NOTAS DE MATEMATICA

Nº 3

"SOBRE LA EXISTENCIA DE CAMPOS VECTORIALES INDEPENDIENTES SOBRE UNA VARIEDAD COMPACTA"

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA
1975

O B J E T I V O

Este trabajo tiene por objeto tratar el conocido tema que estudia la existencia (o no) de campos vectoriales independientes sobre una variedad compacta. Sobre le existencia de un sólo campo linealmente independiente, o lo que es equivalente, sin singularidades existe un resultado bastante antiguo basado en la característica de Euler de la variedad y que afirma que una variedad compacta M admite un campo vectorial sin sin singularidades si y sólo si su característica de Euler es nula. Este resultado puede ser encontrado en [1] con todo lujo de detalles.

Sobre la existencia de más de un campo vectorial linealmente independientes se han realizado muchos trabajos apoyados en métodos de la topología algebraica (Espacios clasificantes, clases características, etc). El trabajo que yo presento en esta oportunidad se apoya estrictamente en métodos de la topología diferencial (cobordismos, transversalidad etc) y parte de su técnica (ver (8) y (9) de este trabajo) está inspirada en el trabajo de R. Wells [5].

Este trabajo puede considerarse como un sistema iteretivo; y puede resumirse como sigue; Dada una variedad M^m y r campos vectoriales linealmente independientes $f_1,\dots,f_r$ $(0 \leq r < m)$. Se construye una especie de característica de Euler $\chi_r = \chi_r\,(M, f_1,\dots,f_r)$ que depende de $M, f_1,\dots,f_r$ y la nulidad de χ_r equivale a la existencia de $(r + 1)$-campos vectoriales independientes sobre M, los cuales están (como debe presumirse) ligados a $f_1,\dots,f_r$ por una cierta relación de homotopía. Es más, $\chi_0 = \chi_0(M)$ coincide con la característica de Euler de M

El trabajo culmina con una generalización trivial a fibrados vectoriales.

N O T A C I O N E S

1.- $\mathbb{R}^m$ espacio de m-uplas $x = (x_1,\ldots,x_m)$ de números reales provisto de la norma euclídea $||x|| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$

2.- S^{m-1} sub-espacio de $\mathbb{R}^m$ formado por aquellos $x \in \mathbb{R}^m$ tales que $||x|| = 1$.

3.- $D(x,r)$ $(r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m)$ espacio formado por los $y \in \mathbb{R}^m$ satisfaciendo $||y - x|| \leq r$.

4.- Las variedades y aplicaciones consideradas seran supuestas C^∞ , la palabra diferenciabilidad significará clase C^∞.

5.- Si M es variedad y K es sub-variedad de M entonces $\nu(K,M)$ denotará el fibrado normal a K en M.

6.- Para cada espacio topológico conexo X, $\pi_i(X)$ denotará el i-ésimo grupo de homotopía de X.

7.- Si ξ es un fibrado vectorial de base X y β: Y $\to$ X es una aplicación continua, entonces $\beta^*(\xi)$ denota el fibrado inducido por ξ y β .

INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es dar una respuesta al siguiente problema: Dada una variedad cerrada M^m y r campos vectoriales independientes $f_1,\dots,f_r$ en $M(0 \leq r < m)$; cuándo existen en $M(r+1)$- Campos vectoriales linealmente independientes?

Si M es $(r+1)$-conexa y $m \geq 2r+3$, veremos que nuestro problema tiene una obstrucción χ_r en el grupo $\pi_m(S^{m-r})$, χ_r depende sólo de M y de una cierta clase de homotopía asociada a $(f_1,\dots,f_r)$. Además χ_0 coincide justamente con la característica de Euler de M. De modo que este trabajo puede considerarse como una cierta generalización de la característica de Euler.

En seguida generalizaremos nuestra resultado al caso de fibrados vectoriales diferenciables. Más precisamente, sea $\xi^n = (E,p,M^m)$ un fibrado vectorial diferenciable y sean $s_1,\dots,s_r$ r secciones linealmente independientes de ξ. Bajo ciertas condiciones de dimensión y conexidad sobre M, veremos que existe una obstrucción $\chi_r(\xi)$ en $\pi_m(S^{n-r})$ a la existencia de $(r+1)$-secciones de ξ linealmente independientes.

SOLUCION DEL PROBLEMA

1) Sean m,r enteros con $0 \leq r < m$. Notaremos por

1.1) $V'_{m,r}$ el sub-espacio de $\mathbb{R}^{rm} = (\mathbb{R}^m)^r$ formado por las r-uplas$(u_1,\dots u_r)$ de vectores de $\mathbb{R}^m$ linealmente independientes. $V'_{m,r}$ es una variedad C^∞ de dimensión mr, la cual tiene el mismo tipo de homotopía que la variedad de Stiefel $V_{m,r}$ de r-referenciales ortonormales en $\mathbb{R}^m$. En particular $\pi_i(V'_{m,r})=0$ si $0 \leq i < m-r$; en el caso $r=0$ ponemos $V'_{m,r},0 = \{0\}$.

1.2) $\bar{V}_{m,r}$ el subespacio de $\mathbb{R}^{rm} \times \mathbb{R}^m$ formado por aquellas $(r+1)$-uplas $(u_1,\dots,u_r,u_{r+1})$ de $\mathbb{R}^m$ tales que $(u_1,\dots,u_r) \in V'_{m,r}$. Es claro que $\bar{V}_{m,r} = V'_{m,r} \times \mathbb{R}^m$. En particular $\bar{V}_{m,r}$ tiene dimensión $mr + m$ y

π_i ($\bar{V}m,r$) = 0, $0 \leq i < m - r$. En el caso $r = 0$, ponemos $\bar{V}m,0 = R^m$.
1.3) Xm,r el subespacio de $\bar{V}m,r$ formado por aquellas (r + 1)-uplas - $(u_1,\ldots,u_r,u_{r+1})$ tales que $u_r + 1$ está en el espacio engendrado por $u_1,\ldots,u_r$. Xm,r es una variedad C^∞difeomorfa a $V'm,r \times R^r$ (Un tal difeomorfismo viene dado por: $V'm,r \times R^r \to Xm,r$; -- $(u_1,\ldots,u_r, \lambda_1,\ldots,\lambda_r) \to (u_1,\ldots,u_r,u_{r+1})$ con $u_{r+1} = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r$). Luego Xm,r tiene dimensión $mr + r$ y el mismo tipo de homotopía de Vm,r. En el caso $r = 0$ ponemos $Xm,r = \{0\} \epsilon R^m$.

Es importante hacer notar que Xm,r es un subespacio cerrado de - Vm,r y que $\bar{V}m,r - Xm,r = V'm,r+1$.

2) Sea M^m una variedad C^∞ de dimensión m. Para $0 \leqslant r < m$ podemos asociar a M variedades fibrades $V'r$ (M), $\bar{V}r$ (M) y Xr (M) de base M, cuyas fibras respectivas son $V'm,r$, $\bar{V}m,r$ y Xm,r. En el caso $r = 0$ tenemos - $V'r(M) = M$, $\bar{V}r(M)$ = TM = fibrado tangente a M y $Xr(M)$ = (sección nula de TM) $\equiv M$.

Sea $T^r(M) = TM \oplus \ldots \oplus TM$ la suma de Whitney de TM, con sigo mismo, r-veces. ($T^r(M)$ no es más que el espacio de todas las r-uplas -- $u_1,\ldots,u_r \;\epsilon\; T_xM$, variando x en M. T_xM denota el espacio tangente a M en x). Entonces $V'r$ (M) es una sub-variedad fibrada de $T^r(M)$ y $\bar{V}r$ (M), $Xr(M)$ son sub-variedades fibradas de $T^{r+1}(M)$. Además $Xr(M)$ es una subvariedad fibrada de $\bar{V}r(M)$ cerrada en $\bar{V}r(M)$.

Sea N otra variedad C^∞ y sea ϕ: $M \to N$ una aplicación C^∞ ; para $r>0$, notaremos por $d_r\,\phi$ la aplicación fibrada de $T^r(M) \to T^r(N)$ definida por $(u_1,\ldots,u_r) \to (d\,\phi(u_1),\ldots,d\,\phi(u_r))$, donde $d\phi$ denota la aplicición tangente a ϕ . Si ϕ es un difeomorfismo entonces $d_r\,\phi$ aplica $V'r(M)$ difeomórficamente (y fibra por fibra) sobre $V'r$ (N). Análogamente, $d_{r+1}\,\phi$ aplica $\bar{V}r(M)$ (resp $Xr(M)$) difeomórficamente (y fibra por fibra) sobre $\bar{V}r(M)$ (resp $Xr(M)$). En el caso $r = 0$ convenimos $T^r(M) = M$ y $d_r\phi = \phi$.
3) PROPOSICION. Sea p: $X_r(M) \to M$ la proyección natural. Si $2 \leqslant i \leqslant m-r-1$ entonces p_*: $\pi_i(X_r(M)) \to \pi_i(M)$ es un isomorfismo. Si $m-r > 1$ entonces p_*: $\pi_1(X_r(M)) \to \pi_1(M)$ es un monomorfismo. Se obtiene un resultado aná-

logo para la fibración $q: \bar{V}_r(M) \to M$.

DEMOSTRACION. p (resp. q) es una fibración cuya fibra es $X_{m,r}$ (resp $\bar{V}_{m,r}$) El resultado se obtiene utilizando la sucesión exacta larga de homotopía asociada a p (resp. q) y recordando que $\pi_i(X_{m,r}) = \pi_i(\bar{V}_{m,r}) = 0$ si $0 \leq i < m-r$. ∎

4) COROLARIO. Si M es R-conexa y $0 \leq R \leq m-r-1$ entonces $X_r(M)$ y $\bar{V}_r(M)$ son R-conexas.

DEMOSTRACION. Si $R \geq 1$ el resultado se sigue de la proposición 3). Si $R = 0$ el resultado se sigue del hecho que $X_{m,r}$ y $\bar{V}_{m,r}$ son arco-conexas para $m-r-1 \geq 0$.

5) En lo que sigue supondremos que M^m es una variedad cerrada (esto es, compacta sin borde) la cual admite r campos vectoriales linealmente independientes $(0 \leq r < m)$.

Esto equivale a decir que la variedad fibrada $V_r'(M) \to M$ admite una sección C^∞. Sea $f: M \to V_r'(M)$ una tal sección, fijada de una vez por todas escribamos $f = (f_1,\ldots,f_r)$, siendo $f_1,\ldots,f_r$ r-campos vectoriales sobre M linealmente independientes.

En lo que sigue denotaremos por π, la proyección de $\bar{V}_r(M)$ en $V_r'(M)$ dada por $(u_1,\ldots,u_r,u_{r+1}) \to (u_1,\ldots,u_r)$. La idea de la siguiente proposición fué tomada de [1] pags 111-112.

6) PROPOSICION. Existe una sección $F: M \to \bar{V}_r(M)$ de la variedad fibrada $q: \bar{V}_r(M) \to M$ con las siguientes propiedades.

6.1) F es transversal a $X_r(M)$.

6.2) $\pi \circ F$ es homotópica a f (denotado $\pi \circ F \sim f$).

DEMOSTRACION. Sea $h: M \to \bar{V}_r(M)$ la sección de q definida por $h(x) = (f_1(x),\ldots,f_r(x), \theta(x))$, donde $\theta: M \to TM$ es un campo vectorial arbitrario (Por ejemplo θ= campo vectorial nulo en todas partes). Es sabido que el espacio de los difeomorfismos C^∞ de M es un abierto en el espacio $C^\infty(M)$ de las aplicaciones C^∞de M provisto de la topología C^∞. Además $C^\infty(M)$es un espacio localmente contráctil. Por el teorema de transversalidad de Thom, existe una aplicación $C^\infty g: M \to \bar{V}_r(M)$ transver sal a $X_r(M)$ y suficientemente próxima de h (en la topología C^∞) para que:

6.3) g sea homotópica a h. y

6.4) $\phi = q \circ g$ sea un difeomorfismo de M isotópico a la identidad, id_M, de M. (Note que si g es "próxima" de h entonces $q \circ g$ es próxima de $q \circ h = id_M$).

Pongamos $F = g \circ \phi^{-1}$, entonces F es transversal a $X_r(M)$ y $q \circ F = (q \circ g) \circ \phi^{-1} = id_M$, es decir, F es una sección de q transversal a $X_r(M)$. Además $F \sim g\, \phi^{-1}$, pero $\phi^{-1} \sim id_M$, luego $F \sim g \sim h$ de donde $\pi \circ F \sim \bar{\pi} \circ h = f$. Esto termina la prueba. ∎

6.5) NOTA. Si F_1, F_2 son dos secciones de q, las cuales verifican 6.1) y 6.2) entonces F_1, F_2 son homotópicas. Esto se sigue de 6.2 y del hecho que $T_xM \simeq \mathbb{R}^m$ es contráctil.

7) PROPOSICION. Supongamos que M es r-conexa y que $m \geq 2r + 2$ ($0 \leq r < m$). Dada una carta local $\psi: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$, entonces existe una sección $F: M \to \bar{V}_r(M)$ de $q: M \to \bar{V}_r(M)$ tal que:

7.1) F es transversal a $X_r(M)$ y $F^{-1}(X_r(M)) \subset U$

7.2) $\pi \circ F$ es homotópica a f.

DEMOSTRACION. Sea $G: M \to \bar{V}_r(M)$ una sección de q satisfaciendo 6.1) y 6.2) y sea $L = G^{-1}(X_r(M))$. Entonces L es una sub-variedad compacta de M (por ser M compacta y $X_r(M)$ cerrada en $\bar{V}_r(M)$) de dimensión $\dim L = \dim M + \dim X_r(M) - \dim \bar{V}_r(M) = m + (m + mr + r) - (m + m + mr) = r$. Ya que M es r-conexa $m \geq 2r + 2$ existe una isotopía $\phi : L \times I \to M$ ($I = [0,1]$) de la inclusión $L \subset M$ tal que $\phi(L \times \{1\}) \subset U$. Por el teorema de extensión de isotopías, existe una isotopía $\Phi: M \times I \to M$ de M ($\Phi(x,0) = x$, $x \in M$) la cual prolonga a ϕ. Definamos para, $0 \leq t \leq 1$, $G_t: M \to \bar{V}_r(M)$ por $G_t = (d_{r+1}\, \Phi_t) \circ G \circ \Phi_t^{-1}$, donde $\Phi_t: M \to M$ es dada por $\Phi_t(x) = \Phi(x,t)$. Es fácil verificar que G_t es una sección de q transversal a $X_r(M)$ ($t \in I$). También es claro que $G_1^{-1}(X_r(M)) \subset U$. El resultado se obtiene, entonces, poniendo $F = G_1$. ∎

8) La obstrucción $X_r([f])$. Supongamos que M^m es (r +1)-conexa y que $m \geq 2r + 3$. Del corolario (4) se sigue que $X_r(M)$ es (r + 1)-conexa. Sea

ψ: U $\overset{\approx}{\to}$ R^m una carta local de M y escojamos una sección F: M $\to$ $\bar{V}_r(M)$ de q: M $\to$ $\bar{V}_r(M)$ verificando las condiciones 7.1) y 7.2) de la proposición 7).

Pongamos K = $F^{-1}(X_r(M))$; K es una sub-variedad compacta de M de dimensión r. Sea α: K $\to$ $X_r(M)$ la restricción de F. (Note que α es un imbeding porque F es un imbeding). Sea CK el cono de K, ya que $X_r(M)$ es r-conexa entonces existe una extensión β: CK $\to$ $X_r(M)$ de α. Dos tales extensiones son siempre homotópicas porque $X_r(M)$ es (r+1)-conexa.

Sea $\nu = \nu(X_r(M), \bar{V}_r(M))$ el fibrado normal a $X_r(M)$ en $\bar{V}_r(M)$, entonces $\nu(K,M)$ es isomorfo a $\alpha^*(\nu) \simeq (\nu(K,M)$ = fibrado normal a K en M) y $\alpha^*(\nu) \cong \beta^*(\nu)|_K$. Como CK es un espacio contráctil, entonces $\beta^*(\nu)$ admite una trivalización única (salvo orientación), la cual por restricción da una trivalización canónica T de $\nu(K,M)$ (T no depende de β puesto que cualquier otra extensión β' de α es homotópica a β). Utilizando el difeomorfismo ψ: U $\to$ R^m, podemos identificar a U con S^m menos un punto y aplicamos la construcción de Thom-Pontryaguin (ver [2]) al par (K,T) para deducir un elemento $X_r = X_r([f]) \in \pi_m(S^{m-r})$. Recordando la nota 6.5) y utilizando las proposiciones 2 y 3 de [5] (pags 390-391), se demuestra que X_r no depende de la carta local (U,ψ) de M ni de la sección F deducida en 7). Así $X_r([f])$ depende sólo de M y de la clase de homotopía [f] de f. (es fácil ver que X_0 es la característica de Euler de M) Como corolario inmediato se obtiene.

9) <u>PROPOSICION</u>. Si M admite (r+1)-campos vectoriales $g_1, \ldots, g_r, g_{r+1}$ linealmente independientes y $[f_1, \ldots, f_r] = [g_1, \ldots, g_r]$ = clase de homotopía de f. Entonces $X_r([f]) = 0$.

Uno de los principales objetivos de estas notas es probar el siguiente recíproco (parcial) de (9).

10) <u>TEOREMA</u>. Sea M^m una variedad cerrada y sea f: M $\to$ $V'_r(M)$ una sección de $V'_r(M) \to M (0 \leqslant r < m)$. Supongamos que M es (r + 1)-conexa y $m \geqslant 2r + 3$. Si $X_r([f]) = 0$ entonces existe una sección F_1: M $\to$ $V'_{r+1}(M)$de

la variedad fibrada $V^{\perp}_{r+1}(M) \to M$ tal que $\pi_0 F_1 \sim f$. La demostración de (10) será propuesta hasta 16) pues antes necesitamos una definición y dos lemas. (Note que la existencia de F equivale a la existencia de -(r+1)-campos de vectores linealmente independientes sobre M).

11) Sea N una variedad y sea $K \subset N$ una sub-variedad compacta sin borde de N. Diremos que K es cobordante a cero en N si existe una variedad compacta $W \subset N \times I$ ($I = [0,1]$) verificando las siguientes propiedades:

a) ∂W = (borde de W) = K

b) $W \cap N \times \{1\} = \emptyset$

c) $W \cap N \times \{0\} = K \times \{0\}$ y la intersección es transversal. (La parte c) significa que si $p: N \times I \to I$ es la proyección natural entonces $p|_W$: $W \to I$ tiene diferencial no nula en todo punto de $K \subset W$).

12) LEMA. Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ una sub-variedad compacta de $\mathbb{R}^m$ cobordante a cero en $\mathbb{R}^m$ y sea W una variedad verificando las condiciones de la definición 11) entonces existe una homotopía $F_t: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times I$ ($t \in I$) y existe $\kappa > 0$ tales que:

a) $F_0(x) = (x,0)$ $(x \in \mathbb{R}^m)$

b) $F_t(x) = (x,0)$ si $||x|| \geq k$ y $t \in I$

c) $F_1(\mathbb{R}^m) \cup W = \emptyset$.

DEMOSTRACION. Ya que W es compacta existe $p > 0$ tal que $W \subset D(o,p) \times I$ pero $W \cap R^m \times \{1\} = \emptyset$, por tanto existe $0 < \delta < 1$ tal que --- $W \subset D(0,p) \times [0,\delta]$. Escojamos $\delta < \gamma < 1$ y sea $\alpha: \mathbb{R}^m \to [o,\gamma]$ una aplicación C^∞ tal que $\alpha(x) = \gamma$ si $||x|| \leq p$ y $\alpha(x) = 0$ si $||x|| \geq 2p$. Definimos $F_t: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times I$ ($t \in I$) por $F_t(x) = (x, t\,\alpha(x))$.

Es fácil verificar que F_t ($t \in I$) para las propiedades deseadas. ∎

13) DEFINICION. Sea N una variedad y sea $K \subset N$ una sub-variedad cerra de N a fibrado normal trivial. Sea T una trivalización de $\nu(K,N)$. Diremos que el par (K,T) es cobordante a cero en N. Si existe una variedad W como en la definición 11) y una trivalización S de $\nu(W,N\times I)$ la cual

prolonga T.

14) Sea $G: \mathbb{R}^m \to \bar{V}_{m,r}$ una aplicación transversal a $X_{m,r}$ y supongamos que $m \geqslant 2r + 3$. Sea $K = G^{-1}(X_{m,r})$(Note que K es una variedad de dimensión r).Sea η el fibrado normal a $X_{m,r}$ en $\bar{V}_{m,r}$ y sea $g:K \to X_{m,n}$ la restricción de G. Ya que $X_{m,r}$ es (r+1)-conexa, g puede ser extendida a una aplicación $\bar{g}:CK \to X_{m,r}$(CK = cono de K).Ya que $\bar{g}^*(\eta)$ es canónicamente trivial, obtenemos por restricción a g, una trivalización canónica T de $g^*(\eta) \simeq \nu(K, \mathbb{R}^m)$. (ver (8)).

15) LEMA. (Con las notaciones de (14)).Si (K,T) es cobordante a cero en R^m por medio de un par (W,S) como en la definición (12). Entonces existe una homotopía.

$H: R^m \times I \to \bar{V}_{m,r}$ de G y existe $k > 0$ tales que:

a) $H_1(R^m) \cap X_{m,r} = \emptyset$

b) $H(x,t) = G(x)$ si $||x|| > k$ y $t \in I$.

DEMOSTRACION. Ya que $X_{m,r}$ es (r+1)-conexa existe una extensión $\alpha: W \to X_{m,r}$ de la restricción $g: K \to X_{m,r}$. Utilizando la trivalización S de $\nu(W, R^m \times I)$.α puede a su vez ser prolongada a una vecindad tubular U de W en $R^m \times I$ por medio de una aplicación diferenciable $\beta: U \to \bar{V}_{m,r}$ la cual coincide con G en $U \cap R^m \times 0$ y es transversal a $X_{m,r}$ y $\beta^{-1}(X_{m,r}) = W$.

Queremos ver que existe una homotopía $L: R^m \times I \to \bar{V}_{m,r}$ de G transversal a $X_{m,r}$ coincidiendo con β en U y tal que $L^{-1}(X_{m,r}) = W$. Las obstrucciones a la existencia de tal L se encuentran en los grupos de cohomología $B_n = H^{n+1}(R^m \times I, R^m \times 0 \cup U; \pi_n(V_{m,r} - X_{m,r})) \simeq$

$$\simeq H^n(R^m \times 0 \cup U; \pi_n(V'_{m,r+1})) \simeq$$
$$\simeq H^n(R^m \times 0 \cup W; \pi_n(V'_{m,r+1})).\ (0 \leqslant n \leqslant m).$$

Pero $\pi_n(V'_{m,r+1}) = 0$ si $0 \leqslant n \leqslant m - r - 2$ y $m - r - 2 \geqslant r + 1$ luego $B_n = 0$ si $0 \leqslant n \leqslant r + 1$.Por otra parte dim W = 1 + dim K = 1 + r y R^m es contráctil; en consecuencia $B_n = 0$ si $n \geqslant r + 1$ lo cual asegura la existencia de L.Por (12) existe una homotopía $F_t: R^m \to R^m \times I (t \in I)$ tal que $F_0(x) = (x,0)$;$F_1(R^m) \cap W = \emptyset$ y $F_t(x) = (x,0)$ si $||x|| > k$ pa ra un cierto $k > 0$ y $t \in I$. El resultado se sigue entonces, definiendo $H: R^m \times I \to \bar{V}_{m,r}$ mediante

$$H(x,t) = L(F_t(x)).\ x \in R^m,\ t \in I.$$

16) <u>DEMOSTRACION DE 10</u>. Sea $\psi: U \overset{\approx}{\to} R^m$ una carta local de M y sea $F: M \to \bar{V}_r(M)$ una sección de $q: \bar{V}_r(M) \to M$. Verificando las condiciones 7.1) y 7.2) de la proposición 7). Pongamos $K = F^{-1}(X_r(M))$:Si $\chi_r([f])=0$ podemos suponer que (K,T) es cobordante a cero en U.(siendo T la trivalización deducida en (8)). Por otra parte tenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} V_r(M) \supset & q^{-1}(U) & \xrightarrow{d_{r+1}\psi} & \bar{V}_r(R^m) & \simeq R^m \times \bar{V}_{m,r} \\ & F \uparrow \ \downarrow q & & \downarrow q & \\ & U & \xrightarrow{\psi} & R & \end{array}$$

Sea $\bar{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \bar{V}_{m,r}$ la representación local de F por medio de ψ y $d_{r+1}\psi$ (esto es $\bar{F} = (d_{r+1}\psi) \circ F \circ \psi^{-1}$). Es claro que $\bar{F}$ se escribe bajo la forma $\bar{F}(x) = (x,G(x))$ para alguna aplicón C^∞ $G: \mathbb{R}^m \to \bar{V}_{m,r}$. Pero F es transversal a $X_r(M)$ y en consecuencia $\bar{F}$ es transversal a $R^m \times X_{m,r}$, pero esto significa que G es transversal a $X_{m,r}$. Ahora,(K,T) es cobordante a cero en U y en consecuencia $L = G^{-1}(X_{m,r}) = \psi(K)$ es cobordante a cero en $\mathbb{R}^m$. Por el lema (15) existe una homotopía -- $G_t: \mathbb{R}^m \to \bar{V}_{m,r}(t \in I)$ de G tal que $G_t(x) = G(x)$ si $||x|| \geqslant k$, $t \in I$ (para un cierto $k > 0$) y $G_1(\mathbb{R}^m) \cap X_{m,r} = \emptyset$.

Sea $\bar{F}_t: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \bar{V}_{m,r}$ definida por $\bar{F}_t(x) = (x,G_t(x))(x \in R^m$, $t \in I)$ y sea

$$F_t: M \to \bar{V}_r(M) \quad (t \in I)$$

definida por:

$$F_t(x) = \begin{cases} (d_{r+1}\psi)^{-1} \circ \bar{F}_t \circ \psi(x) & \text{si } x \in U \\ F(x) & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

Entonces F_t $(t \in I)$ es una sección de q y $F_1(M) \cap X_r(M) = \emptyset$, lo que prueba que F_1 es una sección de $q: \bar{V}_r(M) \to M$ la cual toma sus valores en $\bar{V}_r(M) - X_r(M) = V'_{r+1}(M)$ y termina la demostración.

GENERALIZACION A FIBRADOS VECTORIALES.

17) Sea $\xi^n = (E, p, M^m)$ un fibrado vectorial de clase C^∞ y de dimensión n; cuya base es una variedad C^∞ M de dimensión m. Sea $0 \leqslant r < n$; asociamos a ξ variedades fibradas $V'_r(\xi) = (V'_r(E), p', M)$, $\bar{V}_r(\xi) = (\bar{V}_r(E), q , M)$, $X_r(\xi) = (X_r(E), p, M)$ cuyas fibras respectivas son $V'_{n,r}$, $\bar{V}_{n,r}$ y $X_{n,r}$. (es de hacer notar que $V'_r(E)$ (resp. $X_r(E)$, $\bar{V}_r(E)$) tienen un significado distinto que en (2), en este caso, $V'_r(E)$ consiste de las r-uplas $(u_1,\ldots,u_r)$ de elementos de E tales que $p(u_1) = p(u_2) = \ldots = p(u_r)$ y $u_1,\ldots, u_r$ son linealmente independientes. $X_r(E)$ y $\bar{V}_r(E)$ tienen significados análogos).

Sea $\xi_r = \xi\oplus\ldots\oplus\xi$ la suma de Whitney de ξ consigo mismo r-veces (ξ_r es el espacio de r-uplas $(u_1,\ldots,u_r)$ de elementos de E tales que $p(u_1) = p(u_2) = \ldots = p(u_r)$). $V'_r(\xi)$ r una sub-variedad fibrada de r; $\bar{V}_r(\xi)$ y $X_r(\xi)$ son sub-variedades fibradas de ξ_{r+1}. Además $X_r(\xi)$ es una sub-variedad fibrada de $\bar{V}_r(\xi)$.

Sean $\xi^n = (E, p, M)$, $\eta^n = (F, p_1, N)$ dos espacios vectoriales fibrados de clase C^∞ y sea

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "p_1"] \\ M \arrow[r, "\phi"] & N \end{tikzcd}$$

Un morfismo de ξ en η dado que Φ y ϕ son difeomorfismos; entonces tenemos un morfismo

$$\begin{tikzcd} E_r \arrow[r, "\Phi_r"] \arrow[d] & F_r \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\phi"] & N \end{tikzcd}$$

E_r espacio total de ξ_r,
F_r espacio total de η_r

donde $\Phi_r(u_1,\ldots,u_r) = (\Phi(u_1),\ldots,\Phi(u_r))$. Es claro que Φ_r es un difeomorfismo, el cual induce un difeomorfismo fibrado entre $V'_r(\xi)$ y $V'_r(\eta)$. Análogamente Φ_{r+1} induce un isomorfismo entre $\bar{V}_r(\xi)$ (resp $X_r(\xi)$) y $\bar{V}_r(\eta)$(resp $X_r(\eta)$).

18) PROPOSICION. $p: X_r(E) \to M$ induce isomorfismos $p_*: \pi_i(X_r(E)) \to \pi_i(M)$ para $2 \leqslant i \leqslant n - r - 1$. Si $n - r > 1$ entonces $p_*: \pi_1(X_r(E)) \to \pi_1(M)$ es un monomorfismo. Se obtiene también un resultado análogo para la variedad fibrada $q: \bar{V}_r(E) \to M$.

DEMOSTRACION. Análoga a (3).

19) COROLARIO. Si M es k-conexa y $0 \leqslant k \leqslant n - r - 1$ entonces $\bar{V}_r(E)$ y $X_r(E)$ son k-conexas.

DEMOSTRACION. Análoga a (4).

20) En lo que sigue supondremos que $\xi^n = (E,p,M^m)$ es un fibrado vectorial C^∞ el cual admite r secciones C^∞ linealmente independientes - $(0 \leqslant r < n)$. Esto equivale a la existencia de una sección C^∞ de la variedad fibrada $V_r^!(E) \to M$. Sea $f: M \to V_r^!(E)$ una tal sección ($f = (f_1,\ldots, f_r)$, siendo $f_1,\ldots, f_r$ r-secciones de ξ linealmente independientes).

En lo siguiente π denotará la proyección de $\bar{V}_r(E)$ en $V_r^!(E)$ dada por $(u_1,\ldots,u_r, u_{r+1}) \to (u_1,\ldots,u_r)$.

21) PROPOSICION. Existe una sección $F: M \to \bar{V}_r(E)$ de la variedad fibrada $\bar{V}_r(\xi)$ con las siguientes propiedades:

21.1) F es transversal a $X_r(M)$

21.2) π o F es homotópica a f.

21.3) Dos secciones F_1, F_2 de $\bar{V}_r(\xi)$ verificando 19.1) y 19.2) son homotópicas.

DEMOSTRACION. Análoga a (6).

22) PROPOSICION. Supongamos que M es $(m - n + r)$-conexa y que -- $2n \geqslant m + 2r + 2$ $(0 \leqslant r < n)$. Dada una carta local. $\psi : U \xrightarrow{\cong} R^m$ de M existe una sección $F: M \to \bar{V}_r(M)$ de $\bar{V}_r(\xi)$ tal que

22.1) F es transversal a $X_r(E)$ y $F^-(X_r(E)) \subset U$

22.2) π o F es homotópica a f.

DEMOSTRACION. Sea $G: M \to \bar{V}_r(E)$ una sección de $\bar{V}_r(\xi)$ satisfaciendo 19.1) y 19.2) y sea $L = G^{-1}(X_r(E))$. Siguiendo la demostración de 7) podemos afirmar que existe una isotopía $\Phi : M \times I \to M$ de M tal que $\Phi(L \times 1) \subsetneq U$. Por el teorema de levantamiento de homotopías podemos asegurar que existe una homotopía $H: E \times I \to E$ con $H_0 = id_E$ y tal que (H_t, Φ_t) es un isomorfismo de fibradas de ξ con sigo mismo($\Phi_t: M \to M$, $H_t: E \to E$ $\Phi_t(x) = \Phi(x,t)$; $H_t(x) = H(x,t)$, $t \in I$). Definimos $G_t: M\ V_r(E)$ ($t \in I$)por $G_t = (H_t)_r \circ G \circ \Phi_t^{-1}$ y el resultado se sigue poniendo $F = G_1$.

23) <u>LA OBSTUCCION</u>. $\chi_r([f],\xi)$. Supongamos que M es $(m-n+r+1)$-conexa y $2n \geqslant m + 2r + 3$. Procediendo como en (8) podemos construir un elemento $\chi_r([f],\xi) \in \pi_m(S^{n-r})$ que depende sólo de la clase de homotopía $[f]$ de f y del fibrado ξ y tal que, si $F: M \to \bar{V}_r(M)$ es una sección de $\bar{V}_r(\xi)$ verificando 20.1) y 20.2), entonces $K = F^{-1}(X_r(E))$ es cobordante a cero en U($U \overset{\psi}{\to} R^m$ carta local de M).

24) <u>LEMA</u>. Sea $G: R^m \to \bar{V}_{n,r}$ una aplicación C^∞ transversal a $X_{n,r}$ y supongamos que $K = G^{-1}(X_{m,r})$ es una subvariedad compacta de $\mathbb{R}^m$ cobordante a cero en $\mathbb{R}^m$. Si $2n \geqslant m + 2r + 3$ entonces existe una homotopía $G_t: \mathbb{R}^m \to \bar{V}_{n,r}$ ($t \in I$) de G y existe $k > 0$ tales que $G_t(x) = G(x)$ si $||x|| \geqslant k$, $t \in I$ y $G_1(\mathbb{R}^m) \cap X_{n,r} = \emptyset$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Análoga a (13).

25) <u>TEOREMA</u>. Sea $\xi^n = (E,p,M^m)$ un fibrado vectorial C^∞ de dimensión n y de base una variedad cerrada M de dimensión m y de clase C^∞. Sea $f: M \to V_r'(E)$ una sección de $V_r'(\xi)$ y supongamos que M es $(m-n+r+1)$-conexa y $2n \geqslant m + 2r + 3$. Si $\chi_r([f],\xi) = 0$ entonces existe una sección $F: M \to V_{r+1}'(E)$ de $V_{r+1}'(\xi)$ tal que $\pi \circ F_1 \sim f$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $U \overset{\psi}{\to} R^m$ una carta local de M tal que $\xi|_U$ es trivializable. Sea $F: M \to \bar{V}_r(E)$ una sección de $\bar{V}_r(\xi)$ verificando 22.1) y 22.2). Pongamos $K = F^{-1}(X_r(E))$; ya que $\chi_r([f],\xi) = 0$, entonces K es cobordante a cero en U. Sea $\phi: p^{-1}(U) \to U \times R^n$ una trivalización de $\xi|_U$. Sea $\alpha: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(x,\upsilon) = (\xi(x)\upsilon)$ y sea $\Phi = \alpha \circ \phi$, tenemos entonces un isomorfismo fibrado.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "P"'] & U \times R^n \arrow[d, "P_1"] \\ U \arrow[r, "\psi"] & U \end{tikzcd} \qquad P_1 = \text{proyección sobre } U$$

el cual induce el siguiente isomorfismo fibrado

$$\begin{tikzcd} \bar{V}_r(E) \supset q^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi_r"] \arrow[d, "q"'] & \bar{V}_r(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^m \times \bar{V}_{n,r} \arrow[d] \arrow[dl, phantom] \\ U \arrow[r, "\psi"] & R^m \end{tikzcd}$$

El resto de la demostración prosigue igual que en (16) ∎

APENDICE

I.) Variedades fibradas diferenciables.

I.1) DEFINICION. Sean Y una variedad C^∞ y G un grupo de Lie. Una acción de G sobre Y es una aplicación diferenciable η: G x Y → Y ($g.y = \eta(g,y)$) verificando las propiedades siguientes:

a) $e.y = y$ ($y \in Y$) siendo $e \in G$ el elemento neutro de G.

b) $(g_1 . g_2).y = g_1.(g_2 . y)$ ($g_1, g_2 \in G$, $y \in Y$)

η puede interpretarse como un homomorfismo de G en el espacio Dif (Y) de los difeomorfismos de Y. Pediremos además que:

c) Si $g.y = y$ para todo $y \in Y$ entonces $g = e$.

Lo que permite identificar G con un sub-grupo de Dif(Y).

I.2) DEFINICION. Una variedad fibrada diferenciable (C^∞) es una quíntupla $\xi = (E,p,X,Y,G)$ donde:

a) E,X,Y son variedades diferenciables.

b) G es un grupo de Lie actuando sobre Y

c) $p: E \to X$ es una aplicación diferenciable y tal que existe una familia $\{(U_i, \Phi_i)\}$ de "cartas locales de ξ" verificando las siguientes propiedades

d) $\{U_i\}$ es un cubrimiento abierto de X.

e) $\Phi_i: U_i \times Y \to p^{-1}(U_i)$ es un difeomorfismo tal que $p\Phi_i(x, y) = x$ ($x \in U_i$, $y \in Y$).

f) $\Phi_{j,x}^{-1} \circ \Phi_{i,x} \in G$ para $x \in U_i \cap U_j$ y la aplicación $U_i \cap U_j \to G$, $x \to \Phi_{j,x}^{-1} \circ \Phi_{i,j}$ es C^∞ ($\Phi_{i,x} : Y \to p^{-1}(x)$ es la aplicación definida por $\Phi_{i,x}(y) = \Phi_i(x,y)$).

TERMINOLOGIA. E se llama espacio total; X espacio base, p la proyección. Y la fibra y G el grupo estructural de la variedad fibrada ξ. Por comodidad diremos la variedad fibrada $p: E \to X$ de fibra Y y grupo G y no haremos alusión al par (Y,G) si estos están sobretendidos. El espacio $E_x = p^{-1}(x)$ será llamado la fibra de ξ sobre $x \in X$.

I.3) Una sección de la variedad fibrada $p: E \to X$ es una aplicación contínua $s: X \to E$ tal que $p \circ s = id_X$ = identidad de X.

Se puede demostrar que si $p: E \to X$ admite una sección contínua s entonces $p: E \to X$ admite una sección C^∞ . Ver [3].

I.4) DEFINICION. Sean $p: E \to X$, $p': E' \to X'$ dos variedades fibradas C^∞ con igual fibra Y y grupo estructural G. Un morfismo entre p y p' es un par de aplicaciones diferenciables $f: X \to X'$, $F: E \to E'$ tales que:

a) $p' \circ F = f \circ p$.

b) La restricción $F_x: E_x \to E'_{x'}$, $(x' = f(x))$ de F es un difeomorfismo.

c) $g_{kj}(x) = \Phi'_{k,x'} \circ F \circ \Phi_{j,x} \in G$ $(x' = f(x))$ es una aplicación C^∞ de $U_j \cap f^{-1}(U'_k) \to G$. (Aqui (U_j, Φ_j) y (U'_k, Φ'_k) son cartas locales $p: E \to X$ y $p': E' \to X'$ respectivamente.

I.5) TEOREMA. (Levantamiento de homotopías) Sean $p: E \to X$, $p': E' \to X'$ variedades fibradas C^∞ con la msima fibra y grupo estructural . Sea (F,f) un morfismo entre p y p'. Sea $f_t: X \to X'$ una homotopía de f $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ f_0 = f)$. Entonces existe una homotopía $F_t: E \to E'$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ de F, tal que (F_t, f_t) es un morfismo entre p y p' para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Para una demostración de I.5) Ver [3].

Con la ayuda de I.5) se puede probar el resultado siguiente:

I.6) TEOREMA. (Sucesión larga de homotopía asociada a una variedad fibrada). Sea $p: E \to X$ una variedad fibrada de fibra Y. Entonces existe una sucesión exacta de homotopía.

$\to \pi_n(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(Y) \to \ldots \to \pi_1(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X)$.

El significado de Δ puede ser visto en [3]. El homomorfismo i_* está inducido por "la inclusión" $Y \hookrightarrow E$ (Ver [3]).

I.7) <u>EJEMPLO</u>. Sean n,k enteros positivos con $1 \leqslant k \leqslant n$.

$V_{n,k}$ denotará el espacio de las k-uplas $(u_1,\ldots,u_k)$ de vectores ortonormales de $\mathbb{R}^n$. $V_{n,k}$ es una variedad C^∞, llamada la variedad de Stiefel de k-referenciales ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Es claro que $V_{n,1} = S^{n-1}$ y que $V_{n,n} = O(n)$ = grupo ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Se tienen variedades fibradas $p: O(n) \to V_{n,k}$ $p(u_1,\ldots,u_k) = (u_1,..,u_k)$ de fibra $O(n-k) \hookrightarrow O(n)$ y de grupo estructural $O(n-k)$.

Considerando el caso $k = 1$ y recordando que $\pi_i(S^n) = 0$ para $i < n$ se deduce por medio de I.6) que $\pi_i(O(n)) \cong \pi_i(O(n-1))$ para $0 \leqslant i < n-1$. Aplicando el teorema I.6) al caso k cualquiera que $\pi_i(V_{n,k}) = 0$ si $0 \leqslant i < n-k$.

I.8) <u>ESPACIOS VECTORIALES FIBRADOS</u>. Un espacio vectorial fibrado C^∞ de dimensión n es una variedad fibrada $p: E \to X$ cuya fibra es $Y = \mathbb{R}^n$ y cuyo grupo estructural es $G = Gl(n)$= grupo lineal de $\mathbb{R}^n$. La definición de morfismos entre fibrados vectoriales se define como en I.4) pidiendo I.4) b que F_x sea lineal. En el teorema de levantamiento de homotopías I.5) las aplicaciones F_t pueden ser tomadas lineales "fibra por fibra".

II) Espacios de aplicaciones diferenciables.

Sean M, V variedades C^∞. Notaremos por $C^\infty(M,V)$ el espacio de las aplicaciones C^∞ de M en V provisto de la topología C^∞. Nos contentaremos aquí con recordar los siguientes resultados.

II.1) $C^\infty(M,V)$ es un espacio localmente contráctil.

II.2) Dif(M) = difeomorfismos de M es un abierto de $C^\infty(M,M)$.

II.3) Si N es una sub-variedad de V entonces el espacio de las aplicaciones C^∞ de M en V transversales a N forman un abierto denso de $C^\infty(M,V)$ (Thom).

Algunos detalles sobre estos resultados pueden ser encontrados en [1] y [4].

B I B L I O G R A F I A

1 Lima E. "Introducão a Topologia Diferencial" I.M.P.A. Rio de Janeiro 1961.

2 Milnor J. "Topology from Differentiable Viewpoint" Princeton University of Virginia 1965.

3 Steenrod N. "Topology of Fiber Bundles" Princeton University Press 1951.

4 Thom R. "Quelques propriêteis globales des Varietés differentiables". Commentarii Math, Helvet 28 1954 pags. 17-86.

5 Wells R. "Modifiyng Intersections". Illinois Journal Math. - Vol. 11 pags. 389 - 403.

AT/gz.-

I N D I C E