JUEGO Y MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA: EL *TRUCO DE LAS 21 CARTAS* A TRAVÉS DE PERMUTACIONES

ROY QUINTERO*
rquinter@cantv.net
Universidad de Los Andes.
Núcleo Universitario "Rafael Rangel".
Trujillo, Edo. Trujillo.
Venezuela.

Fecha de recepción: 7 de febrero de 2005
Fecha de aceptación: 18 de agosto de 2005

Resumen

En este artículo presentamos un estudio matemático del clásico y conocido juego de cartas llamado "Truco de las 21 cartas". Mediante la teoría básica de permutaciones se explica por qué el truco es infalible y funciona por sí mismo. Al mismo tiempo fundamentamos, dentro del campo de la educación matemática, el objeto y alcance de este trabajo, tomando en cuenta algunas opiniones del famoso matemático español Miguel de Guzmán (1936-2004).

Palabras clave: permutaciones, matemáticas recreativas, juegos, educación matemática, herramientas tecnológicas (Mathematica®).

Abstract

GAMES AND MATH IN TEACHING: THE 21 CARD TRICK *THROUGH PERMUTATIONS.*

In this article we present a mathematical study of the classic and well-known card name "21-card trick." Using the basic theory of permutations, we explain why the trick is infallible and works on its own. At the same time, we state, within the field of math teaching, the object and scope of this work, taking into account some opinions from the famous Spanish mathematician Miguel de Guzmán (1936-2004).

Key words: *Permutations, recreational math, games, math teaching, technological tools (Mathematica®).*

EDUCERE • Artículos arbitrados • ISSN: 1316 - 4910 • Año 10, Nº 34 • Julio - Agosto - Septiembre 2006 • 427 - 434

El juego y la matemática parecieran estar cada día más identificados. Sin querer ahondar mucho en este tema, y estimulados grandemente por el excelente artículo del famoso matemático español Miguel de Guzmán (Guzmán, 1984), intitulado "Juegos Matemáticos en la Enseñanza", queremos expresar con sus palabras algunos puntos que estimamos relevantes mencionar y que ciertamente ayudarán a explicar el objeto y alcance de este trabajo. Primero que todo, Guzmán (1984), nos dice: "El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático''.

De alguna manera, esto se puede interpretar como una verdadera motivación para estudiar y explicar mediante recursos formales de la matemática ciertos juegos. En particular, nos proponemos hacerlo así, con el bien conocido "Truco de las 21 Cartas". Referido también como "Truco Mágico de Gergonne" (Bomogolny, 2005; Gardner, 1956).

Asimismo, desde sus orígenes, la matemática misma nos provee de muchos ejemplos de corte lúdico. En esta dirección, Guzmán (1984) nos recuerda: "La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado problema bovino de Arquímedes, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada Pseudaria (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía''.

Ciertamente, en su artículo Guzmán (1984) presenta y comenta con mucha claridad ejemplos notables estudiados por las figuras más trascendentes de otras épocas menos remotas, entre otras cita a: Fibonacci, Cardano, Tartaglia, Pascal, Fermat, Euler, Leibniz, Gauss, Hamilton, Hilbert, von Neumann y Einstein.

Además de lo dicho, no olvidemos que la matemática en sí puede entenderse como un gran portafolio de juegos de distintos niveles y exigencias. Fortaleciendo un poco esto, Guzmán (1984) nos expresa: "Por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego''.

Pero también nos aclara, con mucha precisión, cordura y sobre todo para evitar malentendidos, algunas distinciones: "La matemática es, en gran parte juego, y el juego puede en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana''.

Como veremos enseguida, el truco de las 21 cartas, de forma natural, resulta asequible a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos. En este caso, su contenido matemático consiste en el reordenamiento de las cartas, como lo manifiestan sus reglas, así que las permutaciones aparecen casi espontáneamente. Con esta aproximación en mente procedemos a desarrollar un estudio matemático de este juego de cartas; siendo éste el objetivo principal de este trabajo, que nos permita formalmente descubrir los principios que lo rigen todo ello explicado por medio de la teoría básica de permutaciones.

También debemos aclarar que este no es el único enfoque posible, ni necesariamente el más adecuado, en (Bomogolny, 2005; Budd, 2002; Gardner, 1956 y Rouse, 1987) se encuentran otras maneras de abordar el truco de las 21 cartas.

Para finalizar esta introducción, queremos hacer resaltar otro aspecto importante de los juegos, simplemente, su utilización en la enseñanza. Veamos lo que nos dice Guzmán (1984) al respecto: "Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho receloso de su empleo en la enseñanza. `El alumno, -piensa-, se queda con el pasatiempo que, eso sí, le puede comer el coco totalmente y se olvida de todo lo demás. Para lo que se pretende, es una miserable pérdida de tiempo'.

A mi parecer, en cambio, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente''.

Nuevamente, reflexiona sobre algunas limitaciones al respecto cuando manifiesta: "Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente para el aprovechamiento didáctico. Muchos son meras charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado al modo de los oráculos sibilinos y dejan al final una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución da la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que pueda conducir a un método''.

Seguidamente, como para reforzar su posición y por sobre todo aclarar sobre el más fiel y fundamental objetivo que debe lograr quien enseña matemática, nos expresa: "Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en el que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. Muchos de esos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos''.

Finalmente, para sensibilizarnos y seguramente para que reflexionemos sobre este aspecto nos dice: "Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes''.

1. Truco de las 21 cartas

Este truco de cartas clásico emplea 21 cartas cualesquiera de una baraja y algunos reacomodos de las mismas siguiendo ciertas reglas especiales. El objetivo del truco es descubrir o adivinar la carta que usted ha escogido previamente. Después de tres redistribuciones repetidas, su carta siempre termina como la undécima. Básicamente, el truco puede expresarse como sigue:

> Por favor tome 21 cartas de una baraja y escoja una cualquiera sin revelarla. Memorícela, luego baraje las cartas tanto como usted quiera y devuélvame la baraja. Mientras reparto las cartas boca arriba una por una y las amontono en tres pilas hasta la última carta, observe cuidadosamente y dígame en cuál pila cayó su carta una vez finalizada la repartición.
>
> Seguidamente, recolecto las tres pilas y las junto colocando la pila indicada por usted en el medio de las otras dos, manteniendo las tres pilas boca arriba. Aquí tengo dos opciones: o coloco una pila encima y la otra debajo, o viceversa. Sin barajar, repito el procedimiento descrito de repartición y recolección.
>
> Finalmente, sin barajar, nuevamente repito el procedimiento indicado una vez más. Después, reparto las primeras diez cartas boca abajo y la undécima boca arriba. Esta será su carta secreta.

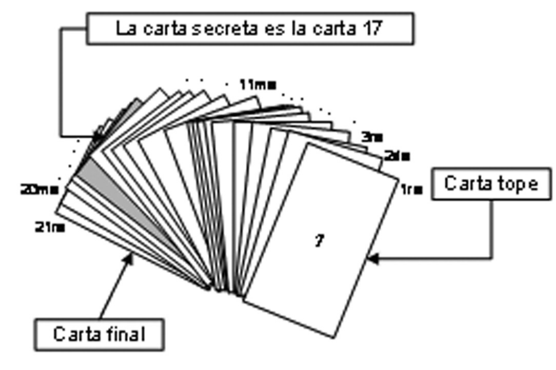

Figura 1: 21 cartas de una baraja

Veamos un ejemplo para clarificar el proceso indicado. En efecto, asumamos que cada carta está boca arriba y etiquetada 1,2,…,20 y 21 de acuerdo a su posición; contando desde el tope de la baraja hasta el fondo (Figura 1), y supongamos que su carta secreta es la número 17 (la misma se ha distinguido con color gris, con el fin de localizar la carta más fácilmente). Entonces, reparto las

EDUCERE • Artículos arbitrados • ISSN: 1316 - 4910 • Año 10, Nº 34 • Julio - Agosto - Septiembre 2006 • 427 - 434

cartas en las Pila 1, Pila 2 y Pila 3 (Figura 2). Observemos que la carta 17 cae en la Pila 2 (Figura 2). Inmediatamente, recolecto las pilas colocando la Pila 2 sobre la Pila 1 y la Pila 3 sobre la Pila 2 (Figura 3, flechas continuas). La otra opción es colocar la Pila 2 sobre la Pila 3 y la Pila 1 sobre la Pila 2 (Figura 3, flechas punteadas). Después de esto, la baraja queda reorganizada con la carta 21 en el tope, luego la carta 18,..., la carta 4 hasta la carta 1 (Figura 4). Observemos que la carta secreta pasó a ocupar la novena posición de la baraja.

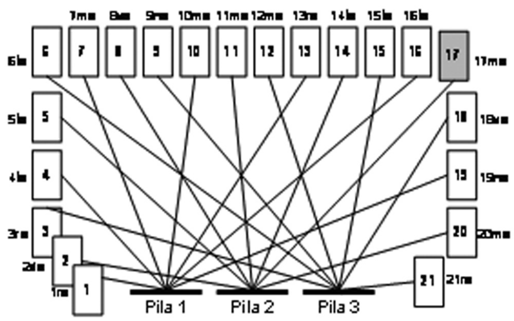

Figura 2: Primera repartición

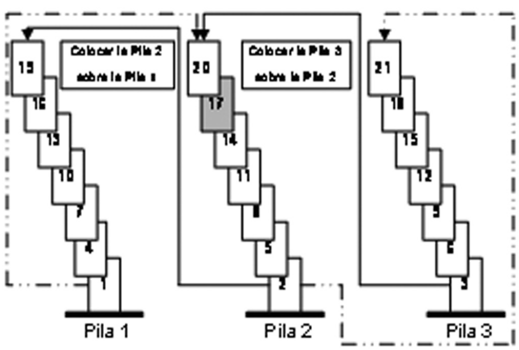

Figura 3: Primera recolección

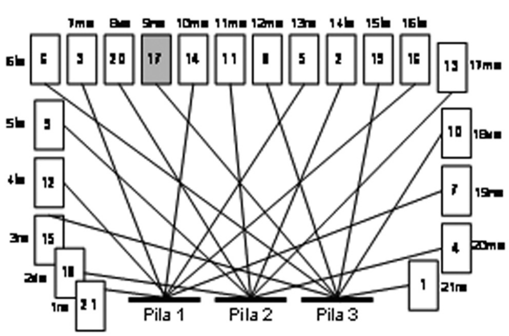

Figura 4: Segunda repartición

Repito el procedimiento, en esta ocasión la carta secreta cae en la Pila 3 (Figura 4). El siguiente paso consiste en colocar la Pila 3 sobre la Pila 1 y la Pila 2 sobre la Pila 3 (Figura 5, flechas continuas). Con flechas punteadas se indica la otra alternativa. Esta vez, la nueva ordenación de las cartas es 4,13,…,12 y 21 con la carta 17 en la duodécima posición (Figura 6).

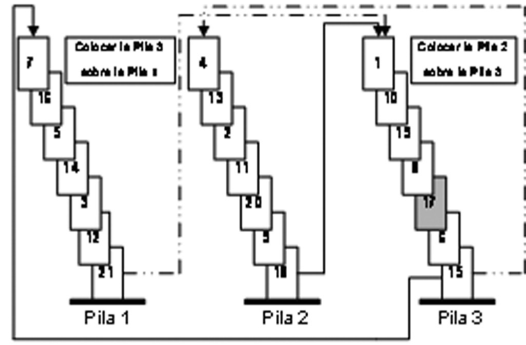

Figura 5: Segunda recolección

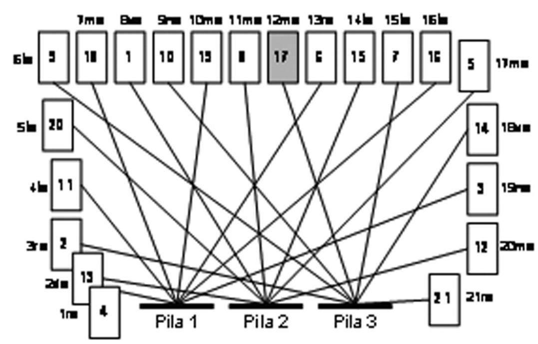

Figura 6: Tercera repartición

Finalmente, reparto las cartas por tercera vez, otra vez la carta secreta cae en la Pila 3 (Figura 6). Entonces, coloco la Pila 3 sobre la Pila 1 y la Pila 2 sobre la Pila 3 (Figura 7, flechas continuas). La otra posibilidad es indicada con flechas punteadas. Observe que la carta 17 ha sido movida a la undécima (11ma) posición (Figure 8) y ciertamente he descubierto su carta.

Basado en este ejemplo, podríamos decir que el procedimiento mostrado reorganizó las cartas de tal forma que pude encontrar la carta escogida sin mucha complicación. Aparentemente, el truco funciona por sí mismo. Funciona por los reacomodos de las cartas, pero, ¿será infalible? Si es así, ¿por qué el truco siempre funciona? Antes de responder, revisaremos algunos términos y notación básicos sobre permutaciones que serán necesarios en lo sucesivo.

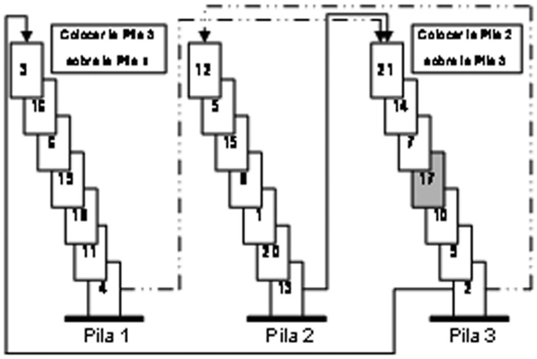

Figura 7: Tercera recolección

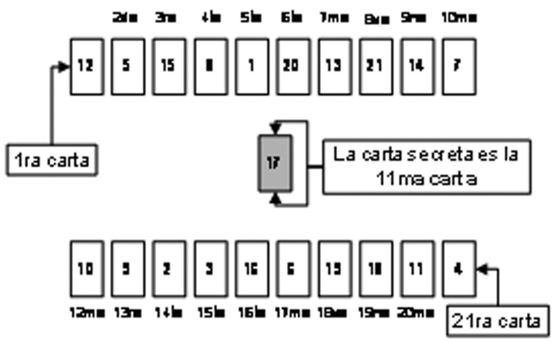

Figura 8: Descubrimiento de la carta secreta

2. Terminología y notación sobre permutaciones

Comenzamos esta sección con el concepto de permutación (Rivero, 1996). Dado un conjunto no vacío X, una permutación de X es simplemente un reordenamiento de sus elementos. Más precisamente:

Definición 1. Una permutación del conjunto X es cualquier aplicación biyectivade α X a si mismo.

Una aplicación biyectiva es una función inyectiva (uno a uno) y sobreyectiva (sobre) (Rivero, 1996). Estamos particularmente interesados en permutaciones de conjuntos finitos, especialmente el conjunto {1,2,…,n} (n entero mayor que 1). Una manera conveniente de representar la permutación α es como sigue: Listamos los números 1,2,…,n en una fila y en otra fila debajo de la primera escribimos las correspondientes imágenes a través de α . Por ejemplo, la permutación α de X = {1,2,3,4} con $\alpha(1)=3$, $\alpha(2)=1$, $\alpha(3)=4$ y $\alpha(4)=2$ la representamos así

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

S_n denota el conjunto de todas las permutaciones de {1,2,…,n}. Si α es el elemento de S_4 dado arriba y

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces la composición $\alpha \circ \beta$ de las biyecciones α y β; la cual es otra biyección, es

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, $\alpha \circ \beta$ también pertenece a S_4. En general, la composición de dos permutaciones de X es una permutación de los elementos de X. Notemos que

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \alpha \circ \beta$$

Esto nos dice que el orden de composición importa.

De ahora en adelante, por simplicidad, escribiremos la composición de dos permutaciones α y β cualesquiera como: $\alpha\beta$ (i.e., como un producto). En símbolos, $\alpha\beta := \alpha \circ \beta$ Así pues, para encontrar $\alpha\beta(i)$, primero se aplica β a *i* y entonces se aplica a $\beta(i)$. Esto significa que los productos se leen de derecha a izquierda.

En la siguiente sección, convertimos el truco de las 21 cartas en un problema matemático en términos de permutaciones pertenecientes a S_{21}.

3. Formulación del problema

Si observamos el ejemplo del truco mágico de Gergonne dado, no es difícil darse cuenta que detrás de cualquiera de los reacomodos obtenidos, después de ejecutar cualquiera de los tres pasos de repartición-recolección, está realmente una permutación de S_{21}. ¿Cómo podemos obtenerlas todas? Veamos que, las figuras mostradas tienen la clave para encontrarlas. De hecho, de la Figura 4 se sigue que el orden actual de las cartas es (antes de la segunda repartición): 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, 19, 16, 13, 10, 7, 4 y 1 (1). Esto quiere decir que: la carta 1 se movió al 21er lugar, y las cartas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 y 21 se movieron a las posiciones 14ta, 7ma, 20ma, 13era, 6ta, 19na, 12ma, 5ta, 18va, 11ma, 4ta, 17ma, 10ma, 3era, 16ta, 9na, 2da, 15ta, 8va y 1era, respectivamente. Lo cual puede ser claramente expresado mediante la permutación básica α_2, perteneciente a S_{21}, mostrada en la Figura 9.

Mantengamos en mente esta nueva distribución de las cartas surgida de colocar la Pila 2 sobre la Pila 1 y la Pila 3 sobre la Pila 2 (Figura 3, flechas continuas). Si en lugar de ésta escogemos la otra opción (flechas punteadas) el resultado sería: 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, 21, 18, 15, 12, 9, 6 y 3, y su correspondiente permutación básica β_2 (Figura 9).

EDUCERE • Artículos arbitrados • ISSN: 1316 - 4910 • Año 10, Nº 34 • Julio - Agosto - Septiembre 2006 • 427 - 434

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 14 & 21 & 7 & 13 & 20 & 6 & 12 & 19 & 5 & 11 & 18 & 4 & 10 & 17 & 3 & 9 & 16 & 2 & 8 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 14 & 7 & 21 & 13 & 6 & 20 & 12 & 5 & 19 & 11 & 4 & 18 & 10 & 3 & 17 & 9 & 2 & 16 & 8 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 21 & 14 & 7 & 20 & 13 & 6 & 19 & 12 & 5 & 18 & 11 & 4 & 17 & 10 & 3 & 16 & 9 & 2 & 15 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 7 & 14 & 21 & 6 & 13 & 20 & 5 & 12 & 19 & 4 & 11 & 18 & 3 & 10 & 17 & 2 & 9 & 16 & 1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 21 & 7 & 14 & 20 & 6 & 13 & 19 & 5 & 12 & 18 & 4 & 11 & 17 & 3 & 10 & 16 & 2 & 9 & 15 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 7 & 21 & 14 & 6 & 20 & 13 & 5 & 19 & 12 & 4 & 18 & 11 & 3 & 17 & 10 & 2 & 16 & 9 & 1 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

Figura 9: Permutaciones básicas

Ahora observemos que si la carta secreta no fuera la carta 17, ésta podría haber caído o en la Pila 1 o en la Pila 3 (e. g., si la carta secreta fuera, o la carta 1 o la carta 3). Esto nos dice que si consideramos estas posibilidades, cada una genera dos redistribuciones de las cartas y dos permutaciones.

En el primer caso, las opciones son: o colocar la Pila 1 sobre la Pila 2 y la Pila 3 sobre la Pila 1, o colocar la Pila 1 sobre la Pila 3 y la Pila 2 sobre la Pila 1, originando las siguientes distribuciones de las cartas y permutaciones básicas respectivamente: 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, 20, 17, 14, 11, 8, 5 y 2; y 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, 21, 18, 15, 12, 9, 6 y 3; y α_1 y β_1 (Figura 9).

En el segundo caso, las opciones son: o colocar la Pila 3 sobre la Pila 1 y la Pila 2 sobre la Pila 3, o colocar la Pila 3 sobre la Pila 2 y la Pila 1 sobre la Pila 3. Esta vez los reacomodos de las cartas y las permutaciones básicas son respectivamente: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 19, 16, 13, 10, 7, 4 y 1; y 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 20, 17, 14, 11, 8, 5 y 2; y α_3 y β_3 (Figura 9).

Siguiendo con el ejemplo original y previo a la tercera repartición (Figura 6), las cartas están ordenadas como sigue: 4, 13, 2, 11, 20, 9, 18, 1, 10, 19, 8, 17, 6, 15, 7, 16, 5, 14, 3, 12 y 21 (2); lo cual es equivalente a la permutación intermedia μ (Figura 10). Pero, si observamos cuidadosamente la Figura 5, podemos confirmar que μ fue obtenida después de repartir las cartas la segunda vez, al colocar la Pila 3 sobre la Pila 1 y la Pila 2 sobre la Pila 3, lo cual es equivalente a aplicar la permutación α_3 a la baraja ordenada de acuerdo a la lista (1).

En símbolos, $\mu-\alpha_3\,\alpha_2$ (3). Finalmente, antes de repartir las primeras once cartas (Figura 8), el orden de las cartas es: 12, 5, 15, 8, 1, 20, 13, 21, 14, 7, 17, 10, 9, 2, 3, 16, 6, 19, 18, 11 y 4 (4), el cual es equivalente a la permutación ν (Figura 10). Pero, observando la Figura 7, podemos confirmar que ν se obtuvo después de la tercera repartición, colocando la Pila 3 sobre la Pila 1 y la Pila 2 sobre la Pila 3, produciendo el mismo efecto que aplicar la permutación α_3 a la lista (2) (baraja). Combinando esto con la ecuación (3) obtenemos que, $\nu=\alpha_3\mu=\alpha_3^2\alpha_2$(5). Indudablemente, la lista (4) nos muestra que la carta 17 ocupa la undécima posición; es decir, la carta secreta ha sido descubierta. La ecuación (5) expresa lo mismo, pero en lenguaje matemático,

$$\nu(17)=\alpha_3^2\alpha_2(17)=\alpha_3^2(9)=\alpha_3(12)=11$$

Así pues, lo conseguido hasta este punto es una traducción del ejemplo dado al lenguaje de las permutaciones. Naturalmente surgen unas preguntas: ¿Qué pasa si en lugar de usar $(\alpha_2\alpha_3\alpha_3)$ tomamos el trío $(\beta_2\alpha_3\beta_3)$?, ¿és posible hacer lo mismo para las veinte cartas restantes? Para responder estas preguntas debemos encontrar una forma que incluya todos los casos posibles; es decir, todas las posibles cartas y sus correspondientes localizaciones en las pilas.

Afirmamos sin temor a duda, que la principal clave en todo este proceso yace en la exacta determinación del posicionamiento de las cartas en las pilas. Esto será probado matemáticamente en la siguiente sección.

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 8 & 3 & 19 & 1 & 17 & 13 & 15 & 11 & 6 & 9 & 4 & 20 & 2 & 18 & 14 & 16 & 12 & 7 & 10 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 5 & 14 & 15 & 21 & 2 & 17 & 10 & 4 & 13 & 12 & 20 & 1 & 7 & 9 & 3 & 16 & 11 & 19 & 18 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Figura 10: Permutaciones intermedias

4. Solución del roblema

Empezamos esta sección con un teorema que determina las tres pilas asociadas a cada carta una vez que el truco es ejecutado.

Teorema 1. Sea k perteneciente al conjunto {1,2,…,21} escogida como la carta secreta. Entonces, existe una única terna ordenada de números ($P_{k,3}$, $P_{k,2}$, P_{k1}), donde cada $P_{k,i}$ es el número de la pila donde la carta secreta cae una vez que el procedimiento de repartición-recolección del "truco de las 21 cartas" es realizado *i* veces (*i* =1,2,3). Además, una vez completado el truco, k pasa a ocupar la undécima posición y satisface la ecuación:

$$k = 9p_{k,3}-3p_{k,2}+p_{k,1}-3 \quad (6)$$

Demostración: Dado k, existen enteros únicos $q_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ y $r_1 \in \{0,1,2,3\}$ tales que, $k=3q_1+r_1$ (7). Observemos que q_1+1 indica la posición de la carta *k* contando desde el fondo de la pila y r_1 la pila donde la carta *k* cae después de repartir la baraja la primera vez. Entonces, una vez que la Pila r_1 es colocada en el medio de las otras dos pilas; sin tomar en cuenta cual de las dos opciones es aplicada, la carta k pasa a ocupar la posición número $14-q_1$ la cual puede tomar sólo valores en el conjunto {8,9,10,11,12,13,14}. Repitiendo el mismo esquema, el número $14-q_1$ puede ser expresado en una única forma como, $14-q_1=3q_2+r_2$ (8), donde $q_2 \in \{2,3,4\}$ y $r_2 \in \{1,2,3\}$. Como antes, q_2+1 indica la posición, desde el fondo, que ocupa la carta *k* en la pila y r_2 la pila al repartir las cartas la segunda vez. Al colocar la Pila r_2 entre las otras dos, la carta *k* se mueve a la posición $14-q_2$, tomando valores en el conjunto {10,11,12}. Aplicando por tercera vez el mismo procedimiento, obtenemos $14-q_2=3q_3+r_3$ (9), donde $q_3=3$ y $r_3 \in \{1,2,3\}$. Esta vez la carta *k* ocupa la cuarta ($q_3+1=4$) posición y r_3 la pila donde la carta cae al repartir la tercera vez. Otra vez, al colocar la Pila r_3 entre las otras; sin importar la opción escogida, la carta k finalmente toma la posición número $14-q_3=14-3=11$. Adicionalmente, las ecuaciones (7), (8) y (9) implican que, $k=9r_3-3r_2+r_1-3$. Para finalizar la prueba, denotamos r_1, r_2 y r_3 por $P_{k,1}$, $P_{k,2}$ y $P_{k,3}$ respectivamente.

Observación 1. Primero que todo, el Teorema 1 confirma que el truco es infalible y más aún, que funciona por sí mismo. La ecuación (6) expresa que cualquier carta secreta k puede escribirse en términos de su correspondiente (única) terna ordenada ($P_{k,3}$, $P_{k,2}$, $P_{k,1}$). El Cuadro 1 muestra todas las posibles ternas.

k	$(p_{k,3}, p_{k,2}, p_{k,1})$	k	$(p_{k,3}, p_{k,2}, p_{k,1})$	k	$(p_{k,3}, p_{k,2}, p_{k,1})$
1	(1,2,1)	8	(2,3,2)	15	(2,1,3)
2	(1,2,2)	9	(2,3,3)	16	(3,3,1)
3	(1,2,3)	10	(2,2,1)	17	(3,3,2)
4	(1,1,1)	11	(2,2,2)	18	(3,3,3)
5	(1,1,2)	12	(2,2,3)	19	(3,2,1)
6	(1,1,3)	13	(2,1,1)	20	(3,2,2)
7	(2,3,1)	14	(2,1,2)	21	(3,2,3)

Cuadro 1: Terna ordenada única asociada a *k*

Para terminar exitosamente este artículo, debemos verificar mediante permutaciones que en todos los casos; cuando el truco es realizado, la carta secreta siempre es movida al undécimo lugar, no importando que carta es escogida y que tipo de permutación es utilizada (i. e., o el tipo α_i o el tipo β_i (i=1,2,3). El próximo paso es considerar todas las opciones para cada k y chequearlas todas. Para facilitar la segunda parte se sugiere la herramienta tecnológica (paquete de Mathematica®) "Groups.m", proveída con el excelente libro de Scherk (2000) y disponible gratuitamente en http://www.crcpress.com.

Recordemos, que cada vez que se reparten las cartas, hay dos posibilidades de reunir las tres pilas, siendo estas dos opciones dependientes del número de la pila donde la carta secreta cae. Por tanto, hay ocho permutaciones para cada carta. Por ejemplo, si la carta secreta es la carta 1, según el Cuadro 1 la terna correspondiente es ($P_{k,3}$,$P_{k,2}$,$P_{k,1}$)=(1,2,1), así que tenemos sólo para aplicar cualquiera de las siguientes permutaciones finales:

$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$, $\beta_1\alpha_2\alpha_1$,$\alpha_1\beta_2\alpha_1$,$\beta_1\beta_2\alpha_1$,
$\alpha_1\alpha_2\beta_1$, $\beta_1\alpha_2\beta_1$,$\alpha_1\beta_2\beta_1$,$\beta_1\beta_2\beta_1$.

Calculando una por una (con Mathematica®) obtenemos los resultados mostrados en la Figura 11. Observemos que cada permutación envía 1 en 11 lo cual era lo esperado. Haciendo lo mismo con las restantes veinte cartas y las ocho formas de recolectar las pilas asociadas a cada carta, podemos concluir que en todos los casos (168) la carta secreta efectivamente siempre pasa a ocupar la 11 ma

EDUCERE • Artículos arbitrados • ISSN: 1316 - 4910 • Año 10, Nº 34 • Julio - Agosto - Septiembre 2006 • 427 - 434

( )

$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 1 12 1 3 14 1 5 16 1 7 18 1 9 20 2 1
11 1 4 6 16 1 9 6 13 3 1 0 18 2 1 15 2 5 1 2 20 9 1 7 4 7 1

( )

$\beta_1\alpha_2\alpha_1$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 1 12 1 3 14 1 5 16 1 7 18 1 9 20 2 1
11 1 4 8 2 5 20 1 3 17 1 0 4 7 1 16 1 9 12 6 9 3 1 8 21 1 5

( )

$\alpha_1\beta_2\alpha_1$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 1 12 1 3 14 1 5 16 1 7 18 1 9 20 2 1
11 3 2 0 7 19 1 5 2 14 1 0 18 9 6 1 3 5 1 8 21 1 7 4 16 1 2

( )

$\beta_1\beta_2\alpha_1$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 1 12 1 3 14 1 5 16 1 7 18 1 9 20 2 1
11 1 7 6 21 5 1 1 6 14 1 0 4 9 20 1 3 19 1 5 8 7 3 18 2 1 2

( )

$\alpha_1\alpha_2\beta_1$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 1 12 1 3 14 1 5 16 1 7 18 1 9 20 2 1
11 8 1 4 16 6 1 9 13 1 0 3 18 1 5 21 2 1 2 5 20 1 7 9 4 1 7

( )

$\beta_1\alpha_2\beta_1$ = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 1 12 1 3 14 1 5 16 1 7 18 1 9 20 2 1

Figura 11: Permutaciones finales (carta secreta 1)

posición (verifíquelo usted mismo, por favor). Así, mediante permutaciones en S_{21}, hemos podido explicar completamente porque el truco de las 21 cartas es infalible y funciona por sí mismo.

Observemos que efectivamente el truco ha sido tratado con rigurosidad matemática, cómo si el mismo fuese un auténtico problema matemático, corroborándose así buena parte de lo que comentamos en la introducción.

Estimamos que este enfoque es aplicable a otros trucos de cartas con reglas de juego similares a las consideradas en el "truco de las 21 cartas".

5. Conclusiones

Analizando el estudio realizado concluimos globalmente lo siguiente:

- Desde el punto de vista de la enseñanza, la manera como el truco fue explicado permite introducir algunas nociones o conceptos matemáticos, así como su lenguaje, de forma más amena (por ser un juego) y significativa (por su aplicabilidad directa).
- Desde el punto de vista matemático, el proceso utilizado da muestras claras de la semejanza de actitudes, hábitos de pensamiento y formalismos posibles en la resolución de un juego y en la de un genuino problema matemático.
- Desde el punto de vista de las herramientas tecnológicas, el paquete sugerido para la verificación de las diversas variantes del truco, permite su comprobación rápida, precisa e inmediata eludiendo así largos y tediosos cálculos que seguramente obstruirían el entendimiento. Ⓔ

* Roy Quintero. Profesor Asociado, adscrito al Departamento de Física y Matemática del Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de los Andes. Licenciado en Matemática. Magíster Scientiarum en Matemática. Ph.D. en Matemática.

Bibliografía

Bomogolny, A. (2005). *Gergonne's magic trick*. Documento en línea, disponible en: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Magic/GergonneMagic.shtml.

Budd, C. (2002). *Trick three: finding the card*. Documento en línea, disponible en: http://www.motivate.maths.org/conferences/conf34/c34_trick3.shtml.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, magic and mystery.* New York, USA: Dover Publications, Inc.

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Documento en línea, disponible en: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm.

Rivero, F. (1996). *Álgebra*. Mérida, Venezuela: Talleres Gráficos Universitarios.

Rouse, W. y Coxeter, H. (1987). *Mathematical recreations and essays* (13th. ed.). Toronto, Canada: Dover Books on Mathematical and Word Recreations.

Scherk, J. (2000). *Algebra: a computational introduction*. Florida, USA: Chapman & Hall/CRC.