, visicitudes y peculiaridades de nuestra evolución?

Para un platónico o un neoplatónico no hay motivo de sorpresa. Ocurre que la realidad es matemática, o en todo caso es un reflejo del mundo matemático ideal, el *nous.* Los objetos y las estructuras matemáticas las *descubrimos.* En otras palabras, Dios es un consumado y hábil matemático. Esta posición está conspicuamente ilustrada por las palabras de Galileo:

> La Filosofía Natural está escrita en el gran libro que siempre está ante nosotros. Quiero decir el Universo, pero no podemos entenderlo si no

> aprendemos primero el lenguaje y no captamos los símbolos en los que está escrito. Y el libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos y círculos y otras figuras geométricas sin cuya ayuda es humanamente imposible comprender una sóla palabra de él.

Para un formalista, para quien ni los símbolos ni las reglas de manipulación de los símbolos tienen algún significado más allá de ellos mismos, la conexión con la realidad es totalmente irrelevante, tal vez una curiosidad pero que nada tiene que ver con las matemáticas.
Para un conceptualista o un intuicionista, que mantienen que las leyes las *construimos*, las *inventamos* y no meramente las descubrimos, la explicación es que la naturaleza ha impreso su huella en nuestras mentes en el decurso de la adaptación evolutiva, luego construimos estructuras matemáticas que reflejan lejana pero fielmente esa huella y forzamos a la realidad (o a los modelos que de ella hacemos) a adaptarse a estas estructuras. De no ser porque la palabra está tan desprestigiada, podríamos decir que hay una relación dialéctica entre las matemáticas y su uso en la descripción de la realidad, es el movimiento pendular entre dos polos: de algunas suposiciones físicas a su elaboración matemática que a su vez sugiere nuevos principios físicos que incitan innovaciones matemáticas....De modo que el supuesto "*milagro*" de la armonía no es otra cosa que el resultado de un largo y ardoroso proceso de ajuste mutuo. En medio de ese vaivén se cuela furtivamente el experimento y de su mano, la tecnología, pero ese es otro cantar.

Matemáticas, Física y Estética

Hay matemáticas sencillas y matemáticas difíciles, matemáticas feas y matemáticas hermosas. A pesar de lo problemático que pueda resultar discernir con precisión estos términos, el científico profesional es capaz de intuir las diferencias entre estos opuestos. Es un prejuicio atávicamente arraigado dentro de los físicos teóricos que las matemáticas pueden y deben colaborar guiándonos en la mirada correcta de la realidad invocando principios expresables matemáticamente en términos simples y elegantes. A través de estos principios la física hereda de las matemáticas un sentido de *belleza* no demasiado alejado de la noción de belleza que utiliza el arte. En efecto, en una buena medida los matemáticos están guiados en la construcción de sus teorías por ideas estéticas. El matemático inglés G. H. Hardy mantenía que

> ...los patrones matemáticos como el de los pintores o el de los poetas deben ser hermosos. Las ideas, como los colores y las palabras deben ajustarse unos a otros de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba. No hay lugar permanente para las matemáticas feas.

Los cuadros del pintor holandés Maurits Escher ilustran cómo el arte, seducido por las simetrías, puede estar lleno de alusiones y referencias a conceptos matemáticos abstractos. Por otra parte, es notable el interés que los físicos y matemáticos le han prestado a las espectaculares curvas fractales que los computadores han generado profusamente y sin reserva. Tal vez lo llamativo de estas figuras de innegable belleza es que nos conecta a través de su apreciación estética, con la naturaleza misma. El patrón repetitivo y autosimilar de los fractales recuerda a estructuras del mundo natural que tenemos demasido cerca, como la manera de ramificarse de algunos follajes, o los cristales de hielo. En ellos se esconde una invariancia no lineal detrás de la que se se esconde un profundo atractivo por la simetría visual y la sugerida armonía matemática. Y la pregunta nuevamente se impone: ¿Es que la naturaleza es intrínsecamente hermosa y Dios es un artista? ¿ O es que consideramos estéticamente valiosas las estructuras que servirán para describir parte de la naturaleza con éxito? ¿Ha impreso su huella la naturaleza en el decurso del proceso de adaptación y los matemáticos reflejan en sus trabajos esa huella? ¿Será que la sensación de belleza proviene del tipo de problemas que los científicos han elegido o de las simplificaciones y simetrías que le hemos impuesto para hacerlo tratable?

No se nos escapa que como en todo juicio estético, considerar bella a una teoría es una cuestión de gusto educado, de experiencia subjetiva, de un adiestramiento previo. No se puede pretender percibir el encanto de una teoría sin el conocimiento de las matemáticas, como no se puede disfrutar de una sinfonía sin escucharla. ¿Que las matemáticas suelen tener la costumbre de ser difíciles? Cuentan que Euclides respondió a las quejas de un Rey a quien vanamente intentaba enseñarle geometría: "*no existe ningún camino real hacia la geometría".*

Lo verdaderamente notable es que esta noción difusa de belleza ha desempeñado un papel heurístico en la construcción de muchas teorías físicas y ha sido importante a la hora de juzgar y privilegiar teorías incluso en contra de la evidencia experimental, porque entre otras razones la evidencia experimental puede provenir de experimentos poco rigurosos.

Paul Dirac, uno de los creadores de la física cuántica, ha sido uno de los más vehementes defensores de la idea de que el desarrollo de matemáticas bellas — aquellas con simetría, economía, conexión con otras partes de las matemáticas— debería ser una de las prioridades del físico teórico en su anhelo por describir los fenómenos físicos. Desde su posición extrema, Dirac [2]apuntó:

> La idea dominante en la aplicación de las matemáticas a la física es que las ecuaciones que representan las leyes de movimiento *deben tener una forma simple*. El éxito del esquema es que las ecuaciones simples parecieran funcionar .... Lo que hace que la teoría de la relatividad sea tan aceptable a los físicos a pesar de a veces ir contra el principio de simplicidad, es su gran *belleza matemática*. Esta es una cualidad que no puede ser definida, de la misma forma que belleza en arte no puede ser definida...La teoría de

> la relatividad introdujo belleza matemática de una manera sin precedentes en el estudio de la naturaleza. Vemos que debemos cambiar el principio de simplicidad por un principio de *belleza matemática*. A menudo ocurre que el requerimiento de simplicidad y el de belleza coinciden, pero donde ellos choquen, debe privilegiarse el segundo.

Cierto que estas matemáticas hermosas le han sido sugeridas al físico por modelos visuales o principios físicos, pero es notable que pueda ocurrir que los principios físicos o los modelos visuales sucumban y sin embargo la construcción matemática subsista, posiblemente reinterpretando sus términos. Todo físico percibe la teoría electromagnética de Maxwell como una bella teoría. Sin embargo los modelos visuales en que Maxwell concibió los campos, como poleas y engranajes y muchos de los principios básicos como el tiempo y el espacio absolutos, se quedaron en el camino. Pareciera como si las matemáticas sólo pudieran adaptarse a la naturaleza de muy pocas maneras y que formulando principios errados podamos atinar con estructuras correctas debidamente interpretadas.
Por supuesto, suele ocurrir que seducidos por el guiño cómplice de la naturaleza optemos por una pista falsa: la guía estética puede no llevar a ninguna parte. Tanto Johannes Kepler en el siglo XVI como Murray Gell-mann y Yuval Ne'eman en 1960 usaron esa guía en sus investigaciones. El primero explicando las órbitas de los cinco planetas conocidos en la época, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno en base a los cinco sólidos pitagóricos, el cubo, la pirámide, la doble pirámide, el octahedro y el icosahedro. Los segundos para imponer un esquema de clasificación por familias en la multitud de partículas elementales que producían los grandes aceleradores, en base a las simetrías de un grupo matemático bien conocido. La simetría matemática sugería que una de las familias de partículas estaba incompleta y que debía existir una nueva partícula para completarla. Gell-mann tuvo éxito, la partícula fue conseguida en 1964 con las propiedades que él había anticipado. El fracaso de Kepler no se debió al método sino en haber juzgado a los planetas y sus órbitas como fundamentales (claro que lo son para nuestra existencia !) en lugar de considerarlos como el resultado de una secuencia de accidentes y azares. Las partículas elementales, en cambio son mucho más fundamentales.

El propio Dirac descubrió las leyes correctas de la mecánica cuántica relativista argumentando sobre vagos principios estéticos de simetría y de simplicidad. Sin embargo, algún tiempo después modificó por razones estéticas las ecuaciones de Maxwell haciéndolas más simétricas. La teoría así modificada supone la existencia de una partícula hipotética conocida como monopolo magnético, con interesantes propiedades físicas, entre ellas la de no existir sino en las páginas del *Physical Review* y en la fantasía de algunos teóricos. A pesar del esfuerzo de los físicos experimentales, nunca fue detectado ni un ejemplar de la presunta partícula. La hermosa teoría de Dirac no funciona.

Cuando Kepler descubrió que las órbitas de los planetas son elipses alrededor del sol en lugar del círculo, privilegiado estética y filosóficamente, se lamentó agriamente: "*He poblado la* *astronomía con el estiércol de las elipses*" [3]. En realidad había ocurrido un desplazamiento del concepto de belleza: ya no eran las soluciones (elipses) los depositarios de la belleza sino los principios más generales que determinan estas soluciones, es decir las leyes del movimiento y la ley de gravitación universal, descubierta poco después. Los fenómenos suelen ser complicados y feos porque están descritos por las soluciones de las ecuaciones que representan los principios físicos. La solución a una ecuación requiere de algunas condiciones (iniciales por ejemplo) producto de accidentes históricos o de algún azar. Por eso la solución posee menos simetrías que la ecuación y por ello su valor estético es menor. Mientras más nos alejemos de los fenómenos y más profundamente indaguemos en la explicación de los principios fundamentales que los rigen, más y más belleza iremos encontrando. El universo es un lugar extraño y acaso lo que presentimos como belleza en las teorías actuales no sea sino la anticipación de la belleza de la tan ansiada como elusiva teoría final.

Papel de las Matemáticas en una Teoría Física

El núcleo de una teoría física madura está hecho de matemáticas. En una gran medida el modelo físico *es* la estructura matemática subyacente. La formulación matemática de una teoría no es aséptica, la contamina porque su papel no se reduce al ahorro de operaciones mentales ni a la utilización de un lenguaje minuciosamente puntual. Cierto que sus preceptos internos permiten extraer conclusiones legítimas, otorgándole precisión y rigor y excluyendo irrelevancias. Pero además la estructura matemática contribuye decididamente a la interpretación del modelo, esqueletiza la teoría, le otorga huesos. Esta rigidez evita convenientemente pequeñas modificaciones *ad hoc* de la teoría para cuadrar los hechos.

Otro importantísimo papel de las matemáticas en una teoría física está en el cálculo de soluciones específicas ante circunstancias físicas determinadas. Muy frecuentemente una teoría que gobierna la evolución de un sistema físico, evidencia los siguientes aspectos:

- Objetos matemáticos que representan entidades físicas, (funciones que representan la posición de partículas puntuales, campos vectoriales que representan campos electromagnéticos, campos espinoriales que representan electrones, funciones de onda que representan probabilidades ..).

- Una estructura algorítmica, usualmente dada en forma de ecuaciones diferenciales, que controlan la tasa de cambio de estos objetos. Los físicos suelen llamar a esta estructura ecuaciones de movimiento o ecuaciones de campo.

- Constantes universales, son parámetros característicos del sistema físico, como la carga del electrón, la velocidad de la luz, la constante de Plank, la constante gravitacional de Newton. Las teorías físicas actuales (pensamos en el modelo estándar de partículas elementales y en la relatividad general), requieren de alrededor de veinte de estas constantes para describir la realidad. El valor de estas constantes sólo puede ser conocido a través de experimentos. No sabemos por qué valen lo que valen, aunque sabemos que el mundo sería muy diferente si estas constantes tuvieran otros valores.

- La capacidad predictiva de las teorías se apoya en la existencia de soluciones a las ecuaciones de movimiento, a partir de determinadas condiciones iniciales que especifican el estado del sistema en algún instante. Además es importante que el resultado no sea excesivamente sensible a las condiciones inciales, es decir, que sean causalmente estables, o dicho en términos técnicos, que las ecuaciones de movimiento tengan (admitan) un problema de Cauchy bien planteado.

Así las cosas, las matemáticas permiten en principio, resolviendo las ecuaciones analítica o numéricamente, exacta o aproximadamente, con las condiciones iniciales y de contorno dadas, obtener una predicción y compararla con la observación y/o el experimento. De esta manera se descubrió Neptuno en 1846 usando la teoría de gravitación de Newton; se predijo el valor del momento magnético del electrón con una precisión de una parte en 10.000.000.000, en los años 40, usando la electrodinámica cuántica; se encontraron los bosones vectoriales W y Z en 1983 predichos por la teoría electrodébil y el quark top en junio de 1994, gracias a la cromodinámica cuántica.

Sin embargo, el *desideratum* de la predictibilidad total se ve entorpecido por numerosos factores.

1. Modelos teóricos no lo suficientemente precisos. Por ejemplo, la teoría de gravitación newtoniana no pudo predecir ni explicar el desplazamiento del perihelio de Mercurio, que sólo después del advenimiento de la relatividad general pudo ser explicado.

2. El inevitable error experimental al fijar las condiciones iniciales. Por ejemplo, si lográsemos determinar la posición de una bola de billar con una precisión de una parte en diez billones (es decir, un error del orden de un diámetro nuclear), y todos los demás datos conocidos con precisión total, en apenas quince choques la amplificación de la incertidumbre inicial sería del tamaño de la mesa y por tanto nada podríamos afirmar acerca de la posición de la bola.

3. Modelos teóricos formulados en términos estadísticos, bien sea por imposibilidad de fijar condiciones iniciales — en el caso de un gas es obvio que no podemos considerar cada molécula al detal— o porque la descripción es intrínsecamente probabilista como en el caso de la teoría cuántica.

4. Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, que es lo que ocurre en los fenómenos no lineales característicos de los procesos caóticos tan en boga en estos días.

5. Dificultades formidables tanto matemáticas como conceptuales que imposibilitan la formulación de predicciones. Un ejemplo apropiado lo brinda la teoría de supercuerdas, la más firme candidata, según muchos a ser la teoría que unifica todas las interacciones físicas, pero que no ha arrojado hasta ahora ninguna predicción que permita vislumbrar su potencial.

6. Limitaciones causales. La existencia de una velocidad máxima en la naturaleza — la velocidad de la luz — impide que en un instante dado conozcamos todos los factores que eventualmente podrán alterar al sistema en consideración. Por ejemplo, en este preciso instante no tenemos manera de saber si el sol estalló con las terribles consecuencias para predecir nuestro futuro. Es dentro de un lapso de ocho minutos, tiempo que se demora la luz en venir desde el sol hasta la tierra e informarnos que hace ocho minutos no había estallado.

7. Y finalmente, hasta la falta de confianza en la teoría puede socavar su poder predictivo. El propio Einstein eludió la gloria de haber predicho la expansión del universo por creer más en el prejuicio de un universo estático, que en sus ecuaciones que describían inexorablemente un universo dinámico. Para adaptarlas a su prejuicio modificó arbitrariamente sus ecuaciones originales, agregándoles un término que contenía a la famosa constante cosmológica, del cual abjuró unos años después cuando Hubble descubrió observacionalmente la expansión del universo. Einstein se referiría luego al episodio como el mayor error de su vida.

Ejemplos de la intercolaboración

A veces la intuición de los físicos y las exigencias de las teorías que intentan construir han inspirado a los matemáticos a la creación de sus estructuras. Otras veces los matemáticos han erigido sistemas que posteriormente resultan singularmente apropiados para las necesidades de los físicos. En otras ocasiones los matemáticos logran develar la estructura matemática subyacente a una teoría física que no la exhibía de manera explícita. Veamos algunos ejemplos.

- Apolonio desarrolla el estudio de las curvas cónicas que luego Kepler utilizaría al formular las leyes de las órbitas planetarias.

- Newton urgido de una herramienta matemática inexistente para la época, tuvo que concebirla y desarrollarla él mismo: el cálculo diferencial e integral.

- Fourier desarrolló la teoría matemática de las series y transformadas que llevan su nombre, sugerido por los estudios acerca de la transmisión del calor.

- Hilbert creó la teoría de espacios infinito-dimensionales y de operadores que en ellos actúan, sin siquiera sospechar que sus resultados serían utilizados por los físicos como fundamento axiomático de la mecánica cuántica.

- La teoría de grupos fue iniciada por Evaristo Galois a comienzos del siglo XIX estudiando las soluciones de ecuaciones algebraicas de quinto grado. Sophus Lie extendió la teoría a grupos continuos, los grupos de Lie. En su tesis doctoral en 1894 Eliè Cartan clasificó los grupos simples y a pesar de que Sir James Jean afirmara que la teoría de grupos era la parte de las matemáticas más inútiles para los físicos, hoy no se concibe la física de partículas sin la teoría de grupos. El énfasis en las actuales teorías de las interacciones fundamentales es en las simetrías e invariancias de la naturaleza. A ella le gustan las simetrías — y sus rupturas — y la teoría de grupos es el estudio sistemático de las simetrías.

A pesar del lamento de Richard Courant y David Hilbert en el prólogo de su famoso libro [4] acerca de un presunto deterioro de la relación entre ambas disciplinas, deterioro que comprometería nada menos que a la empresa científica, el contubernio prosigue. No puede no hacerlo.

- Dirac tuvo una intuición con una delta y Laurent Schwarz edificó la teoría de distribuciones. Los matemáticos le devuelven la teoría repotenciada para que sea herramienta cotidiana en muchas áreas de la física teórica.

- El estudio del movimiento browniano y una manera original y sugestiva de concebir los procesos mecanico-cuánticos, conducen al desarrollo de las integrales de Feynman-Wienner.

- Los teóricos de las supercuerdas han tenido que recurrir a los matemáticos y junto a ellos, desarrollar las estructuras necesarias. Si alguna vez los físicos pierden el interés en las supercuerdas, estas estructuras formales persistirán para deleite de los matemáticos.

- La teoría especial de la relatividad, formulada por Einstein en 1905 cuyas matemáticas no superan en dificultad a las del bachillerato, fue revestida tres años más tarde por Hermann Minkowski con el ropaje de una geometría cuadridimensional pseudoeuclideana. Einstein comentaría: "*Los matemáticos han tenido éxito formulando mi teoría en una manera en la que yo no la entiendo*"

En realidad se trata del joven Einstein, filosóficamente muy cercano a un empirismo radical. Pocos años después lo conseguiremos en una búsqueda frenética y extenuante de modelos abstractos de geometrías no euclideanas aptas para plasmar los nuevos conceptos físicos que había desarrollado sobre la gravitación.

El resultado final de esa búsqueda finalizada en 1915, la teoría general de la relatividad, ilustra gloriosamente una de las más hermosas y fructíferas colaboraciones entre las matemáticas y la física.

Geometría y mundo físico.

Conviene establecer muy claramente la distinción entre geometría matemática y geometría física. La primera tiene todas las libertades de cualquier sistema matemático, mientras que la segunda es a la que se refería Einstein cuando afirmaba que *"la geometría es una de las más antiguas teorías físicas"*. La geometría física está en la obligación de responder cuál es la geometría válida en nuestro mundo y en particular por qué la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º y la relación entre el perímetro y el radio de una circunsferencia es 2π. En otras palabras, por qué localmente la geometría de Euclides dá tan buenos resultados. Asombrosamente la respuesta es que es así porque el campo gravitacional de la Tierra es extremadamente débil. Para comenzar a entender esta afirmación podemos recordar a Sir Bernard Shaw quien urdió esta ironía:

> "Newton, como buen inglés postuló un Universo rectangular porque los ingleses usan la palabra "*square*" para demostrar honestidad, verdadero, rectitud. Newton sabía que el Universo consta de cuerpos en movimiento y que ninguno de ellos se mueve en línea recta, ni podría hacerlo. Pero un inglés no se amilana por los hechos. Para explicar por qué los cuerpos se mueven así, inventó una fuerza llamada gravitación y entonces erigió un complejo universo británico y lo estableció como una religión en la que se creyó por trescientos años. El libro de esa religión no es esa cosa oriental mágica: la biblia, es el tablero de Trenes Ingleses, que da las estaciones de todos los cuerpos celestes, sus distancias, las velocidades a las que viajan y la hora a la que llegan a eclipsar puntos o estrellarse contra la Tierra. Todo item es preciso, comprobado, absoluto e inglés.
>
> Trescientos años después de establecido el sistema surge un joven profesor en el medio de Europa y le dice a los astrónomos:
>
> — Caballeros, si Uds. observan el próximo eclipse de sol con cuidado, entenderán qué pasa con el perihelio de Mercurio —....
>
> El joven profesor sonríe y dice que la gravitación es una hipótesis muy útil y da resultados bastante buenos en muchos casos, pero que él, personalmente puede prescindir de ella. Le preguntan ¿Cómo? si no hay gravitación los cuerpos celestes se moverían en líneas rectas. El responde que no hace falta ninguna explicación porque el Universo no es rectilíneo ni exclusivamente británico: es curvilíneo.
>
> El universo newtoniano a partir de allí cae muerto y es suplantado por el Universo de Einstein. Einstein no ha retado los hechos de la ciencia. Ha retado los axiomas de la ciencia y la ciencia ha sucumbido al reto".

Física Pre-relativista.

Herman Weyl habló del "*acto de violencia*" que significó adscribirle triadas de números a los puntos del espacio. Los físicos suelen perpetrar un acto de violencia similar al otorgarle números al conjunto de los "*eventos*", es decir las cosas que ocurren en un instante de tiempo y en un lugar del espacio. A este conjunto de "*puntos*" etiquetados por cuatro números llaman los físicos espacio-tiempo.

Antes de 1905 se pensaba que el espacio-tiempo tenía la siguiente estructura. Dado un evento *p* hay una noción natural y absoluta de fijar los eventos que comparten con *p* su coordenada temporal, es decir, que son simultáneos a *p*. El conjunto de tales eventos forma una trisuperficie: el espacio ordinario.

Se creía que dado otro evento *q* cualquiera, podía darse una y sólo una de estas posibilidades:

- Es posible ir del evento *p* al evento *q,* en cuyo caso decimos que *q* está en el futuro de *p*.
- Es posible ir de *q* hasta *p*, y por tanto *q* está en el pasado de *p*.
- Es imposible estar presente en ambos eventos, ellos son simultáneos.

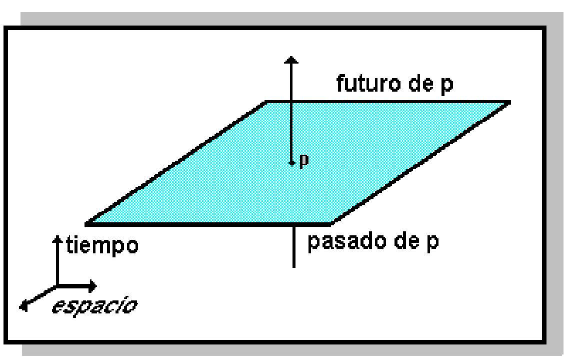

fig. 1 La estructura causal pre-relativista

El lector podrá notar que las suposiciones anteriores son válidas sólo si la naturaleza permite velocidades tan altas como se quiera.

Física Relativista.

Sin embargo, a partir de 1905 el entendimiento de la velocidad de la luz como una constante universal alteró la situación anterior, y emergió la siguiente estructura causal: dado el evento p hay un cono llamado el cono de luz, definido por la ecuación $x + y + z - t = 0$.

El reflejo geométrico de esta nueva estructura está provisto por las transformaciones que dejan invariante la “métrica de Minkowski”, dada por $ds = (dx) + (dy) + (dz) - (dt)$. Estas transformaciones, llamadas transformaciones de Lorentz son el diccionario que traduce los valores (x, y, z, t) de un evento según un observador, a los valores (x’, y’, z’, t’) del mismo evento, visto por otro observador que se mueve con velocidad constante respecto del primero.

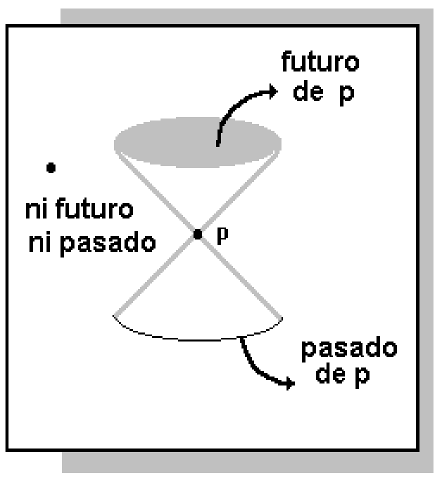

Fig. 2 La estructura causal relativista

El advenimiento de la relatividad especial planteó un programa a ser cumplido por las teorías físicas: ellas debían adaptarse a la recién descubierta estructura causal del espacio-tiempo, es decir, tomar en cuenta el hecho empíricamente verificable de que la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal. Dicho en términos técnicos, toda teoría física debe ser covariante bajo el Grupo de Transformaciones de Lorentz.

La Gravitación

La teoría de la gravedad aceptada unánimemente a comienzos de siglo era por su puesto la Teoría de Gravitación Universal propuesta en 1687 por Isaac Newton y desde entonces invicta en toda confrontación con la realidad. Sin embargo, a pesar de su éxito empírico, padecía de un pecado original: la teoría newtoniana supone que la gravitación se propaga instantáneamente, es decir, con velocidad infinita y por tanto no se adecúa a los principios de la relatividad especial. Einstein decide entonces exorcizar a la gravedad newtoniana de su pecado y se embarca en la monumental tarea de construir una nueva teoría — la relatividad general — cónsona con la estructura del espacio-tiempo recién descubierta. Queremos enfatizar que las razones para emprender la búsqueda de una nueva teoría de la gravitación, son de orden conceptual, de coherencia en la descripción de la naturaleza, de sospechar que los principios matemáticos que subyacen a la realidad física son los mismos para diversas partes de esta realidad; y no porque la venerable teoría de Newton hubiese mostrado su talón de Aquiles frente a las observaciones.

A la saga de las nuevas ecuaciones

Einstein advirtió con perspicacia y una profunda intuición física que los fundamentos de su nueva teoría de la gravitación requerían de novedosos formalismos matemáticos con los cuales establecer una precisa relación entre el contenido de energía en una región y las propiedades geométricas del espacio-tiempo en esa región. En otras palabras, el rígido espacio-tiempo plano de la relatividad especial apropiado para sistemas en ausencia de gravitación, debía ceder su lugar a un espacio-tiempo curvo, dinámico, voluble en su interacción con la materia. La curvatura del espacio-tiempo debía estar ligada de alguna manera a la presencia de un campo gravitacional.

De la mano de su antiguo compañero de clases, el matemático Marcel Grossmann, Einstein recorrió los vericuetos de las matemáticas que sus ideas reclamaban. La geometría riemanniana había sido desarrollada por el matemático alemán Bernhard Riemann unos setenta años atrás generalizando a cualquier número de dimensiones, las geometrías no euclideanas de Karl Frederick Gauss, János Bolyai y N. I. Lobachevski. Estos a su vez habían desarrollado estructuras geométricas consistentes negando el famoso quinto postulado de Euclides, el postulado de las paralelas. Posteriormente la geometría de Riemann fue enriquecida con los aportes de la conexión italiana: Gregorio Ricci, Tulio Levi-Civita, L. Bianchi y E. Beltrami; constituyendo lo que los matemáticos llamaban cálculo diferencial absoluto y los físicos entre los años 1915 y 1960, cálculo tensorial.

La confrontación cara a cara con la teoría que estaba concibiendo, cambió definitivamente la temprana actitud del joven Einstein hacia las matemáticas. A finales de octubre de 1912 le escribió a su antiguo profesor Arnold Sommerfeld:

> Me estoy ocupando ahora exclusivamente del problema de la gravitación y creo que con la ayuda de un matemático amigo , seré capaz de manejar todas las dificultades. Pero una cosa es cierta, que nunca en mi vida había estado tan atormentado. Tengo ahora un gran respeto por las matemáticas, algunas de cuyas partes en mi ingenuidad yo había considerado como puro lujo, hasta ahora !. Comparado con este problema, la teoría original de la relatividad es un juego de niños.

Faltaban aun tres años de esfuerzo para redondear la teoría. Si en 1907 vislumbró los principios físicos claves de la teoría, y en 1912 dio con la estructura matemática que le urgían estos principios, fue en 1915 cuando encontró las ansiadas ecuaciones que describen el campo gravitacional. Cruel paradoja que el primero en exhibir públicamente las ecuaciones no fuera Einstein sino un matemático, uno de los mejores de todos los tiempos, David Hilbert. La historia ilustra claramente la potencialidad del modo de pensar matemático en la búsqueda de principios físicos: En junio de 1915, antes de tener la forma final de las ecuaciones, Einstein fue invitado durante una semana a Gottingen para dictarle unos seminarios al grupo de Hilbert. Poco tiempo después, durante unas vacaciones de otoño en la isla de Rugen, en el Báltico, tuvo la idea clave y en pocas semanas obtuvo las leyes correctas de la gravitación. Hilbert optó por construir el principio variacional más simple con los elementos geométricos a disposición. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de ese principio variacional debían ser las ecuaciones solicitadas. El atajo deductivo, elegante y poderoso de derivar las ecuaciones por una sucinta ruta matemática, contrasta con el que seguía Einstein, a fuerza bruta, por ensayo y error. Hilbert presentó su derivación y las leyes resultantes a la Academia Real de Ciencias de Gottingen el 20 de noviembre. Cinco días después Einstein presentaba las mismas leyes a la Academia Prusiana en Berlín. Por supuesto que sin el acercamiento intuitivo que Einstein había logrado y sin los preceptos físicos que Einstein había erigido como principios a los que las leyes de la naturaleza debían adaptarse, las matemáticas sólas, poco o nada podían hacer. Fue la acertada combinación de intuición física y sugestivos caminos matemáticos la que condujo al establecimiento de la relatividad general.

Las ecuaciones de campo

Las ecuaciones del campo gravitacional establecen una relación cuantitativa y precisa entre el contenido de materia-energía en una región y las propiedades geométricas del espacio y el flujo del tiempo en esa región, y tienen una apariencia extraordinariamente sencilla:

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$$

El lado derecho de esta ecuación representa todo aquello que genera gravitación (excepto el propio campo gravitacional). El lado izquierdo, llamado el tensor de Einstein, contiene toda la información sobre las propiedades geométricas del espacio-tiempo. Antes de la relatividad general el espacio y el tiempo se concebían como un marco inmutable para la evolución de los campos físicos. De acuerdo con la relatividad general estos campos físicos determinan vía las ecuaciones de Einstein las propiedades geométricas del espacio y el tiempo en el cual se mueven. "*La materia le dice a la geometría cómo se debe curvar y la geometría le dice a la materia cómo se debe mover"*, es la pintoresca manera como suelen los relativistas ilustrar el espíritu de la relatividad general.

Los físicos han aprendido a manejar con soltura un diccionario que traduce de su jerga habitual, al argot preciso de los geómetras. Algunos ejemplos de ese diccionario son:

Para los Físicos	Para los Matemáticos
evento	punto
sistema de coordenadas	carta
transformación de coordenadas	difeomorfismo
espacio-tiempo	variedad lorentziana
campo gravitacional	conexión métrica
fuerza de marea	tensor de curvatura
potencial gravitacional	tensor métrico
trayectoria de partícula libre	geodésica

Se ha acusado a los relativistas de padecer de "*hipergeometritis*", de exaltar en demasía el papel de la geometría. En realidad la teoría de Einstein le devuelve a la geometría la gloria que tenía cuando los griegos, pero paradójicamente lo hace bajándola del pedestal privilegiado y transformándola en un campo físico más, que evoluciona sujeto a determinadas leyes dinámicas, y que interactúa con los demás campos de la naturaleza. Ya la geometría no será la precursora de la física; la geometría *es* física y por tanto de importancia cósmica.

Pero la relatividad general no es solamente nuestra mejor teoría de la gravedad. Es un paso más en el proceso de geometrización de la física (¿ o de fisicalización de la geometría?) y una invitación a considerar la relevancia de otras estructuras geométricas en la descripción de la naturaleza. Inspirados por el éxito de la geometría de Riemann, los físicos han invocado a la geometría de Finsler, los espacios de Cartán, la geometría de Weyl, la geometría de Kaluza, geometrías complejas de ocho dimensiones, geometrías proyectivas, afines simplécticas, geometrías bimétricas, pregeometrías y pare Ud. de contar; para intentar entender mejor el mundo físico.

Las ecuaciones de Einstein: una segunda mirada.

Desde su aparición, la relatividad general ha sido catalogada como uno de los grandes logros del pensamiento humano y como una de las más hermosas teorías de la física. Los mejores físicos de la época sucumbieron al atractivo de su coherencia interna y su simplicidad conceptual aun antes de que aprobara con bombos y platillos su primera confrontación con la realidad empírica: la exitosa predicción de la curvatura de un rayo de luz que pase cerca del sol.
Sin embargo, las nociones de *belleza* y *simplicidad* en la relatividad general merecen alguna reflexión. Un breve examen de los presupuestos axiomáticos donde se apoya la teoría, revela una serie de sutilezas y detalles técnicos que permanecen ocultos a primera vista. Más aun, las "*sencillas*" ecuaciones de campo requieren ser decodificadas, explicados sus símbolos y desentrañada su anatomía matemática. Sólo después de realizado este examen podremos decir en qué sentido la teoría es bella y simple.

Los Postulados básicos o el Rigor de nuestras creencias.

A través de sus teorías, los físicos se han hecho una imagen de cómo son el espacio y el tiempo, y creen que esta imagen tiene validez sobre una escala considerablemente grande, al menos de 10^{-16} cms., distancias explorada por los grandes aceleradores hasta 10^{28} cms., el radio del universo observable. Las actuales teorías de la microfísica sugieren que ciertamente nuestra idea de tiempo y espacio pudiera desbaratarse: cambios en el número de dimensiones, extrañas propiedades topológicas, discretitud en lugar de continuidad. Pero situémonos en un terreno más clásico y seguro. A estas creencias hay que darles rigor, una expresión formal que permita insertarlas en la estructura matemática que usarán las teorías.

Creemos o queremos creer que las mediciones y relaciones cuantitativas entre los eventos pueden aproximarse con cualquier precisión deseada (al menos en un contexto no cuántico) por funciones continuas. Por tanto, necesitamos como estructura mínima, la noción de espacio topológico, de forma que postulamos que:

- *El mundo físico puede ser modelado por un espacio topológico cuyos puntos son los eventos.*

El espacio topológico debe satisfacer ciertas exigencias. Por ejemplo, quisiéramos que dos eventos cualesquiera se puedan separar por entornos disjuntos. Esta propiedad permite demostrar el teorema de la función inversa, piedra clave del análisis clásico indispensable para la teoría. Además, si el espacio topológico no fuese separable, la noción de eventos distintos sería ambigua. Por consiguiente aceptaremos que:

- *El espacio topológico satisface el axioma de separación de Haussdorff, es decir es un espacio topológico de Haussdorff.*

Si el universo físico estuviese constituido por partes desconectadas entre si, no habría manera de intercambiar información entre las diferentes partes. Además, hasta donde podemos saber, no existen fronteras en el espacio tiempo (salvo quizás puntos aislados o singularidades), lo que no quiere decir que sea infinito en extensión. De allí que postulemos:

- *El universo físico puede ser modelado por un espacio topológico de Haussdorff, conexo y sin fronteras*.

En dicho espacio definiremos campos tensoriales que representarán sistemas físicos cuyas leyes de evolución son ecuaciones diferenciales. Queremos entonces que la estructura matemática permita definir *derivadas* para lo cual exigimos una variedad diferenciable, preferiblemente C^{∞}. La experiencia muestra que los eventos del mundo físico pueden ser parametrizados usando 4 coordenadas, una llamada coordenada temporal y tres llamadas coordenadas espaciales, al menos en la enorme escala de distancias y energías accesibles hasta ahora. Más aun, muchas cantidades están representadas por integrales múltiples. Para que las series que definen a estas integrales, converjan, se requiere una imposición técnica llamada *paracompacidad.* De tal forma que:

- *Nuestro mundo físico puede ser modelado por una variedad diferenciable real, C^{∞}, Haussdorff, paracompacta, sin fronteras, cuadridimensional y conexa*.

Para cualquier teoría física es fundamental definir el concepto de *distancia* entre dos eventos. Aceptaremos entonces que:

- *La variedad diferenciable está equipada en cada punto con un tensor simétrico no degenerado de segundo orden llamado métrica. Además esta métrica debe ser de signatura lorentziana*[1].

Una variedad con estas propiedades se llama una variedad pseudoriemanniana. La existencia de la métrica induce además una conexión llamada conexión métrica o símbolos de Christoffel que permite definir geodésicas, y tensores asociados con la curvatura de la variedad. La suposición de que la métrica tenga signatura lorentziana garantiza que localmente la variedad

[1] En rigor, la métrica así como los otros campos tensoriales se definen en el espacio tangente a la variedad, su dual y los varios productos cartesianos entre ellos.

es isomorfa al espacio-tiempo de Minkowski (localmente la gravitación es anulable) y son válidas las leyes de la relatividad especial.

Aparte de los postulados geométricos imponemos por supuesto el postulado dinámico:

- *En nuestra variedad pseudoriemanniana se satisfacen las ecuaciones de Einstein,*

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$$

El análisis matemático de estas ecuaciones revela que ellas constituyen un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden, cuasi-lineales (lineales en las segundas derivadas, no lineales en el resto), acopladas, de tipo hiperbólico, para determinar las 10 componentes de la métrica. No es imposible de imaginarse que hallar soluciones de semejante sistema de ecuaciones es extremadamente dificultoso. Al menos para el común de lo mortales; Einstein solía recordar que a Dios lo tienen sin cuidado las matemáticas dificultosas, "*Él integra empíricamente*". Sin embargo, algunas soluciones han conseguido los mortales. Soluciones por cierto que son muy pertinentes al universo que habitamos: buena parte de la jerga científica que a través de los *mass media* ha devenido en cotidiana, provienen de soluciones matemáticas a las ecuaciones de Einstein. Huecos negros, Big Bang, ondas gravitacionales, lentes gravitacionales, expansión del universo, singularidades...

A modo de conclusión

A pesar de las horribles no linealidades de la teoría y de los endemoniados cálculos que las soluciones exigen, a pesar de los sutiles supuestos en que se apoya, no dudamos en reiterar la unanimidad de varias generaciones de físicos teóricos al piropear sin rubor a la relatividad general. La belleza de la relatividad deriva sin duda, de la sensación de inevitabilidad; de que no puede ser de otra manera; de que como en una sinfonía o en una hermosa pintura, no se puede cambiar una parte sin que el todo se resquebraje. Ciertamente que cumplir la labor de explicar y de decodificar los símbolos que intervienen en las ecuaciones de campo es un proceso arduo, pero en recompensa hemos ganado la manera de describir el comportamiento del campo gravitacional en cualquier rincón del universo y en cualquier momento de su evolución [2*], por lo tanto, la teoría es simple.

---

[2] La relatividad general contiene el germen de su propia destrucción: predice la aparición de singularidades donde la curvatura y las cantidades físicas se hacen infinitas, asociadas con el big bang y los huecos negros. Se cree que en las escalas tan pequeñas donde esto ocurre, los efectos

Nuestros conceptos fundamentales de espacio y tiempo han sido profundamente alterados por la relatividad general. Es imposible conjeturar la forma de las leyes de la naturaleza que nos deparará el futuro, pero no es aventurado sospechar que las nuevas leyes tengan que incorporar los conceptos básicos que la relatividad nos ha legado.
La teoría de la gravitación de Einstein es uno de los pilares en que se apoya nuestra concepción del universo físico; el prisma a través del que miramos e interpretamos buena parte de la realidad. Como herramienta le es indispensable al astrofísico que pretende descifrar los fenómenos del universo violento; punto de partida para el cosmólogo en sus desvelos por comprender la estructura y evolución del universo en su conjunto y quizás vislumbrar respuestas para las ancestrales preguntas acerca del origen y el destino del universo. Acicate y espuela para la imaginación del matemático, por los problemas técnicos y conceptuales que de ella se desprenden, la relatividad es ejemplo paradigmático de la imposibilidad de la ruptura entre la física y las matemáticas. En las palabras de Einstein:

> Estoy convencido de que podemos descubrir por medio de construcciones puramente matemáticos, los conceptos y las leyes que los conectan entre si, y que proveen la clave para el entendimiento de los fenómenos naturales. La experiencia puede sugerir los conceptos matemáticos apropiados pero éstos no pueden ser deducidos de ella. La experiencia permanece por supuesto como el único criterio de la utilidad física de una construcción matemática. Pero el principio creativo reside en las matemáticas. En un cierto sentido por tanto, mantengo como verdadero que el pensamiento puro puede capturar la realidad, como los antiguos soñaron.

---

cuánticos son importantes, y la relatividad deja de ser válida y deberá ser reemplazada por una teoría cuántica de la gravitación, aun no desarrollada.

REFERENCIAS

1. Wigner E., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,* Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XIII, 001-14 (1960).

2. Dirac P. A. M., *Development of the Physicist Conception of Nature,* en The Physicist Conception of Nature, de. por Jagdish Mehra, Reidel Pub. Company, (1973).

3. Koestler A., *Los Sonámbulos,* Tomo 2, Ed. Salvat (!986).

4. Courant R. y Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics,* Interscience, New York (1953).

5. Citado por John D. Barrow, *The World within the World*, Oxford University Press, 1988.

6. Einstein A., *Die Feldgleichungen der Gravitation,* Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Dic. 2, (1915).

ALGUNAS LECTURAS SUGERIDAS

- John D. Barrow, *The World within the World*, Oxford University Press, 1988.

- Steven Weinberg, *Dreams of a Final Theory,* Pantheon Books, New York, 1992

- Murray Gell-Mann, *The Quark and the Jaguar,* Freeman and Company, New York, 1994

- Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law,* The MIT Press, 1965

- Kip Thorne, *Black Holes & Time warps: Einstein's Outrageous Legacy,* Norton, 1994