Universidad de los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática

Polinomios de Bernoulli y Números de Bernoulli

Glauco Alfredo López Díaz

Notas de Matemática

Serie: Pre-Print

No. 211

Mérida - Venezuela

2001

Diseño de Portada: Juan E. Rondón

Notas de Matemática, No. 211
Mérida, 2001.

Polinomios de Bernoulli y Números de Bernoulli *

Glauco Alfredo López Díaz

Abstract

En estas notas estudiaremos a los Polinomios de Bernoulli, los cuales en este caso los definiremos a traves de coeficientes binomiales; su conexión con las sumas de las q-ésimas potencias de los primeros enteros positivos, sus propiedades básicas y una sucesión particular de números racionales que ellos generan, llamados Números de Bernoulli, a traves de una fórmula de recurrencia. Por último, presentamos el teorema clásico de Von Staudt-Clausen, que describe completamente los denominadores de los Número de Bernoulli, y una fórmula multiplicativa para los Polinomios de Bernoulli.

1 Introducción

Es conocido el hecho de que la suma de los n primeros enteros positivos, sus cuadrados o sus cubos son problemas elementales en teoría de números y conducen a las fórmulas:

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N-1)}{2}, \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N-1)(2N+1)}{6}, \sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}. \tag{1.1}$$

En perticular, es de interés el hecho que:

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2 . \tag{1.2}$$

Su generalización a potencias superiores está ligada con el nombre de Jacobo Bernoulli (1654-1705).

* This research was partially supported by CDCHT-ULA under proyect C-677-94-05-E.

2 Los Coeficientes Binomiales

En esta sección estudiaremos funciones de potencias del tipo

$$\sum_{n=1}^{N} n^q, \text{ para } q > 1 \tag{2.3}$$

y las expresaremos en términos de los coeficientes binomiales.

Definición 2.1 *Para cada entero $j \geq 0$ definimos los polinomios de variable real x $f_j(x)$ como:*

$$f_0(x) = 1 \text{ y } f_j(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-j+1)}{1.2\dots j}, \text{ para todo } j \geq 1. \tag{2.4}$$

Observation. Nótese que para los valores de x enteros con $x \geq 0$ se verifica:

$$f_j(x) = \binom{x}{j}. \tag{2.5}$$

Por tal motivo usaremos la notación:

$$\binom{x}{j}$$

para indicar los polinomios de (2.4) de ahora en adelante.

Lema 2.2 *Para todo $M, N \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq M < N$ se cumple:*

$$\sum_{n=M}^{N-1} \binom{N}{j} = \binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1} \tag{2.6}$$

Demostración. Por las fórmulas (2.5) y (2.4) se tiene

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\dots(x-j+1)}{1.2\dots j}, \text{ para todo } j \geq 1.$$

En particular,

$$\binom{x}{j-1} = \frac{x(x-1)\dots(x-j+2)}{1.2\dots(j-1)}, \text{ para todo } j \geq 2.$$

Entonces, para todo $j \geq 2$ resulta

$$\binom{x}{j-1} + \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\dots(x-j+2)}{1.2\dots(j-1)} + \frac{x(x-1)\dots(x-j+1)}{1.2\dots j}$$

$$= \binom{x+1}{j}.$$

De donde,

$$\binom{x}{j-1} + \binom{x}{j} = \binom{x+1}{j}, \text{ para todo } j \geq 2.$$

Lo cual implica que:

$$\binom{x+1}{j+1} = \binom{x}{j} + \binom{x}{j+1}, \text{ para todo } j \geq 2.$$

En consecuencia,

$$\binom{x}{j} = \binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}, \text{ para todo } j \geq 2. \tag{2.7}$$

Así, para $M, N \in \mathbb{Z}$ con $N > M > 0$ se deduce que:

$$\sum_{n=M}^{N-1} \binom{N}{j} = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N}{j} - \sum_{n=0}^{M-1} \binom{N}{j}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\binom{n+1}{j+1} - \binom{n}{j+1} \right) - \sum_{n=0}^{M-1} \left(\binom{n+1}{j+1} - \binom{n}{j+1} \right)$$

$$= \binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1}.$$

Luego,

$$\sum_{n=M}^{N-1} \binom{N}{j} = \binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1}.$$

Por consiguiente hemos obtenido el resultado del lema. ∎

Observación. Las potencias de x^q para $q \geq 1$ las podemos expresar como combinación lineal de los coeficientes binomiales, como veremos después. A su vez, los coeficientes binomiales son polinomios que toman valores enteros para valores enteros de la variable x; por lo tanto, ellos forman una base para todos los polinomios en el anillo $\mathbb{Z}[x]$.

Teorema 2.3 *Para todo $q \geq 1$ se tiene*

$$x^q = \sum_{j \geq 0} A_{qj} \binom{x}{j}, \tag{2.8}$$

para algunos $A_{qj} \in \mathbb{Z}$ con $j \geq 0$.

Demostración. En primer lugar nótese que la suma en (2.8) debe ser finita, ya que los términos $\binom{x}{j}$ son polinomios en x de grado j y el monomio considerado tiene grado q. De donde,

$$A_{qj} = 0, \text{ para todo } j > q. \tag{2.9}$$

Por otra parte, podemos incluir el caso $q = 0$ en (2.8); debido a que:

$$x^0 = 1 = \binom{x}{0} = 1.\binom{x}{0}.$$

Si elegimos $A_{00} = 1$, entonces

$$x^0 = A_{00} \binom{x}{j}. \tag{2.10}$$

Ahora, evaluando en $x = 0$, para $q \geq 1$ nos queda

$$x^q = 0 = 0.1 = 0 \binom{0}{0}.$$

Llamando $A_{q0} = 0$, para todo $q \geq 1$ obtenemos

$$0^q = A_{q0} \binom{0}{0}. \tag{2.11}$$

Lo cual implica que debemos probar la fórmula

$$x^q = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{x}{j}. \tag{2.12}$$

Lo cual haremos por inducción sobre q. En primer lugar, para $q = 1$ se verifica

$$x^1 = x = 1.x = 1 \cdot \frac{x}{1} = 1.\binom{x}{1}.$$

Si elegimos $A_{11} = 1$, entonces

$$x^1 = A_{11}\binom{x}{1} = \sum_{j=1}^{1} A_{1j}\binom{x}{j}.$$

En consecuencia, para $q = 1$ la fórmula (2.12) es cierta. Por hipótesis de inducción supongamos que para $q-1$ es válido que:

$$x^{q-1} = \sum_{j=1}^{q-1} A_{(q-1)j}\binom{x}{j}$$

para algunos $A_{(q-1)j} \in \mathbb{Z}$ con $j = 1, \ldots, q-1$. Veámoslo para q

$$x^q = x^{q-1}.x = \left(\sum_{j=1}^{q} A_{qj}\binom{x}{j}\right).x = A_{(q-1)1}\binom{x}{1}x + A_{(q-1)2}\binom{x}{2}x + \cdots$$

$$+A_{(q-1)(q-1)}\binom{x}{q-1}x$$

$$= A_{(q-1)1}\frac{x}{1}x + A_{(q-1)2}\frac{x(x-1)}{1.2}x + \cdots + A_{(q-1)(q-1)}\frac{x(x-1)\ldots(x-q+2)}{1.2\ldots(q-1)}x$$

$$= A_{(q-1)1}\frac{x}{1}\left((x-1)+1\right) + A_{(q-1)2}\frac{x(x-1)}{1.2}\left((x-2)+2\right) + \cdots$$

$$+A_{(q-1)(q-1)}\frac{x(x-1)\ldots(x-q+2)}{1.2\ldots(q-1)}\left((x-q+1)+(q-1)\right)$$

$$= A_{(q-1)1}\frac{x(x-1)}{1} + A_{(q-1)1}\frac{x}{1} + A_{(q-1)2}\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2}$$

$$+2A_{(q-1)2}\frac{x(x-1)}{1.2} + \cdots + A_{(q-1)(q-1)}\frac{x(x-1)\ldots(x-q+2)(x-q+1)}{1.2\ldots(q-1)}$$

$$+(q-1)A_{(q-1)(q-1)}\frac{x(x-1)\ldots(x-q+2)}{1.2\ldots(q-1)}$$

$$= A_{(q-1)1}\frac{x}{1} + 2A_{(q-1)1}\frac{x(x-1)}{1.2} + 2A_{(q-1)2}\frac{x(x-1)}{1.2}$$

$$+3A_{(q-1)2}\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \cdots + (q-1)A_{(q-1)(q-1)}\frac{x(x-1)\ldots(x-q+2)}{1.2\ldots(q-1)}$$

$$+qA_{(q-1)(q-1)}\frac{x(x-1)\ldots(x-q+2)(x-q+1)}{1.2\ldots(q-1)q}$$

$$= A_{(q-1)1}\binom{x}{1}+2\left(A_{(q-1)1}+A_{(q-1)2}\right)\binom{x}{2}+3\left(A_{(q-1)2}+A_{(q-1)3}\right)\binom{x}{3}+\cdots$$
$$+(q-1)\left(A_{(q-1)(q-2)}+A_{(q-1)(q-1)}\right)\binom{x}{q-1}+qA_{(q-1)(q-1)}\binom{x}{q}.$$

Esto es,

$$x^q = A_{(q-1)1}\binom{x}{1}+2\left(A_{(q-1)1}+A_{(q-1)2}\right)\binom{x}{2}+3\left(A_{(q-1)2}+A_{(q-1)3}\right)\binom{x}{3}+$$
$$+\cdots+(q-1)\left(A_{(q-1)(q-2)}+A_{(q-1)(q-1)}\right)\binom{x}{q-1}+qA_{(q-1)(q-1)}\binom{x}{q}.$$

Sean

$$A_{qj} = j(A_{(q-1)(j-1)}+A_{(q-1)j}),$$
$$\text{para todo } j=2,\ldots,q-1 \text{ y } A_{qq}=qA_{(q-1)(q-1)}. \tag{2.13}$$

Así,

$$A_{q0}=0 \text{ para todo } q\geq 1 \text{ y } A_{q1}=A_{(q-1)1}=\cdots=A_{11}=1.$$

Luego,

$$x^q = A_{q1}\binom{x}{1}+A_{q2}\binom{x}{2}+\cdots+A_{q(q-1)}\binom{x}{(q-1)}+A_{qq}\binom{x}{q}$$
$$=\sum_{j=1}^{q}A_{qj}\binom{x}{j}.$$

Por consiguiente,

$$x^q=\sum_{j=1}^{q}A_{qj}\binom{x}{j},\ \text{ con } A_{qj}\in\mathbb{Z};\ \text{para todo } j=0,1,\ldots,q.$$

Por lo tanto, la fórmula (2.12) es cierta para q. Con lo cual se concluye que el teorema es válido para todo $q \geq 1$. ∎

Observación. Como las potencias de x en la fórmula (2.12) deben coincidir y x^q en el miembro derecho sólo en el término para $j = q$, se tiene

$$x^q = A_{qq}\binom{q}{q} = A_{qq}\frac{x(x-1)\ldots(x-q-1)}{1.2\ldots q}.$$

De donde,

$$A_{qq} = q!, \text{ para todo } q \geq 1. \tag{2.14}$$

Los números de la forma $G_q^j = \frac{A_{qj}}{j}$, para $1 \leq j \leq q$ son llamados números de Stirling de segunda clase.

Corolario 2.4 *Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio de grado n. Entonces,*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j \binom{x}{j} \tag{2.15}$$

para algunos $A_j \in \mathbb{Z}$ con $j = 0, 1, \ldots, n$.

Demostración. Como $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio de grado n tenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k,$$

para algunos $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ con $k = 0, 1, \ldots, n$. Entonces, por las fórmulas (2.8) y (2.9) aplicadas a x^k para $k = 0, 1, \ldots, n$ nos queda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\sum_{j=0}^{k} A_{kj} \binom{x}{j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \alpha_k A_{kj} \right) \binom{x}{j}.$$

Así,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \alpha_k A_{kj} \right) \binom{x}{j}.$$

Luego, llamando

$$A_j = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k A_{kj} \text{ para todo } j = 0, 1, \ldots, n$$

con $A_j \in \mathbb{Z}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$. Por lo tanto, el resultado del corolario es cierto. ∎

Observación. Si $f \in \mathbb{Z}$ es un polinomio de grado n con:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j \binom{x}{j},$$

entonces la determinación de los A_j se obtiene mediante el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} f(0) &= A_0 \\ f(1) &= A_0 + A_1 \\ f(2) &= A_0 + A_1 \binom{2}{1} + A_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f(n) &= A_0 + A_1 \binom{n}{1} + A_2 \binom{n}{2} + \cdots + A_{n-1} \binom{n}{n-1} + A_n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ahora, como los $f(j) \in \mathbb{Z}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$ resulta que $A_j \in \mathbb{Z}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$; y además, están unívocamente determinados.

Teorema 2.5 *Sean A_{qj} como en el teorema (2.3). Entonces,*

$$A_{qj} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^q, \ \textit{para } 0 \leq j \leq q. \tag{2.17}$$

Demostración. Mediante la fórmula (2.12), aplicada a k enteros positivos se verifica

$$k^q = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{k}{j}.$$

Entonces, multiplicando por

$$(-1)^k \binom{l}{k}$$

y sumando sobre $k = 0, 1, \ldots, l$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} k^q = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{k}{j} = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{k}{j}.$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} k^q = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{k}{j}.$$

Como $0 \leq k \leq l$, $0 \leq j \leq q$ y son enteros se tiene

$$\sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{k}{j} = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{l!}{j!(l-j)!} \frac{(l-j)!}{(l-k)!(k-j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{j} \frac{(l-j)!}{((l-j)-(k-j))!(k-j)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{l}{j} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l-j}{k-j} = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{l}{j} \sum_{k=j}^{l} (-1)^k \binom{l-j}{k-j}.$$

O sea,

$$\sum_{j=1}^{q} A_{qj} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} \binom{k}{j} = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{l}{j} \sum_{k=j}^{l} (-1)^k \binom{l-j}{k-j}.$$

De donde,

$$\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} k^q = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{l}{j} \sum_{k=j}^{l} (-1)^k \binom{l-j}{k-j}.$$

Lo cual implica para $l = j$ que:

$$\sum_{k=l}^{l} (-1)^k \binom{l-l}{k-l} = \sum_{k=j}^{l} (-1)^k \binom{l-l}{k-l} = (-1)^l.$$

En caso contrario, para $k = \lambda + j$ resulta

$$\sum_{k=j}^{l} (-1)^k \binom{l-j}{k-j} = \sum_{\lambda=0}^{l-j} (-1)^{\lambda+j} \binom{l-j}{\lambda} = (-1)^j \sum_{\lambda=0}^{l-j} (-1)^{\lambda} \binom{l-j}{\lambda} = 0,$$

ya que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \text{ para todo } n \geq 1.$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=j}^{l}(-1)^k \binom{l-j}{k-j} = 0, \text{ para todo } j \neq l.$$

Así,

$$\sum_{k=0}^{l}(-1)^k \binom{l}{k} k^q = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \binom{l}{j} \sum_{k=j}^{l}(-1)^k \binom{l-j}{k-j} = A_{ql}(-1)^l.$$

O bien,

$$\sum_{k=0}^{l}(-1)^k \binom{l}{k} k^q = A_{ql}(-1)^l.$$

A su vez,

$$Aql = (-1)^{-l} \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \binom{l}{k} k^q = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-l} \binom{l}{k} k^q.$$

Por consiguiente,

$$Aql = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-l} \binom{l}{k} k^q.$$

Llamando, $\lambda = k - l$ se deduce que:

$$\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-l} \binom{l}{k} k^q = \sum_{\lambda=-l}^{0}(-1)^{\lambda} \binom{l}{l-\lambda} (l+\lambda)^q.$$

Luego,

$$A_{ql} = \sum_{\lambda=-l}^{0}(-1)^{\lambda} \binom{l}{l+\lambda} (l+\lambda)^q.$$

Ahora, llamando $m = -\lambda$ nos queda

$$\sum_{\lambda=-l}^{0}(-1)^{\lambda} \binom{l}{l+\lambda} (l+\lambda)^q = \sum_{-m=-l}^{0}(-1)^{-m} \binom{l}{l-m} (l-m)^q$$

$$= \sum_{m=l}^{0}(-1)^{m} \binom{l}{l-m} (l-m)^q.$$

Por otra parte, como

$$(-1)^{-m} = (-1)^m \text{ y } \binom{l}{l-m} = \binom{l}{m} \text{ para todo } m = 0, 1, \ldots, l$$

tenemos que

$$\sum_{m=l}^{0} (-1)^{-m} \binom{l}{l-m} (l-m)^q = \sum_{m=0}^{l} (-1)^m \binom{l}{m} (l-m)^q.$$

Por lo tanto,

$$A_{ql} = \sum_{m=0}^{l} (-1)^m \binom{l}{m} (l-m)^q.$$

Con lo cual se concluye que

$$A_{qj} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^q, \text{ para } 0 \leq j \leq q.$$

■

3 Los Polinomios de Bernoulli

En esta sección estudiaremos unos polinomios particulares, los "Polinomios de Bernoulli", y su conexión con la suma de las q-ésimas potencias de los n primeros enteros positivos.

Definición 3.1 *Los polinomios de Bernoulli denotados por $B_q(x)$ se definen de la siguiente manera:*

$$B_q(x) = q \sum_{j \geq 0} A_{(q-1)j} \binom{x}{j+1} + B_q \text{ para todo } q \geq 1 \tag{3.18}$$

donde B_q es una constante aditiva que será determinada luego.

Teorema 3.2 *Los polinomios de Bernoulli $B_q(x)$ para $q \geq 1$ satisfacen la siguiente fórmula de sumación para todo $M < N$:*

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \frac{1}{q+1} \left(B_{q+1}(N) - B_{q+1}(M) \right) \tag{3.19}$$

Demostración. De acuerdo con la fórmula (2.8)

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j}$$

y la fórmula (2.7)

$$\binom{x}{j} = \binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}, \text{ para todo } j \geq 1$$

se verifica

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{x}{j} = \sum A_{qj}\left(\binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}\right).$$

Esto es,

$$x^q = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\left(\binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}\right). \tag{3.20}$$

Entonces,

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \sum_{n=M}^{N-1}\sum_{j\geq 0} A_{qj}\binom{n}{j} = \sum_{n=M}^{n}\sum_{j\geq 0} A_{qj}\left(\binom{n+1}{j+1} - \binom{n}{j+1}\right)$$

$$= \sum_{j\geq 0} A_{qj}\sum_{n=M}^{n}\left(\binom{n+1}{j+1} - \binom{n}{j+1}\right) = \sum_{j\geq 0} A_{qj}\left(\binom{N}{j+1} - \binom{M}{j+1}\right)$$

$$= \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right).$$

Es decir,

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right).$$

Así por la fórmula (2.9) se tiene

$$\sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{q}\left(A_{qj}\binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j=0}^{q}\left(A_{qj}\binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{q} A_{qj} \binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)} \right) - \left(\sum_{j=0}^{q} A_{qj} \binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)} \right)$$

$$= \left(\sum_{j\geq 0} A_{qj} \binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)} \right) - \left(\sum_{j\geq 0} A_{qj} \binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)} \right).$$

O sea,

$$\sum_{j\geq 0} \left(A_{qj} \binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2} \right) - \sum_{j\geq 0} \left(A_{qj} \binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2} \right)$$

$$= \left(\sum_{j\geq 0} A_{qj} \binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)} \right) - \left(\sum_{j\geq 0} A_{qj} \binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)} \right).$$

Luego por la definición (3.1) nos queda

$$\sum_{j\geq 0} \left(A_{qj} \binom{N}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2} \right) - \sum_{j\geq 0} \left(A_{qj} \binom{M}{j+1} - \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{q+1} \left(B_{q+1}(N) - B_{q+1}(M) \right), \text{ para todo } M < N.$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado del teorema. ∎

Corolario 3.3 *Los polinomios de Bernoulli $B_q(x)$ para $q \geq 1$ satisfacen las siguientes relaciones:*

$$B_q(0) = B_q, \text{ para todo } q \geq 1 \tag{3.21}$$

$$B_q(1) = B_q, \text{ para todo } q \geq 2 \tag{3.22}$$

$$B_1(1) = 1 + B_1$$

Demostración. Por la fórmula (2.9) tenemos

$$B_q(x) = q \sum_{j\geq 0} A_{(q-1)j} \binom{x}{j+1} + B_q = q \sum_{j=0}^{q} A_{(q-1)j} \binom{x}{j+1} + B_q.$$

O bien,

$$B_q(x) = q \sum_{j=0}^{q} A_{(q-1)j} \binom{x}{j+1} + B_q, \text{ para todo } q \geq 1. \tag{3.23}$$

Entonces, evaluando los polinomios $B_q(x)$ para $q \geq 1$ en $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente; y usando el hecho que:

$$A_{q0} = 0, \text{ para todo } q \geq 1$$

tenemos

$$B_q(0) = q\sum_{j=0}^{q} A_{(q-1)j}\binom{0}{j+1} + B_q = qA_{(q-1)0}\binom{0}{1} + B_q = B_q, \text{ para } q \geq 1$$

$$B_1(x) = q\sum_{j=0}^{q} A_{(q-1)j}\binom{1}{j+1} + B_q = qA_{(q-1)0}\binom{1}{1} + B_q = B_q, \text{ para } q \geq 2.$$

Así,

$$B_q(x) = B_q, \text{ para todo } q \geq 1; \text{ y } B_q(1) = B_q \text{ para todo } q \geq 2.$$

En particular,

$$\begin{aligned} B_1(1) = \sum_{j=0}^{1} A_{(1-1)j}\binom{1}{j+1} + B_1 &= \sum_{j=0}^{1} A_{0j}\binom{1}{j+1} + B_1 A_{00}\binom{1}{1} + B_1 \\ &= 1 + B_1. \end{aligned}$$

Luego,

$$B_1(1) = 1 + B_1.$$

Por lo tanto, las relaciones del corolario son válidas. ∎

Teorema 3.4 *Para todo $q \geq 1$ el polinomio de Bernoulli $B_q(x)$ viene dado por la fórmula:*

$$\frac{1}{q}B_q(x) = \frac{x^q}{q!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{q-1}}{(q-1)!} + \cdots + \frac{B_{q-2}}{(q-2)!}\frac{x^2}{2!} + \frac{B_{q-1}}{(q-1)!}\frac{x}{1!} + \frac{B_q}{q!}. \quad (3.24)$$

Demostración. Usando la fórmula (3.20) se verifica:

$$\begin{aligned} x^q &= \sum_{j\geq 0} A_{qj}\left(\binom{x+1}{j+1} - \binom{x}{j+1}\right) = \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x+1}{j+1} - A_{qj}\binom{x}{j+1}\right) \\ &= \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Esto es,

$$x^q = \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right).$$

Entonces, por la fórmula (2.9) se cumple

$$\sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{q}\left(A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j=0}^{q}\left(A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{q}A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right) - \left(\sum_{j=0}^{q}A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right)$$

$$= \left(\sum_{j\geq 0}A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right) - \left(\sum_{j\geq 0}A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right).$$

Es decir,

$$\sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right) - \sum_{j\geq 0}\left(A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)^2}\right)$$

$$= \left(\sum_{j\geq 0}A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right) - \left(\sum_{j\geq 0}A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right).$$

Por la definición (3.1) se tiene

$$\left(\sum_{j\geq 0}A_{qj}\binom{x+1}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right) - \left(\sum_{j\geq 0}A_{qj}\binom{x}{j+1} + \frac{B_{q+1}}{(q+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{q+1}B_{q+1}(x+1) - \frac{1}{q+1}B_{q+1}(x) = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(x+1) - B_{q+1}(x)\right).$$

De donde,

$$x^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(x+1) - B_{q+1}(x)\right). \tag{3.25}$$

Derivando ambos miembros de la fórmula anterior nos queda

$$qx^{q-1} = \frac{1}{q+1}\left(B'_{q+1}(x+1) - B'_{q+1}(x)\right), \text{ para todo } q \geq 1.$$

Y aplicando la fórmula (3.25) a x^q resulta

$$qx^{q-1} = B_q(x+1) - B_q(x).$$

En particular,

$$B_q(x+1) - B_q(x) = \frac{1}{q+1}\left(B'_{q+1}(x+1) - B'_{q+1}(x)\right).$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) - B_q(x) = \frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x+1) - B_q(x+1).$$

Así, para todo $q \geq 1$ el polinomio

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) - B_q(x)$$

tiene período 1; pero, como un polinomio periódico sólo puede ser constante se deduce que

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) - B_q(x) = k_q, \text{ para todo } q \geq 1$$

con $k_q \in \mathbb{R}$ constante; sin perdida de generalidad, tomamos la constante $k_q = 0$, para todo $q \geq 1$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{q+1}B'_{q+1}(x) = B_q(x). \tag{3.26}$$

Ahora, por la fórmulas (2.10) y (3.23) para $q = 1$ tenemos:

$$B_1(x) = \sum_{j=0}^{1} A_{0j}\binom{x}{j+1} + B_1 = A_{00}\binom{x}{1} + B_1 = x + B_1.$$

Luego, por la fórmula (3.26) para $q = 1$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}B'_2(x) = B_1(x).$$

O sea,

$$\frac{1}{2}B_2'(x) = x + B_1.$$

Integrando entre 0 y x teniendo en cuenta la condición de frontera de la fórmula (3.21), se verifica

$$\frac{1}{2!}B_2(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{B_1}{2!}x + \frac{B_2}{2!}.$$

Por hipótesis de inducción, supongamos que para $q-2$ es cierto el hecho

$$\frac{1}{(q-1)!}B_{q-1}(x) = \frac{x^q}{(q-1)!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{q-2}}{(q-2)!} + \cdots + \frac{B_{q-2}}{(q-2)!}\frac{x}{1!} + \frac{B_{q-1}}{(q-1)!}.$$

Veámoslo para $q-1$. Por la fórmula (3.26) para q se cumple

$$\frac{1}{q}B_q'(x) = B_{q-1}(x).$$

Dividiendo entre $(q-1)!$ ambos miembro de la última igualdad se tiene

$$\frac{1}{q!}B_q'(x) = \frac{1}{(q-1)!}B_{q-1}(x).$$

Por hipótesis de inducción resulta

$$\frac{1}{q!}B_q'(x) = \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{q-2}}{(q-2)!} + \cdots + \frac{B_{q-2}}{(q-2)!}\frac{x}{1!} + \frac{B_{q-1}}{(q-1)!}.$$

Integrando entre 0 y x; y usando la fórmula (3.21) nos queda

$$\frac{1}{q!}B_q(x) = \frac{x^q}{q!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{q-1}}{(q-1)!} + \cdots + \frac{B_{q-2}}{(q-2)!}\frac{x}{2!} + \frac{B_{q-1}}{(q-1)!}\frac{x}{1!} + \frac{B_q}{q!}.$$

Por lo tanto, la fórmula (3.24) es válida para $q-1$ y por ende para todo $q \geq 1$. Con lo cual se concluye la demostración del teorema. ∎

Observación Las constantes B_q, para $q \geq 1$ están completamente determinadas por la condición de la fórmula (3.22), evaluando en $x = 0$ de la siguiente forma:

$$0 = \frac{1}{q!} + \frac{B_1}{1!(q-1)!} + \cdots + \frac{B_{q-2}}{(q-2)!2!} + \frac{B_{q-1}}{(q-1)!1!}.$$

Esta es una fórmula recursiva que sirve para hallar los B_q, para $q \geq 1$, que son llamados los **"Números de Bernoulli"**. Multiplicando por $q!$ la fórmula anterior se tiene

$$0 = 1 + \binom{q}{1} B_1 + \cdots + \binom{q}{q-2} B_{q-2} + \binom{q}{q-1} B_{q-1}, \text{ para todo } q \geq 1. \tag{3.27}$$

Teorema 3.5 *Para todo $q \geq 1$ el polinomio $B_q(x)$ satisface la siguiente relación:*

$$B_q(1-x) = (-1)^q B_q(x). \tag{3.28}$$

Demostración. Considerando la fórmula (3.19) entre $-N+1$ y -1 se verifica

$$\sum_{n=-N+1}^{-1} n^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(0) - B_{q+1}(-N+1)\right).$$

A su vez, como

$$\sum_{n=-N+1}^{-1} n^q = (-1)^q \sum_{n=1}^{N-1} n^q$$

se cumple

$$(-1)^q \sum_{n=1}^{N-1} n^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(0) - B_{q+1}(-N+1)\right).$$

A su vez, por la fórmula (3.19) se tiene

$$(-1)^q \sum_{n=1}^{N-1} n^q = (-1)^q \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(N) - B_{q+1}(1)\right).$$

De donde,

$$\frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(0) - B_{q+1}(1-N)\right) = \frac{(-1)^q}{q+1}\left(B_{q+1}(N) - B_{q+1}(1)\right).$$

Lo cual implica, por las fórmulas (3.21) y (3.22), que:

$$B_{q+1}(1-N) - B_{q+1} = (-1)^{q+1}\left(B_{q+1}(N) - B_{q+1}\right).$$

En consecuencia, obtenemos dos polinomios de grado $q+1$ que coinciden para infinitos valores enteros; por consiguiente, son idénticos. Así,

$$B_{q+1}(1-x) - B_{q+1} = (-1)^{q+1} \left(B_{q+1}(x) - B_{q+1} \right).$$

Ahora, derivando ambos miembros de esta última igualdad resulta

$$B'_{q+1}(1-x) = (-1)^q B'_{q+1}(x).$$

Luego, aplicando la fórmula (3.26) nos queda

$$(q+1)B_q(1-x) = (-1)^q (q+1) B_q(x).$$

Por lo tanto,

$$B_q(1-x) = (-1)^q B_q(x).$$

Con lo cual se concluye la demostración del teorema. ∎

Observación. Si $x = 0$ en la fórmula (3.28), entonces

$$B_q(1) = (-1)^q B_q(0).$$

De nuevo por las fórmulas (3.21) y (3.22) tenemos

$$B_q = (-1)^q B_q, \text{ para todo } q \geq 2.$$

O sea,

$$\left(1 - (-1)^q\right) B_q = 0, \text{ para todo } q \geq 2.$$

De donde, se deduce que:

$$B_{2k+1} = 0, \text{ para todo } k \geq 1 \tag{3.29}$$

Por otra parte, evaluando la fórmula (3.28) en $x = 0$ para $q = 1$ resulta

$$B_1(0) = -B_1(1).$$

Luego, por el corolario (3.3) nos queda

$$B_1 = -1 - B_1.$$

Por consiguiente,

$$B_1 = -\frac{1}{2}. \tag{3.30}$$

4 Ceros de los Polinomios de Bernoulli

En esta sección veremos que ninguno de los números de Bernoulli de índice par es nulo, y además, son de signos alternos.

Teorema 4.1 *Los únicos ceros simples de B_{2k+1} en $[0,1]$ son $0, \frac{1}{2}$ y 1 para todo $k \geq 1$*

Demostración. Por la fórmulas (3.28),(3.29) y (3.30) se verifica

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0, \text{ para todo } k \geq 1. \tag{4.31}$$

A su vez, evaluando la fórmula (3.28) en $x = \frac{1}{2}$ se cumple

$$B_q\left(1 - \frac{1}{2}\right) = (-1)^q B_q\left(\frac{1}{2}\right).$$

Es decir,

$$B_q\left(\frac{1}{2}\right)(1 - (-1)^q) = 0.$$

De donde,

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right). \tag{4.32}$$

Lo cual implica que 0,1 y $\frac{1}{2}$ son ceros de $B_{2k+1}(x)$ para todo $k \geq 1$.

Veamos que éstas son las únicas raíces de $B_{2k+1}(x)$ en $[0,1]$ para todo $k \geq 1$; para esto supongamos que $B_{2k+1}(x)$ para $k \geq 1$ tiene cuatro ceros $0, \alpha_1, \alpha_2$ y 1 con $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, donde α_1 o α_2 pueden ser igual a $\frac{1}{2}$. Entonces, por el Teorema de Rolle se tiene que:

Existen β_1, β_2 y β_3 con $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < 1$ tales que:

$$B'_{2k+1}(\beta_i) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Por la fórmula (3.26) resulta

$$B_{2k}(\beta_i) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Esto es, β_1,β_2 y β_3 son ceros de $B_{2k}(x)$ para $k \geq 1$. De nuevo, por el Teorema de Rolle obtenemos que:

Existen γ_1 y γ_2 con $\beta_1 < \gamma_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \beta_3$ tales que:

$$B'_{2k}(\gamma_i) = 0, \text{ para } i = 1, 2.$$

En consecuencia, por la fórmula (3.26) nos queda

$$B_{2k-1}(\gamma_i) = 0, \text{ para } i = 1, 2.$$

Así, B_{2k-1} para $k \geq 1$ tiene al menos cuatro raíces en $[0, 1]$; lo cual es imposible para $B_3(x)$. Por consiguiente, $B_{2k+1}(x)$ para $k \geq 1$ tiene a 0, $\frac{1}{2}$ y 1 como sus únicos ceros en $[0, 1]$. Además, por el mismo razonamiento se deduce que 0, $\frac{1}{2}$ y 1 son raíces simples de $B_{2k+1}(x)$ para $k \geq 1$ en $[0, 1]$. Por lo tanto, hemos demostrado al teorema. ∎

Teorema 4.2 *Los Números de Bernoulli de índice par son no nulos. En otras palabras,*

$$B_{2k} \neq 0, \quad \textit{para todo}\, k \geq 1. \tag{4.33}$$

Demostración. Para esto veamos que $B_{2k}(x) - B_{2k}$ para $k \geq 1$ no cambia de signo en $[0, 1]$. Entonces, supongamos que existe $\delta \in (0, 1)$ tal que:

$$B_{2k}(\delta) - B_{2k} = 0.$$

Como

$$B_{2k}(0) - B_{2k} = B_{2k}(1) - B_{2k} = 0,$$

por el Teorema de Rolle tenemos que:

Existen ξ_1 y ξ_2 con $0 < \xi_1 < \delta < \xi_2 < 1$ tales que:

$$B'_{2k}(\xi_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2.$$

De donde, por la fórmula (3.26) nos queda,

$$B_{2k-1}(\xi_i) = 0 \text{ para } i = 1, 2.$$

Lo cual implica que $B_{2k-1}(x)$ para $k \geq 1$ tiene cuatro ceros en $[0, 1]$, pero esto no es cierto por lo visto en el teorema (4.1). En consecuencia, $B_{2k}(0) - B_{2k}$ para $k \geq 1$ no cambia de signo en $[0, 1]$. Por otra parte, como

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ para } k \geq 1$$

de nuevo, por el Teorema de Rolle, obtenemos que:

Existe τ con $0 < \tau < \dfrac{1}{2}$ tal que:

$$B'_{2k+1}(\tau) = 0, \text{ para } k \geq 1.$$

Así, por la fórmula (3.26) se verifica

$$B_{2k}(\tau) = 0, \text{ para } k \geq 1.$$

Pero, como $B_{2k}(x) - B_{2k}$ para $k \geq 1$ no cambia de signo $(0,1)$ se cumple

$$(B_{2k}(x) - B_{2k})\,(B_{2k}(\tau) - B_{2k}) > 0, \text{ para todo } x \in (0,1).$$

Es decir,

$$(B_{2k}(x) - B_{2k})\,B_{2k} < 0, \text{ para todo } x \in (0,1). \tag{4.34}$$

Luego, por la fórmula (3.24) se tiene

$$B_q(x) = \binom{q}{0} x^q + \binom{q}{1} B_1 x^{q-1} + \cdots + \binom{q}{q-1} B_{q-1} x + \binom{q}{q} B_q$$

$$\text{para todo } q \geq 1.$$

Por consiguiente, para $k \geq 1$ resulta

$$B_{2k}(x) = \binom{2k}{0} x^{2k} + \binom{2k}{1} B_1 x^{2k-1} + \cdots + \binom{2k}{2k-1} B_{2k-1} x + \binom{2k}{2k} B_{2k}$$

$$\text{para todo } k \geq 1.$$

Y por las fórmulas (3.29) y (3.30) se deduce que:

$$B_{2k}(x) = \binom{2k}{0} x^{2k} + \binom{2k}{1}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{2k-1} + \binom{2k}{2} B_2 x^{2k-2} + \cdots$$

$$+ \binom{2k}{2k-2} B_{2k-2} x^2 + \binom{2k}{2k} B_{2k}.$$

De donde,

$$B_{2k}(x) = x^{2k} - k x^{2k-1} + \binom{2k}{2} B_2 x^{2k-2} + \cdots + \binom{2k}{2k-2} B_{2k-2} x^2 + B_{2k}.$$

Lo cual implica que:

$$B_{2k}(x) - B_{2k} = \binom{2k}{2k-2} B_{2k-2}x^2 + \cdots + \binom{2k}{2} B_2 x^{2k-2} - kx^{2k-1} + x^{2k}.$$

En consecuencia,

$$\begin{gathered}(B_{2k}(x) - B_{2k})\, B_{2k} \\ = x^2 \left(\binom{2k}{2k-2} B_{2k-2} + \cdots + \binom{2k}{2} B_2 x^{2k-4} - kx^{2k-1} + x^{2k-2} \right) B_{2k}\end{gathered}$$

para todo $k \geq 2$. Ahora, como

$$\binom{2k}{2k-j} = \binom{2k}{j}, \text{ para todo } j = 0, 1, 2, \ldots, 2k$$

nos queda

$$\begin{gathered}(B_{2k}(x) - B_{2k})\, B_{2k} \\ = x^2 \left(\binom{2k}{2} B_{2k-2}B_{2k} + \binom{2k}{4} B_{2k-4}B_{2k}x^2 + \cdots + B_{2k}x^{2k-2} \right).\end{gathered}$$

Así, la fórmula (4.34) se transforma en:

$$x^2 \left(\binom{2k}{2} B_{2k-2}B_{2k} + \binom{2k}{4} B_{2k-4}B_{2k}x^2 + \cdots + B_{2k}x^{2k-2} \right) < 0$$

$$\text{para todo } x \in (0, 1).$$

Esto es,

$$\binom{2k}{2} B_{2k-2}B_{2k} + \binom{2k}{4} B_{2k-4}B_{2k}x^2 + \cdots + B_{2k}x^{2k-2} < 0$$

$$\text{para todo } x \in (0, 1).$$

Luego, haciendo tender x a 0 tenemos que:

$$\binom{2k}{2} B_{2k-2}B_{2k} < 0.$$

Por consiguiente,

$$B_{2k-2}B_{2k} < 0, \text{ para todo } k \geq 2. \tag{4.35}$$

Por lo tanto,

$$B_{2k} \neq 0, \text{ para todo } k > 1.$$

Con lo cual se concluye la demostración del teorema. ∎

Teorema 4.3 *Los números de Bernoulli de índice par tienen signos alternos. Más precisamente,*

$$(-1)^{k-1}B_{2k} > 0, \ \textit{para todo}\ k \geq 1. \tag{4.36}$$

Demostración. Sabemos, por la fórmula 3.27 aplicada a $q = 2$, que $B_2 = \dfrac{1}{6}$. De donde,

$$(-1)^{1-1}B_{2.1} > 0$$

Luego, la fórmula (4.36) es válida para $k = 1$. Supongamos por hipótesis de inducción que:

$$(-1)^{k-1}B_{2k} > 0, \ \text{para algún}\, k \geq 1.$$

Veamos que la fórmula (4.36) es cierta para $k+1$. Por la fórmula (4.34) se deduce que:

$$(-1)B_{2k}B_{2k+2} < 0.$$

Lo cual implica que:

$$(-1)B_{2k}B_{2k+2} > 0.$$

O sea,

$$(-1)^{2k-1}B_{2k}B_{2k+2} > 0.$$

O bien,

$$(-1)^{k-1}B_{2k}(-1)^{k}B_{2k+2} > 0.$$

Por hipótesis de inducción se tiene

$$(-1)^{k}B_{2k+2} > 0.$$

Así, la fórmula (4.36) es válida para $k+1$. Por consiguiente, la fórmula (4.36) es cierta para todo $k \geq 1$. Por lo tanto, hemos obtenido la demostración del teorema. ∎

Observación. Usando la fórmula (4.31) podemos hallar los polinomios de Bernoulli $B_q(x)$ con q par, para ilustrar esto hallemos $B_2(x)$ y $B_4(x)$. Antes de todo, nótese que los polinomios:

$$B_{2k}(x) - B_{2k}, \ \text{para todo}\ k \geq 1$$

se anulan en $x = 0, 1$. Pero además, por la fórmula (4.31)

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0, \ \text{para todo}\ k \geq 1$$

y por la fórmula (3.26) tenemos

$$B'_{2k}(0) = B_{2k-1}(0) = 0 \text{ y } B'_{2k}(1) = B_{2k-1}(1) = 0, \text{ para todo } k \geq 3.$$

De donde, 0 y 1 son raíces dobles de los polinomios

$$B_{2k}(x) - B_{2k} \text{ para } k \geq 1.$$

En particular,

$$B_2(x) - B_2$$

es un polinomios de grado 2 que tienen a 0 y 1 como ceros simples. Lo cual implica que:

$$B_2(x) - B_2 = cx(x-1)$$

con $c \in \mathbb{R}$ una constante no nula; y como los polinomios de Bernoulli $B_q(x)$ para $q \geq 1$ son mónicos se deduce que $c = 1$. En consecuencia,

$$B_2(x) - B_2 = x(x-1).$$

Así, como $B_2 = \dfrac{1}{6}$ nos queda

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

A su vez, todos los polinomios

$$B_{2k}(x) - B_{2k}, \text{ para } k \geq 2$$

deben tener a

$$(B_2(x) - B_2)^2 = x^2(x-1)^2$$

como factor y en el caso de

$$B_4(x) - B_4$$

que es un polinomio de grado 4, resulta

$$B_4(x) - B_4 = dx^2(x-1)^2$$

con $d \in \mathbb{R}$ una constante no nula. De nuevo, como los polinomios de Bernoulli $B_q(x)$ para $q \geq 1$ son mónicos tenemos que $d = 1$. Por consiguiente,

$$B_4(x) - B_4 = x^2(x-1)^2.$$

Es decir,

$$B_4(x) - B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

Por otra parte, como $B_4 = -\dfrac{1}{30}$ obtenemos

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

Además, por la fórmula (3.26) aplicada a $q = 3$ se verifica

$$B_3(x) = \frac{1}{4}B_4' = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Por otra parte, de la fórmula (3.19) aplicada a $q = 1$ desde $n = 1$ hasta $n = N$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2}\left(B_2(N+1) - B_2(1)\right) = \frac{1}{2}\big((N+1)^2 - (N+1)\big) = \frac{N(N+1)}{2}.$$

De donde,

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

Ahora, aplicando la fórmula (3.19) a $q = 2$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{3}\left(B_3(N+1) - B_3(1)\right) = \frac{1}{3}\left((N+1)^3 - \frac{2}{3}(N+1)^2 + \frac{1}{2}(N+1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(N^2 + \frac{1}{2}N\right)(N+1) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Lo cual implica que,

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula (3.19) a $q = 3$ nos conduce a:

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{1}{4}\left(B_4(N+1) - B_4(1)\right) = \frac{1}{4}\big((N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2\big)$$

$$= \frac{1}{4}\big(\big((N+1)^2 - 2(N+1) + 1\big)(N+1)^2\big) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

Por consiguiente, hemos deducido las fórmulas (1.1) utilizando los polinomios de Bernoulli $B_2(x)$, $B_3(x)$ y $B_4(x)$, respectivamente. En particular,

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2.$$

Por lo tanto, podemos hallar la suma de las q-ésimas potencias de los primeros n enteros positivos usando el polinomios de Bernoulli B_{q+1} en la fórmula (3.19) de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{N} n^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(N+1) - B_{q+1}(1)\right), \text{ para todo } \mathbb{N} \geq 1 \text{ y } q \geq 1.$$

5 Los Números de Bernoulli

En esta sección veremos otra fórmula de generación de los números de Bernoulli distinta a la fórmula recursiva (3.27).

Teorema 5.1 *Para todo $q \geq 1$ se tiene:*

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} . \sum_{l=1}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^q. \tag{5.37}$$

Demostración. Por la fórmula (3.24) llamando $B_0 = 1$ se verifica

$$B_q(x) = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} B_j x^{q-j}, \text{ para todo } q \geq 1. \tag{5.38}$$

A su vez, por la definición (3.1) se cumple

$$B_q(x) = q \sum_{j=0}^{q} A_{(q-1)j} \binom{x}{j+1} + B_q, \text{ para todo } q \geq 1. \tag{5.39}$$

Ahora, procederemos a comparar los coeficientes de las potencias respectivas de x en las fórmulas (5.38) y (5.39). En particular, los coeficientes de x^0 son iguales a B_0, los coeficientes de x^q que vimos antes en la fórmula (2.14) son iguales a 1; y los coeficientes de las potencias superiores a q que analizamos en la fórmula (2.9) son todos iguales a cero. Además, el único término lineal en la fórmula (5.39) se puede determinar de la siguiente manera:

$$\binom{x}{j+1} = \frac{x(x-1)...(x-j)}{(j+1)!} = (-1)^j \frac{x}{j+1} + \cdots \text{ para todo } 0 \leq j \leq x.$$

De donde,

$$B_{q-1} = \sum_{j=0}^{q-1} A_{(q-1)j} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

Lo cual implica, por la fórmula (2.11)

$$B_{q-1} = \sum_{j=1}^{q-1} A_{(q-1)j} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

En consecuencia,

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} A_{qj} \frac{(-1)^j}{j+1}, \text{ para todo } q \geq 1. \tag{5.40}$$

Luego, por la fórmula (2.17) tenemos

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^q$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^j (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^q.$$

O sea,

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^j (-1)^k \binom{j}{k} (j-k)^q.$$

Por otra parte, como $(-1)^k = (-1)^{-k}$ y

$$\binom{j}{k} = \binom{j}{j-k}, \text{ para todo } k = 0, 1, \ldots, j$$

obtenemos

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{j-k} (j-k)^q.$$

Llamando $l = j - k$ nos queda

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{l=j}^{0} (-1)^l \binom{j}{l} l^q = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^q.$$

Por lo tanto,

$$B_q = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j+1} \cdot \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^q.$$

Con lo cual se concluye la demostración del teorema. ∎

Observación. La fórmula (5.37) demuestra que el denominador de los números de Bernoulli B_q puede ser a lo sumo el mínimo común múltiplo de $2, 3, \ldots, (q-1)$ para $q \geq 1$.

6 El Teorema de Von Staudt-Clausen

En esta sección demostraremos un teorema que describe completamente como son los denominadores de los números de Bernoulli B_{2k} para $k \geq 1$, descubierto independientemente por los matemáticos Von Staudt y Clausen en 1840.

Lema 6.1 *Los números de la forma* $\dfrac{A_{qj}}{j!}$ *son enteros para todo* $q \geq 0$ *y para todo* $j = 0, 1, \ldots, q$.

Demostración. Por la fórmula 2.10 se verifica

$$A_{00} = 1.$$

De donde,

$$\frac{A_{00}}{0!} \in \mathbb{Z}.$$

A su vez, por la fórmula (2.11) se cumple

$$A_{q0} = 0, \text{ para todo } q \geq 1.$$

Lo cual implica que:

$$\frac{A_{q0}}{0!} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } q \geq 1.$$

Por otra parte, de la fórmula (2.14) se tiene

$$\frac{A_{qq}}{q!} = 1, \text{ para todo } q \geq 1.$$

En consecuencia,

$$\frac{A_{qq}}{q!} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } q \geq 1.$$

Ahora, por la fórmula (2.9) resulta

$$\frac{A_{qj}}{j!} = 0, \text{ para todo } j \geq g.$$

Así,

$$\frac{A_{qj}}{j!} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } j \geq g.$$

Por hipótesis de inducción supongamos que

$$\frac{A_{kj}}{j!} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } k = 1, \ldots, q.$$

Veámoslo para q, entonces por la fórmula (2.13)

$$\frac{A_{qj}}{j!} = \frac{A_{(q-1)(j-1)}}{(j-1)!} + j\frac{A_{(q-1)j}}{j!}.$$

Luego, como

$$\frac{A_{(q-1)(j-1)}}{(j-1)!}, \ j\frac{A_{(q-1)j}}{j!} \in \mathbb{Z}$$

por hipótesis de inducción se deduce que:

$$\frac{A_{qj}}{j!} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } q \geq 0, \text{ y para todo } j = 0, 1, \ldots, q$$

Por lo tanto, hemos demostrado el lema. ∎

Lema 6.2 *Para todo* $0 \leq j \leq 2k$ *y para todo* $k \geq 1$ *se tiene*

$$A_{2kj} \equiv -1 \ mod \ (j+1), \ \text{si } j+1 \text{ es primo y } j \mid 2k.$$

Demostración. En primer lugar consideremos el caso en que $j+1$ es un primo y $j \mid 2k$. Por el Teorema de Fermat se verifica

$$l^j \equiv 1 \bmod (j+1), \text{ para } l = 1, 2, \ldots, j.$$

De donde,

$$l^{2k} \equiv 1 \bmod (j+1).$$

A su vez, por la fórmula (2.17) haciendo el cambio de variable $j - i = l$ se cumple

$$A_{qj} = (-1)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^{-l} \binom{j}{j-l} l^q.$$

Como $(-1)^{-l} = (-1)^l$ y

$$\binom{j}{j-l} = \binom{j}{l}, \text{ para todo } l = 0, 1, \ldots, j$$

resulta que:

$$A_{qj} = (-1)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^q. \tag{6.41}$$

Lo cual implica que,

$$(-1)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^{2k} \equiv (-1)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \bmod (j+1).$$

En consecuencia,

$$A_{2kj} \equiv (-1)^j \sum_{l=1}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \bmod (j+1).$$

Por otra parte

$$(-1)^j \sum_{l=1}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} = (-1)^j \left(\sum_{l=1}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} + 1 \right) - (-1)^j$$

$$= (-1)^j \left(\sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \right) - (-1)^j = (-1)^{j+1}.$$

Así,

$$A_{2kj} \equiv (-1)^{j+1} \bmod (j+1).$$

Pero, como
$$(-1)^{j+1} \equiv -1 \text{ mod } (j+1)$$
se deduce que
$$A_{2kj} \equiv -1 \text{ mod } (j+1).$$

Luego, el lema es cierto para todos los primos $j+1$ tales que $j \,|\, 2k$. Ahora, consideremos el caso en que $j+1$ es primo pero $j \nmid 2k$, esto excluye los casos $j = 1$ y $j = 2$ que están considerados en la situación anterior; además, esto también excluye los casos en que $j > 2k$, ya que por la fórmula (2.9)
$$A_{2kj} = 0, \text{ para todo } j \geq 2k$$
sólo $j \geq 2k$ es de interés. De nuevo, por el Teorema de Fermat se tiene
$$l^{2k} \equiv l^{2k-j} \text{ mod } (j+1), \text{ para } 0 \leq j \leq 2k.$$

Por consiguiente,
$$(-1)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^{2k} \equiv (-1)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} l^{2k-1} \text{ mod } (j+1).$$

O bien, por la fórmula (6.41)
$$A_{2kj} \equiv A_{(2k-j)j} \text{ mod } (j+1)$$
si elegimos $\delta = \left[\frac{2k}{j}\right]$, entonces
$$A_{(2k-j)j} \equiv A_{(2k-\delta j)j} \text{ mod } (j+1).$$

De donde,
$$A_{2kj} \equiv A_{(2k-\delta j)j} \text{ mod } (j+1).$$
Como $0 \leq j \leq 2k$ nos queda $0 \leq 2k - \delta j$ y por la fórmula (2.9) obtenemos
$$A_{(2k-\delta j)j} \equiv 0 \text{ mod } (j+1).$$

Lo cual implica que,
$$A_{2kj} \equiv 0 \text{ mod } (j+1).$$

Por último consideremos el caso en que $j+1$ es compuesto, o sea $j+1 \geq 6$ y $(j+1) \,|\, j!$. Así, por el lema (2.15)
$$A_{2kj} \equiv 0 \text{ mod } j!.$$

Luego,

$$A_{2kj} \equiv 0 \bmod (j+1)$$

sólo resta el $j = 3$; entonces, por la fórmula (6.41)

$$A_{2k3} = (-1)^3 \sum_{l=1}^{3} (-1)^l \binom{3}{l} l^{2k} = -(-3 + 3.2^{2k} - 3^{2k})$$

$$= 3(3^{2k-1} + 1) - 3.2^{2k}.$$

Esto es,

$$A_{2k3} = 3(3^{2k-1} + 1) - 3.2^{2k}.$$

Por consiguiente,

$$A_{2k3} = 0 \bmod 4.$$

Por lo tanto,

$$A_{2kj} = 0 \bmod (j+1), \; j+1 \text{ no es primo o } j \nmid 2k.$$

Con lo cual se concluye la demostración del lema. ∎

Teorema 6.3 (Von Staudt-Clausen) *El denominador de los números de Bernoulli B_{2k} para $k \geq 1$ es el producto de aquellos números primos para los cuales $p-1$ divide a $2k$, es decir,*

$$B_{2k} = G_{2k} - \sum_{(p-1)\,|\,2k} \frac{1}{p} \tag{6.42}$$

con G_{2k} cierto número entero.

Demostración. Por la fórmula (5.40) se verifica

$$B_{2k} = \sum_{j=1}^{2k} A_{2kj} \frac{(-1)^j}{j+1}, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Entonces, para aquellos j tales que $j+1$ no es primo o $j \nmid 2k$, por el lema (6.2) se cumple que dichos sumandos son enteros inclusive para $j = 0$. A su vez, para los sumandos en los cuales $j+1$ es un primo p y $j = p-1$ divide a $2k$, por el lema (6.2) se tiene

$$\frac{A_{2kj}}{j+1} = M_p + \frac{1}{p}$$

con M_p un cierto entero. Luego,

$$B_{2k} = \sum_{(p-1)\,|\,2k} \frac{(-1)^p}{p} + G_{2k}$$

con G_{2k} cierto entero. Por otra parte, como $(-1)^p = -1$ para todos los primos p excepto para $p = 2$; y puesto que para $p = 2$ las fracciones $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ también difieren de un entero, resulta que:

$$B_{2k} = G_{2k} - \sum_{(p-1)\,|\,2k} \frac{1}{p}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado el teorema. ∎

Observación. La fórmula (6.42) también demuestra que los denominadores de los números de Bernoulli B_{2k} para $k \geq 1$ contienen el factor 6.

7 Una Fórmula Multiplicativa para los Polinomios de Bernoulli

En esta sección estudiamos una propiedad multiplicativa que tienen los polinomios de Bernoulli.

Teorema 7.1 *Para todo $q \geq 1$ el polinomio de Bernoulli $B_q(x)$ satisface la siguiente fórmula multiplicativa:*

$$B_q(kx) = k^{q-1} \sum_{j=0)}^{k-1} B_q\left(x + \frac{j}{k}\right), \ \textit{para todo } k \in \mathbb{Z} \textit{ con } k \geq 1. \tag{7.43}$$

Demostración. Mediante la fórmula (3.25) se verifica

$$x^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(x+1) - B_{q+1}(x)\right), \text{ para todo } q \geq 1.$$

Entonces, haciendo $x = n + \frac{j}{k}$ con $n, k, j \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\left(n + \frac{j}{k}\right)^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}\left(n + \frac{j}{k} + 1\right) - B_{q+1}\left(n + \frac{j}{k}\right)\right).$$

Es decir,

$$(kn+j)^q = \frac{k^q}{q+1}\left(B_{q+1}\left(n+\frac{j}{k}+1\right) - B_{q+1}\left(n+\frac{j}{k}\right)\right).$$

De donde, sumando desde $n = M$ hasta $N-1$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N-1}(kn+j)^q &= \sum_{n=M}^{N-1}\frac{k^q}{q+1}\left(B_{q+1}\left(n+\frac{j}{k}+1\right) - B_{q+1}\left(n+\frac{j}{k}\right)\right)\\ &= \frac{k^q}{q+1}\sum_{n=M}^{N-1}\left(B_{q+1}\left(n+\frac{j}{k}+1\right) - B_{q+1}\left(n+\frac{j}{k}\right)\right)\\ &= \frac{k^q}{q+1}\left(B_{q+1}\left(N+\frac{j}{k}\right) - B_{q+1}\left(M+\frac{j}{k}\right)\right).\end{aligned}$$

Esto es,

$$\sum_{n=M}^{N-1}(kn+j)^q = \frac{k^q}{q+1}\left(B_{q+1}\left(N+\frac{j}{k}\right) - B_{q+1}\left(M+\frac{j}{k}\right)\right). \tag{7.44}$$

A su vez, sumando sobre $j = 0$ hasta $k-1$ resulta:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=M}^{N-1}(kn+j)^q = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{k^q}{q+1}\left(B_{q+1}\left(N+\frac{j}{k}\right) - B_{q+1}\left(M+\frac{j}{k}\right)\right).$$

O bien,

$$\sum_{n=M}^{N-1}\sum_{j=0}^{k-1}(kn+j)^q = \frac{k^q}{q+1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(B_{q+1}\left(N+\frac{j}{k}\right) - B_{q+1}\left(M+\frac{j}{k}\right)\right). \tag{7.45}$$

Ahora, desarrollando el miembro izquierdo de esta igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N-1}\sum_{j=0}^{k-1}(kn+j)^q &= \sum_{n=M}^{N-1}\left((kn)^q + (kn+1)^q + \cdots + (kn+k-1)^q\right)\\ &= (kM)^q + (kM+1)^q + \cdots + (kM+k-1)^q +\\ &\quad + (k(M+1))^q + (k(M+1)+1)^q + \cdots +\\ &\quad + (k(M+1)+k-1)^q + \cdots + (k(N-1))^q +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (k(N-1)+1)^q + \cdots + (k(N-1)+k-1)^q \\
&= (kM)^q + (kM+1)^q + \cdots + (kM+k-1)^q + (kM+k)^q + \\
&+(kM+k+1)^q + \cdots + (kM+k+k+1)^q + \cdots + \\
&+(kN-k)^q + (kN-k+1)^q + \cdots + (kN-k+k+1)^q \\
&= (kM)^q + (kM+1)^q + \cdots + (kM+k-1)^q + (kM+k)^q + \\
&+ \cdots + (kM+2k+1)^q + \cdots + (kN-k)^q + (kN-k+1)^q + \\
&+ \cdots + (kN+1)^q = \sum_{m=kM}^{kN-1} m^q.
\end{aligned}
$$

O sea,

$$\sum_{n=M}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} (kn+j)^q = \sum_{m=kM}^{kN-1} m^q.$$

Sustituyendo esto en la fórmula (7.45) nos queda:

$$\sum_{m=kM}^{kN-1} m^q = \frac{k^q}{q+1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(B_{q+1}\left(N + \frac{j}{k}\right) - B_{q+1}\left(M + \frac{j}{k}\right)\right). \tag{7.46}$$

Recordemos que la fórmula (3.19) dice:

$$\sum_{n=M}^{N-1} n^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(N) - B_{q+1}(M)\right), \text{ para todo } q \geq 1.$$

Aplicando esto al miembro izquierdo de la fórmula (7.46) se deduce:

$$\sum_{m=kM}^{kN-1} m^q = \frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(kN) - B_{q+1}(kM)\right).$$

Lo cual implica que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{q+1}\left(B_{q+1}(kN) - B_{q+1}(kM)\right) \\
&= \frac{k^q}{q+1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(B_{q+1}\left(N + \frac{j}{k}\right) - B_{q+1}\left(M + \frac{j}{k}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$B_{q+1}(kN) - B_{q+1}(kM) = k^q \sum_{j=0}^{k-1} B_{q+1}\left(N + \frac{j}{k}\right) - k^q \sum_{j=0}^{k-1} B_{q+1}\left(M + \frac{j}{k}\right).$$

Esto es,

$$B_{q+1}(kN) - k^q \sum_{j=0}^{k-1} B_{q+1}\left(N + \frac{j}{k}\right) = B_{q+1}(kM) - k^q \sum_{j=0}^{k-1} B_{q+1}\left(M + \frac{j}{k}\right).$$

En consecuencia, el polinomio

$$B_{q+1}(kx) - k^q \sum_{j=0}^{k-1} B_{q+1}\left(x + \frac{j}{k}\right), \text{ para } q \geq 1$$

debe ser constante, ya que toma el mismo valor para todos los valores de x enteros con $x \geq 0$. Así, derivando la última expresión tenemos

$$kB'_{q+1}(kx) - k^q \sum_{j=0}^{k-1} B'_{q+1}\left(x + \frac{j}{k}\right) = 0.$$

Luego, usando la fórmula (3.26)

$$\frac{1}{q+1} B'_{q+1}(x) = B_q(x), \text{ para } q \geq 1$$

se tiene entonces

$$k(q+1)B_q(kx) - k^q \sum_{j=0}^{k-1} (q+1) B_q\left(x + \frac{j}{k}\right) = 0.$$

O bien,

$$kB_q(kx) = k^q \sum_{j=0}^{k-1} B_q\left(x + \frac{j}{k}\right).$$

O sea,

$$B_q(kx) = k^{q-1} \sum_{j=0}^{k-1} B_q\left(x + \frac{j}{k}\right).$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado del teorema y se concluye la demostración. ∎

Referencias

[**1**] **Tom M. Apostol**, Introducción a la Teoría Analítica de los Números, Editorial Reverte, 1980.
[**2**] **Hans Rademacher**, Topics in Analytic Number Theory, Springer-Verlag 169, 1973.
[**3**] **Georgi P. Toltov**, Fourier Series, Dover, New York, 1976.

Departamento de Matemática.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Los Andes.
Mérida 5101.
Venezuela
e-mail address: glauco@ula.ve