ALGUNOS ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DE LA MATEMÁTICA:

¿ES LA MATEMÁTICA UN LENGUAJE?

Walter O. Beyer K.
Universidad Nacional Abierta-UNA

Introducción

Trasvase

En este breve artículo se estudiarán, de manera somera, algunos aspectos epistemológicos de la Matemática. La razón de ello radica en que para algunas corrientes filosóficas del pensamiento matemático, esta disciplina es un lenguaje, mientras que para otras la matemática es una ciencia, que tiene asociado un lenguaje a través del cual se estudian y manipulan sus objetos. Asimismo, se da el caso de algunos estudiosos de la didáctica de las matemáticas como Pimm (1990), los cuales usan de manera metafórica el considerar a la matemática como un lenguaje.

Es de hacer notar que no se pretende en ningún momento profundizar acerca del carácter de los objetos de estudio de la Matemática, sino procurar, por un lado, establecer un deslinde entre ésta y su lenguaje y, por otro lado, presentar un panorama general de la problemática epistemológica que rodea a la Matemática.

La Matemática, desde tiempos muy remotos, ha sido terreno fértil para las disputas filosóficas.

Pareciera ser que los problemas fisiológicos que esta disciplina plantea, son tan antiguos como ella misma.

Sí, desde las paradojas de Zenón de Elea (siglo V a.C.), pasando por los segmentos inconmensurables, el reconocimiento de la existencia de los números negativos y de los complejos, los "incrementos evanescentes" del cálculo –como los llamara Berkeley (1685-1753)–; las geometrías no euclidianas, las curvas patológicas como la que llena una caja cúbica o la curva de Koch, conocida también como "curva copo de nieve", que aparece en la geometría de los fractales, las funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto, hasta las paradojas de la teoría de conjuntos; innumerables controversias han acompañado el desarrollo histórico de la Matemática.

Algunas de estas controversias en el seno de la Matemática han conducido a verdaderas crisis. Así se tiene, por ejemplo, la crisis de los fundamentos. Algunas de estas polémicas han quedado zanjadas mientras que otras cobran renovados bríos con el pasar del tiempo, conduciendo –estas últimas– a la creación de escuelas filosóficas y a diversas posiciones.

EDUCERE, TRASVASE, AÑO 4, Nº 14, JULIO - AGOSTO - SEPTIEMBRE, 2001

Las tres escuelas filosóficas clásicas de la matemática

Las paradojas de la teoría de conjuntos llevaron las pugnas filosóficas a cierto clímax, del que derivó el surgimiento de tres grandes escuelas filosóficas de la Matemática: la escuela logicista de Rusell (1872-1970), la escuela formalista de Hilbert (1862-1943) y la escuela intuicionista de Brouwer (1881-1966).

El problema de las paradojas (de la teoría de conjuntos) surge a raíz de los estudios que el célebre matemático ruso George Cantor (1845-1918) hiciera y que condujeron a una serie de memorias en los años 1874-1884 en las cuales desarrolla la Teoría de Conjuntos.

En los trabajos de Cantor aparece –nuevamente– aquel elusivo con el que una y otra vez, en el decurso de la historia, se han topado los matemáticos: el infinito. Además, Cantor prueba, por *reductio ad absurdum*, que los números reales son no numerales.

Pero por su parte, la Matemática crece sin cesar, se desarrolla más y más. Sin embargo, toda ella parece provenir de un tronco común, de una misma raíz. Esto es lo que perciben –cada vez más– los matemáticos de fines del siglo pasado y comienzos de éste, por ello se empeñaron con denuedo en hallar esa raíz.

Russell y su escuela le buscan asidero en la Lógica e intentan derivar toda la Matemática a partir de ésta: Esa es la esencia del programa de la escuela logicista. Pero la aparición de paradojas en la Teoría de Conjuntos hizo tambalear el intento. Russell, Witehead (1861-1947) y sus seguidores crean la Teoría de Tipos y el Axioma de Reductibilidad para solventar la situación; sin embargo, dicha solución no satisfizo ni al mismo Russell.

Por otro lado, los formalistas, con Hilbert a la cabeza, llegaron a que "...el problema de la fundamentación de toda la Matemática queda reducido al de fundamentar la teoría de números y la teoría de conjuntos". (Dou, 1970: 75). Empero, la ilusión formalista se vino abajo cuando Kurt Gödel (1906-1978) demostró, en 1931 que el método axiomático de los formalistas tenía limitaciones intrínsecas. Gödel probó que existen, en el campo de la aritmética, proposiciones que no pueden deducirse de los axiomas que uno adopte, es decir, existen proposiciones indecidibles y, por lo tanto, el sistema de axiomas adoptado es incompleto. Una de tales proposiciones –así lo probó Gödel– es la que establece la compatibilidad de la Aritmética.

Ante las posiciones de la escuela logicista y formalista, surge un tercero en discordia: la escuela intuicionista a la que Cantor se adscribe. Esta escuela rechaza de plano el principio del tercero excluido en los dominios infinitos y, por tanto, rechaza las pruebas por reducción al absurdo como la empleada por Cantor para probar la no numerabilidad de los números reales.

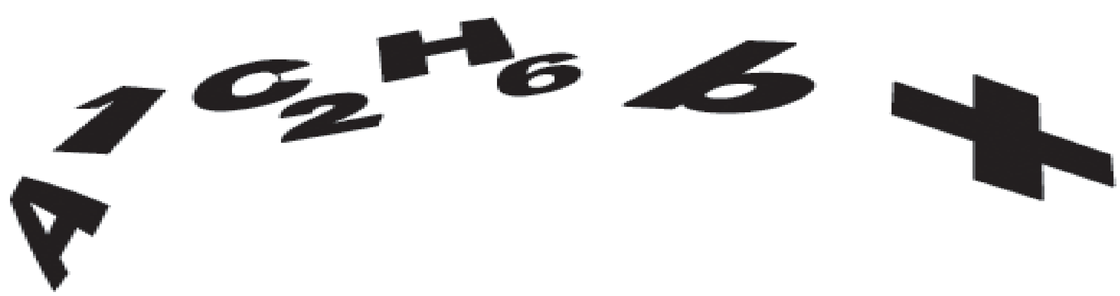
Además los intuicionistas rechazan el infinito actual y sólo aceptan el infinito potencial, aquel –como decía Gauss– que era una manera de decir cuyo significado es el límite al cual se acercan indefinidamente ciertas razones, mientras otras aumentan sin restricción.

Contra el infinito actual y contra las pruebas por reducción al absurdo como la prueba diagonal de Cantor: así como contra la existencia de objetos matemáticos que no se pueden construir como los que postulan el axioma de elección. Contra todo esto se enfrentaron los intuicionistas encabezados por Luitzen E. y J. Brouwer.

Para esta escuela la existencia matemática ya no equivale a no contradicción como en el formalismo, sino que significa constructividad. Además, según Brouwer, la lógica clásica es la traducción, en la sintaxis del lenguaje, de la experiencia general sobre los sistemas finitos, de ahí que, a priori, esa lógica deja de ser válida en la Matemática, que estudia conjuntos infinitos. De este hecho resulta como consecuencia que el principio lógico del tercio excluido deja de ser válido en Matemática (Babini, 1967: 62).

Como se ve, grandes partes de la Matemática clásica quedan excluidas de la Matemática intuicionista.

Para esta escuela, la sucesión de los números naturales: 1, 2, 3, 4, ..., que ellos consideran como no



terminada –ya que para ellos no tiene sentido hablar del conjunto de los números naturales debido a que sería un infinito actual– es una que se forma por medio del paso de n a n+1; esto es, que para ellos decir que los naturales son infinitos, significa que todo natural tiene un siguiente. Es decir, se tiene un proceso constructivo para obtenerlos. Para Brouwer y sus seguidores los números naturales constituyen el objeto de la intuición inicial.

Es importante resaltar que para la escuela intuicionista la lógica no precede a la Matemática, sino todo lo contrario: es una parte integrante de la Matemática.

Además, su Lógica (en realidad existen varias lógicas intuicionistas) es distinta de la Lógica clásica; así por ejemplo, la negación de p no implica p. Asimismo, se encuentran dentro de la Matemática intuicionista teoremas que dentro de la Matemática clásica no tendrían siquiera sentido.

A pesar de todas las controversias planteadas, es importante resaltar que:

La estructura formal del razonamiento matemático es un denominador común a todas las escuelas. Toda proposición diferente de los axiomas debe provenir de éstos por aplicación escrita de las reglas de inferencia. Los puntos de discrepancia residen en el diferente aparato deductivo que usan y en la concepción de los entes matemáticos (Chela, 1986: 47-48).

Otras posturas epistemológicas de la matemática

Además de las tres escuelas clásicas reseñadas anteriormente, podemos considerar una cuarta escuela: la escuela conjuntista, iniciada por Ernst Zermelo (1871-1953), quien emprendió la axiomatización de la Teoría de Conjuntos en un trabajo de 1908. En 1922, Abraham A. Fraenkel (1891-1965) perfecciona la obra de Zermelo, siendo hoy en día la axiomática de Zermelo-Fraenkel el sistema de axiomas más comúnmente empleado por la comunidad matemática. Otros estudiosos como Von Neumann (1903-1957) en 1925, Bernays (1888-1978) en 1973 y Gödel en 1940, también produjeron trabajos en esta dirección: cabría, dentro de este contexto, señalar que el grupo Bourbaki adhiere básicamente este punto de vista.

Existen otras posiciones epistemológicas como la que asumen los constructivistas, corriente a la que pertenece Paul Lorenzen. Estos pretenden "construir, sin tomar como base ningún lenguaje fácticamente existente, partiendo de cero, todo el lenguaje de las ciencias" (Requena, 1988: 38). Más adelante se agrega que: "El procedimiento propuesto por el constructivismo para la elaboración de los lenguajes consiste en introducir, mediante reglas de construcción y de uso, todos los elementos requeridos por cada discurso racional.

Preguntar por la verdad de un enunciado será equivalente a preguntar si este enunciado puede construirse siguiendo las instrucciones que dimanan de las reglas. Preguntar, a su vez, si un determinado objeto o elemento pertenece al dominio de una teoría, equivaldría a preguntar si ese objeto puede construirse o no según las reglas estipuladas" (Requena, 1988: 39).

Se puede observar que las posiciones de esta corriente están próximas a las de los intuicionistas.

En realidad, es difícil deslindar ambas tendencias. Para Guerra (1991) se trata de una "combinación de algunas de las tesis formalistas e intuicionistas" (p.39). Por su parte, Guétmanova (1986) establece algunas diferencias entre intuicionistas y constructivistas en términos de los objetos de estudio y de las bases metodológicas. Existen adicionalmente otros puntos de vista en torno a los aspectos epistemológicos de la Matemática, entre los que cabe mencionar la posición que asume Imre Lakatos (1922-1974), discípulo de Popper, para quien las matemáticas son una ciencia casi empírica en la que, al igual que en las otras ciencias, no hay posibilidad de asegurar la certeza absoluta de las proposiciones (Trigueros, 1991: 37).

La autora recién citada refiere que: "para los positivistas lógicos interesados más bien en las ciencias naturales, las matemáticas constituían el **lenguaje** (negrillas añadidas) en el que se expresan las ciencias en sí mismas, sino el lenguaje a través del cual se formalizan y adquieren una presentación más precisa" (op. cit. pp.36-37).

Este es precisamente el punto de vista que acoge Cesarman cuando afirma que "las matemáticas no constituyen una solución a los problemas que plantea el conocimiento de la naturaleza. Las matemáticas son un instrumento –un lenguaje– que sirve para relacionar mediciones y cuantificaciones" (1982: 79).

Más adelante, este autor agrega que la Matemática constituyen la mejor forma de lenguaje para describir el orden que existe en la naturaleza (ibid).

Para aclarar la posición epistemológica de Lakatos, se ha de volver a Trigueros. Esta autora dice que: "para Lakatos, la filosofía de las matemáticas no debe separarse de la epistemología general y sólo puede entenderse como inmersa en ella... De acuerdo con esta posición, las matemáticas constituyen una teoría empírica y como tal pueden aplicárseles los criterios metodológicos de Popper:

las teorías matemáticas son refutables y deben someterse continuamente a la crítica, pues es éste el vehículo de crecimiento del conocimiento matemático.... En este contexto, la lógica no es una herramienta para la prueba de las teorías, sino para su crítica" (op. cit.: 39-41).

Para Lakatos es una pretensión vana tratar de fundamentar la Matemática en postulados autoevidentes de cuya verdad no se pueda dudar y, en consecuencia, él no se preocupa por los fundamentos de la Matemática.

Se tienen también las reflexiones de un matemático mexicano (Gorostiza), quien dice: "No se trata de puntos de vista filosóficos sobre las matemáticas y las ciencias (a los que no soy ajeno, pero no vienen al caso) sino de consideraciones prácticas aprendidas de la realidad, las cuales explicaré brevemente... La cuestión básica es si los matemáticos no tratamos de explicar los secretos de la naturaleza, no empleamos los llamados métodos científicos [y] por otra parte, es común que se hable de las ciencias y las matemáticas como entidades diferentes" (Gorostiza, 1991).

Además se tiene a los que se interrogan: "¿dónde buscar los fundamentos? ¿Pero es que hay en verdad fundamento? ¿Por qué la matemática debe tener fundamento? ¿Fundamentos de qué tipo?" (Rodríguez, 1990: 46); o los que se preguntan "¿qué es el lenguaje matemático si, lejos de ser una simple concatenación de símbolos, si está tan cerca de la naturaleza de las cosas?" (Boutot, s.f.: 78).

Mientras, otros como Papoport, afirman que la Matemática "no tiene tema", es decir, es una ciencia "vacía", la cual en lugar de ser definida por su objeto de estudio como la mayoría de las ciencias se define por su método y "la clave de esta paradoja se encuentra en la naturaleza de la abstracción y de los símbolos." (1968: 237).

Conclusión

Pero, ¿qué tienen que ver los aspectos epistemológicos de la Matemática con el lenguaje matemático? ¿Cuál es su relación? El hecho es que para muchos –esencialmente los formalistas extremos y en parte los constructivistas– la Matemática es un lenguaje. Así se tiene, por ejemplo, el axioma de constructibilidad (añadido a la axiomática de Zemelo Fraenkel), el cual afirma que "todo conjunto des-construible, es decir, definible lingüísticamente mediante una definición en la que se haga referencia sólo a conjuntos construidos anteriormente en la jerarquía de los tipos ideada por Russell". (Dalla Chiara, M.L., 1976: 130). Más adelante (p.131) esta autora señala que: "la idea de constructibilidad representa un desarrollo conjuntista abstracto de los principios filosóficos que orientaron un importante sector del constructivismo matemático

moderno: el sector predicativista, avanzado por vez primera por Henri Poincaré. …Para los predicativistas sólo tienen existencia matemática aquellos entes abstractos que sean definibles mediante una definición predicativa, a saber, una definición en la que se haga referencia a la totalidad de los entes a que el ente sujeto de definición pertenece”.

Es decir, habría –desde este punto de vista– una plena identificación entre Matemática y lenguaje matemático. Es tal el arraigo que ha tenido esta posición que es común que muchos autores la adopten. Así, por ejemplo, Hammer (1974) dice que “la matemática es un sublenguaje [?] (p. 67); por su parte, Delvai (1983) afirma que la “dificultad de las disciplinas formales es entender esa naturaleza formal debido a la cual muchos las consideran como lenguajes” (p. 333). Queremos concluir resaltando que no es fácil adoptar una posición al respecto por lo complejo del asunto; sin embargo, cualquier investigador en el campo de la didáctica de la matemática, asume –implícita o explícitamente– una postura epistemológica y es deseable que conozca –al menos– los elementos que sustentan las diversas posiciones epistemológicas de la Matemática. Dejamos para otro lugar la profundización de estas concepciones así como el estudio de las implicaciones que ellas puedan tener en el campo de la didáctica de la Matemática E

Bibliografía

Babini, J. (1967) *Historia de las ideas modernas en matemática*. Washington: OEA. (Serie de matemática, monografía Nº 4).

Boutot, A. (s.f.) “El poder creador de las matemáticas”. En: *Mundo Científico*, 10 (98): 78-86.

Cesarman, E. (1982) *Orden y caos. El complejo orden de la naturaleza*. México: Editorial Diana.

Chela, R. (1986) *Matemática y lógica*. Caracas: Fondo Editorial Acta Científica Venezolana.

Dalia, Chiara S., M.L. (1976) *Lógica (Temas de filosofía)*. Barcelona, España: Editorial Labor.

Delval, J. (1983) *La construcción del conocimiento en la escuela*. Barcelona, España: Editorial. Laia. (Cuadernos de pedagogía, 11).

Dou, A. (1970) *Fundamentos de la matemática*Barcelona, España: Editorial Labor. (Nueva Colección Labor, Nº 117).

Gorostiza, L.G. (1991) “Perspectiva de las ciencias exactas: las perspectivas de las matemáticas”. En: *Avance y Perspectiva*. 10, (enero-marzo), pp.s/n.

Guerra P., L.G. (1991, junio 9) *Constructivismo en matemática*. Suplemento Cultural de Últimas Noticias, Nº 1203, pp.38-39.

Guétmanova, A. (1989) *Lógica*. URSS: Editorial Progreso.

Hammer, P. (1974) “Lenguaje, aproximación y topologías ampliadas”. En: Y. Rauch y Ch. Scott (Eds.). *Estudios de metodología lingüística.* (pp.56-68). Madrid: Editorial Gredos.

Pimm, D. (1990) *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias y Ediciones Morata.

Rapoport, A. (1968) “La matemática: la ciencia ‘vacía’”. En: L. White, jr. y colaboradores. *Fronteras del conocimiento*. Buenos Aires: EUDEBA.

Requena, E. (1988) “¿Se pueden construir las matemáticas?”. En: *Anthropos*, (82-83): 37-42.

Rodríguez G., A. (1990, Noviembre 11) “Sobre los fundamentos”. *Suplemento Cultural de Últimas Noticias*. Nº 1173, pp.31-46.

Trigueros, M. (1991) “El falsacionismo y la enseñanza de las matemáticas”. En: A. Nosnik (Coor.). *Caminos de apertura: El pensamiento de Karl R. Popper* (pp. 29-55). México: Editorial Trillas.

Tomado de: UNA Opinión. Vol. 14. Año 1996 - 1998.