NOTAS DE MATEMATICA

Nº 34

GRAFICOS Y VARIEDADES INVARIANTES DE UN HOMEOMORFISMO

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1979

Introduccion

El objeto de estas notas es generalizar a espacios métricos ciertos resultados obtenidos en espacios de Banach para perturbaciones pequeñas de un operador hiperbolico. Para ello se consideran dos espacios metritricos completos X, Y y un homeomorfismo $F''\ X \times Y \longrightarrow X \times Y$ el cual puede pensarse como una perturbacion de otro homeomorfismo F_o el cual "contrae" el espacio X y "dilata" al espacio Y.

Deseo expresar mi agradecimiento a la Sra. Ana Aida de Moreno por el empeño y rapidez puesto en la culminacion de este trabajo.

CONTENIDO

§1)	Variedades Invariantes	1
§2)	Calculo Diferencial	24
§3)	Diferenciabilidad de las Variedades Invariantes	32

GRAFICOS Y VARIEDADES INVARIANTES DE UN HOMEOMORFISMO

INTRODUCCION:

En estas notas consideramos espacios métricos completos X e Y y un homeomorfismo $F: X \times Y \longrightarrow X \times Y$ el cual es una "pequeña perturbación" de un homeomorfismo "hiperbólico" $F_o: X \times Y \longrightarrow X \times Y$. Es decir, $F_o(x,y) = (f_o(x), g_o(y))$ donde f_o, g_o^{-1} sin contracciones. El objetivo de estas notas es estudiar las variedades invariantes (ver |3| ó definición 1.1. abajo) de f a través de gráficos de funciones $\phi: X \to Y$; $\psi : Y \to X$.
Si X, Y son espacios de Banach estudiaremos también la deferenciabilidad de las variedades invariantes (diferenciabilidad de ϕ, ψ) a través de la diferenciabilidad de F.

§1) VARIEDADES INVARIANTES.

1.1. DEFINICION

Sea P un espacio topológico y $h: P \to P$ una aplicación con tinua. La variedad estable de h se define como el conjunto $W^s(h)$ formado por aquellos puntos $p \in P$ tales que la sucesión $\{h^n(p)\}$ $(n \geq o)$ es convergente. Si h es un homeomorfismo entonces la variedad inestable de h es el conjunto $W^u(h) = W^s(h^{-1})$. Los conjuntos $W^s(h)$, $W^u(h)$ (los cuales son, evidentemente, invariantes por h) son llamados las variedades invariantes de h.

1.2. NOTACIONES Y DEFINICIONES

Sean (P,d) , (Q,d) espacios métricos, recordamos que una aplicación $h: P \to Q$ se dice Lipschitz si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$d(h(x_1),h(x_2)) \leq Md(x_1,x_2) \quad (x_1,x_2 \in P) \qquad (1)$$

denotaremos por $Lip(P, Q)$ al conjunto de aplicaciones Lipschitz de P en Q. Si $h \in Lip(P, Q)$ entonces $lip(h)$ denotará la más pequeña constante M verificando (1). La constante $lip(h)$ también está caracterizada por

$$lip(h) = \sup \left\{ \frac{d(h(x_1), h(x_2))}{d(x_1, x_2)} : x_1,x_2 \in P;\ x_1 \neq x_2 \right\}$$

Si $h \in lip(P, Q)$ y $lip(h) < 1$ se dice que h es una contracción. Si $h \in lip(P, P)$ es una contracción y P es completo entonces h posee un único punto fijo (Teorema del punto fijo de Banach; ver |4|)

1.3. NOTACIONES E HIPOTESIS

En lo que sigue X, Y demostrarán dos espacios métricos completos cuyas métricas serán denotadas por la misma letra d; $F: X \times Y \longrightarrow X \times Y$, $F(x, y) = (f(x, y), g_x(y)) = (f(x, y), g(x, y))$ denotará una aplicación continua y a, k, ε denotarán constantes no negativas (de hecho $a>o$, $k > o$, $\varepsilon \geq o$).

Supondremos además que las siguientes hipótesis son verificadas

a) $d(f(x , y), \; f(x^1, y^1)) \leq Kd(x , x^1) + \varepsilon d(y , y^1)$

b) $d(g(x, y) , \; g(x^1, y)) \leq \varepsilon d(x, x^1)$

c) g_x: $Y \rightarrow Y$ es biyectiva $(x \varepsilon X)$ y

$$d(g_x^{-1} y, g_x^{-1} y^1) \leq a\, d(y, y^1) \quad (\operatorname{lip}(g_x^{-1}) \leq a, \; x \varepsilon X)$$

Obsérvese que cuando $\varepsilon = o$, F es de la forma $F(x, y) = (f(x), g(y))$. Así para $\varepsilon > o$ "pequeño" podemos pensar que F es una pequeña perturbación de una aplicación F_o de la forma $F_o(x, y) = (f_o(x), g_o(y))$ tal que $d(f_o(x), f_o(x^1)) \leq K_o\, d(x , x^1)$; g_o es biyectiva y

$d(g_o^{-1}\, y,\ g_o^{-1}\, y^1) \leq a_o\, d\,(y,\ y^1)$. (En particular F_o es "hiperbólico" si $K_o < 1$ y $a_o < 1$)

1.4. NOTA

De las condiciones (b) y (c) de 1.3. se deduce que

$d(g_x^{-1}\, y,\ g_{x'}^{-1}\, y) \leq a\, \varepsilon\, d(x,\ x')$ $(x,\ x' \in X,\ y \in Y)$.

1.5. TEOREMA

a) Sea $(x_o\ ,\ y_o)$ un punto fijo de F; si $a(k + 2\,\varepsilon) < 1$ entonces existe una única aplicación $\phi \in \mathrm{Lip}(X\ ,\ Y)$ tal que $\phi\,(x_o) = y_o$, $\mathrm{lip}(\phi) \leq 1$ y $g(x,\ \phi\,(x)) = \phi\ f(x,\ \phi\,(x))$ $(x \in X)$

b) Si $K + \varepsilon < 1$; $W^s(F) \supseteq \{(x,\ \phi\,(x)):\ x \in X\} =$ gráfico de ϕ

c) Si $K + \varepsilon < 1$ y $a + a\,\varepsilon < 1$ entonces

$W^s(F) = \{p \in X \times Y\ ;\ \{F^n(p)\}$ posee una subsucesión convergente $\} =$ gráfico de ϕ.

DEMOSTRACION

a) Sea L el conjunto de aquellas $\phi \in \mathrm{Lip}(X\ ,\ Y)$ tales que $\phi\,(x_o) = y_o$ y $\mathrm{lip}(\phi) \leq 1$. Dadas ϕ_1 , $\phi_2 \in L$ se tiene

$d(\phi_1(x) \ , \ \phi_2(x)) \leq d(\phi_1(x) \ , \ \phi_1(x_o)) \ + d(\phi_2(x_o) \ ,$

$, \ \phi_2(x)) \leq \ 2 \ d(x \ , \ x_o)$, de aquí

$$\rho(\phi_1, \ \phi_2) \ = \sup \ \{ \frac{d(\phi_1(x), \ \phi_2(x))}{d(x \ , \ x_o)} : x \in X, \ x \neq 0\} \ (1)$$

está bien definido (ϕ_1, ϕ_2, ε L) ; además es fácil verificar que ρ: L x L $\to$ [0, ∞) definida por (1) es una métrica en L.

AFIRMACION

(L,ρ) es completo. En efecto: sea $\{\phi_n\}$ una sucesión de Cauchy en (L,ρ) y sea $\varepsilon > 0$ dado, entonces existe $n_o \geq 1$ tal que $d(\phi_m(x), \ \phi_n(x)) \leq \varepsilon \ d(x, \ x_o)$ $(n \geq n_o, \ m \geq n_o)$. De aquí $\{\phi_n(x)\}$ es de Cauchy en Y para cada $x \in X$ y en consecuencia existe una aplicación $\phi : X \to Y$ tal que $\phi_n(x) \to \phi(x)$ $(n \to \infty)$ para $x \in X$. En particular

$d(\phi(x) \ , \ \phi_n(x)) \leq \varepsilon \ d(x, \ x_o)$ si $n \geq n_o$ y $d(\phi(x), \ \phi(x')) \leq$

$\leq \ d(\phi(x), \ \phi_n(x)) + d(\phi_n(x), \ \phi_n(x')) + d(\phi_n(x'), \ \phi(x')) \leq$

$\leq \ 2 \ \varepsilon \ d(x \ , \ x_o) + d(x \ , \ x') \ \ (n \geq n_o)$ y la prueba

de la afirmación se sigue rápidamente.

Dada una función $\phi : X \to Y$ definamos $S(\phi): X \to Y$ mediante

$$S(\phi)\, x = g_x^{-1}\, \phi\, f(x\, , \phi(x)) \quad (x \in X) \qquad (2)$$

De la nota 1.4. (y aplicando convenientemente la desigualdad triangular) se deduce que

$$d(S(\phi)x, S(\phi)x') \leq a(k + 2\, \varepsilon)\; d(x, x')$$

si $\phi \in L$. En consecuencia la fórmula (2) define una aplicación $S: L \to L$ y la prueba de (a) quedará terminada si mostramos que S es una contracción. Dadas $\phi_1, \phi_2 \in L$ se tiene

$$d(S(\phi_1)x, S(\phi_2)x) \leq a\, d(\phi_1 f(x, \phi_1(x)), \phi_2 f(x, \phi_2(x)) \leq$$

$$\leq a\, d(\phi_1 f(x, \phi_1(x)), \phi_2 f(x, \phi_1(x))) + a\, d\, (\phi_2 f(x, \phi_1(x)),$$

$$\phi_2 f(x, \phi_2(x)) \leq a\, \rho(\phi_1, \phi_2)\; d(f(x, \phi_1(x'), x_o) +$$

$$+ a\, d\, (f(x, \phi_1(x)), \; f(x, \phi_2(x)) \leq a\, \rho(\phi_1, \phi_2)\; d\, (f(x, \phi_1(x)),$$

$$, f(x_o, \phi_1(x_o)) + a\, \varepsilon\, d(\phi_1(x), \phi_2(x))$$

$$\leq a\, \rho(\phi_1, \phi_2)\, \left[k\, d\, (x, x_o) + \varepsilon\, d(\phi_1(x), \phi_1(x_o))\, \right] +$$

$+ a \varepsilon \rho (\phi_1, \phi_2) d(x , x_o) \leq a(k + 2\varepsilon)\rho(\phi_1,\phi_2) d(x, x_o)$

Es decir; $\rho(S(\phi_1), S(\phi_2)) \leq a(k + 2\varepsilon) \rho(\phi_1, \phi_2)$ lo cual prueba que S es una contracción y termina la demostración de(a).

(b) Sea $\overline{\phi}: X \longrightarrow X \times Y$ el gráfico de ϕ ; es decir, $\overline{\phi}(x) = (x, \phi(x))$ y sea $u: X \longrightarrow X$ la compuesta $u= f \circ \overline{\phi}$, entonces u es Lipschitz y $\text{lip}(u) \leq k + \varepsilon$; o sea que u es una contracción. Por otra parte $g \circ \overline{\phi} = \phi f \overline{\phi} = \phi \circ u$ y de aquí $F \circ \overline{\phi} = \overline{\phi} \circ u$. Utilizando inducción se concluye que $F^n \circ \overline{\phi} = \overline{\phi} \circ u^n$; pero $\{u^n(x)\}$ converge al único punto fijo de u $(x \in X)$ la cual da fin a la prueba de (b).

(c) De acuerdo a la parte (b) y a la definición de $W^s(F)$ (1.1.) bastará mostrar que si $p \in X \times Y$ y $\{F^n(p)\}$ posee una subsucesión acotada entonces $p = \overline{\phi}(x)$ para algún $x \in X$. Para ello sea $(x, y) \in X \times Y$ y pongamos $(x_1, y_1) = F(x , y)$; ya que $d(y, \phi(x)) = d(g_x^{-1} g_x y, g_x^{-1} g_x \phi(x)) \leq$

$\leq a\, d(g_x y , g_x \phi(x)) = a\, d(y_1, \phi f(x, \phi(x)) \leq$

$\leq a\, d(y_1, \phi(x_1)) + a\, d(\phi (x_1) , \phi f(x , \phi(x')) \leq$

$\leq a\, d(y_1 , \phi(x_1)) + a\, d(x_1 , f(x, \phi(x')) =$

$= a\, d(y_1 , \phi(x_1)) + a\, d(f(x , y) , f(x , \phi(x')) \leq$

$\leq a\, d(y_1 , \phi(x_1)) + a\,\varepsilon\, d(y, \phi(x))$

Es decir,

$$d(y , \phi(x)) \leq \frac{a}{1-a\varepsilon} d(y_1 , \phi(x_1)) \qquad (3)$$

Sea $p = (x_1 , y_1) \varepsilon X \times Y$ y pongamos $x_{n+1} = f(x_n , y_n)$ $y_{n+1} =$

$= g(x_n , y_n)$ (Esto es; $(X_{n+1} , Y_{n+1}) = F^n(x_1 , y_1)$.

Entonces aplicando (3) e inducción se concluye que:

$$d(y_1 , \phi(x_1)) \leq \left(\frac{a}{1-a\varepsilon}\right)^n d(y_{n+1}, \phi(x_{n+1}))$$

Ya que $\frac{a}{1-a\varepsilon} < 1$, $\left(\frac{a}{1-a\varepsilon}\right)^n \longrightarrow o$ $(n \to \infty)$ y si $\{F^n(p)\}$

posee una subsucesión acotada se concluye que $d(y_1 ,\phi(x_1))=0$;

o sea $y_1 = \phi(x_1)$ $(p = \bar{\phi}(x_1))$. Esto termina la prueba de

(c). y del teorema 1.5.

Nuestro próximo objetivo es obtener un resultado análogo al teorema 1.5. para la variedad inestable. Sin embargo éste caso es más complicado que el de la variedad estable y por razones de exposición probaremos previamente dos resultados intermedios. En lo que sigue usaremos la siguiente notación:

Dada una función $\Psi: Y \longrightarrow X$, $\overline{\Psi}: Y \longrightarrow X \times Y$ denotará la aplicación $\overline{\Psi}(y) = (\Psi(y), y)$.

1.6. PROPOSICION

Supongamos que F es un homeomorfismo y sea A el conjunto de aquellos $p \in X \times Y$ tales que $\{F^{-n}(p)\}$ posee una subsucesión acotada. Supongamos además que $K + \varepsilon < 1$ y $a + a\varepsilon < 1$; si (x, y), $(x', y) \in A$ entonces $x = x'$.

DEMOSTRACION

Sean $\pi_1: X \times Y \longrightarrow X$, $\pi_2: X \times Y \longrightarrow Y$ las proyecciones naturales y sean $p, p' \in X \times Y$

AFIRMACION 1

Si $d(\pi_1(p), \pi_1(p')) \leq d(\pi_2(p), \pi_2(p'))$ entonces

$$d(\pi_1 F^m(p), \pi_1 F^m(p')) \leq d(\pi_2 F^m(p), \pi_2 F^m(p')) \quad (m = 1,2,\ldots)$$

En efecto, pongamos $p = (x, y)$, $p' = (x', y')$. De la desigualdad:

$$d(g(x,y), g(x, y')) \leq d(g(p), g(p')) + d(g(x',y'), g(x,y'))$$

se obtiene

$$d(g(p),\ g(p')) \geq \frac{1}{a}\ d(y,\ y') - \varepsilon\ d(x,\ x') \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{a} - \varepsilon\right) d(y\ ,\ y') \geq (k + \varepsilon)\ d(y\ ,\ y') \geq$$

$$\geq d(f(p)\ ,\ f(p'))$$

Es decir; $d(\pi_1\ F(p),\ \pi_1\ F(p')) \leq d(\pi_2 F(p), \pi_2 F(p'))$ y afirmación 1 se sigue por inducción (en $m \geq 1$).

AFIRMACION 2

Sea $m \geq 1$ un entero; si $d(\pi_2 F^i(p),\ \pi_2 F^i(p')) \leq$

$\leq d(\pi_1 F^i(p),\ \pi_1 F^i(p'))$, $o \leq i \leq m-1$, entonces

$$d(\pi_1 F^m(p),\ \pi_1 F^m(p') \leq (K + \varepsilon)^m\ d(\pi_1(p),\ \pi_2(p'))$$

En efecto; $d(f(x,y),\ f(x',y')) \leq Kd(x,\ x') + \varepsilon d(y,y') \leq$

$\leq (K + \varepsilon)\ d(x\ ,\ x')$ si $d(y,\ y') \leq d(x,\ x')$.

Es decir, $d(\pi_1 F(p),\ \pi, F(p')) \leq (K + \varepsilon) d(\pi_1(p),\ \pi_1(p'))$

si $d(\pi_2(p), \pi_2(p')) \leq d(\pi_1(p), \pi_1(p'))$. La afirmación se sigue ahora por inducción.

Supongamos ahora que $\{F^{-n}(p)\}$ y $\{F^{-n}(p')\}$ poseen subsucesiones acotadas y que $y = y'$ ($p= (x , y)$, $p'= (x', y')$, $y=y'$).

Pongamos $I= \{(j , n) : 1 \leq j \leq n;\ j, n \text{ enteros}\}$ y consideremos los dos casos siguientes:

CASO 1 Existe $(j,n) \in I$ tal que

$$d(\pi_1 F^{j-n}(p), \pi_1 F^{j-n}(p')) \leq d(\pi_2 F^{j-n}(p), \pi_2 F^{j-n}(p'))$$

De la afirmación 1 se sigue que

$$d(\pi_1 F^{m+j-n}(p), \pi_1 F^{m+j-n}(p') \leq d(\pi_2 F^{m+j-n}(p), \pi_2 F^{m+j-n}(p'))$$

cualquiera sea $m \geq o$: en particular tomando $m= n-j$ se obtiene $d(\pi_1(p), \pi_1(p') \leq d(\pi_2(p), \pi_2(p')= d(y,y') = 0$ lo cual prueba que $x = x'$.

CASO 2 $d(\pi_2 F^{j-n}(p), \pi_2 F^{j-n}(p')) < d(\pi_1 F^{j-n}(p), \pi_1 F^{j-n}(p'))$

cualquiera sea $(j, n) \in I$. En este caso aplicamos la afirmación 2 a los puntos $F^{-n}(p)$, $F^{-n}(p')$ con $m=n$ para concluir que:

$$d(\pi_1 F^m F^{-n}(p),\ \pi_1 F^m F^{-n}(p')) \leq (K + \varepsilon)^m\ d(\pi_1 F^{-n}(p),\ \pi_1\ F^{-n}(p'))$$

o sea

$$d(\pi_1(p),\ \pi_1(p') \leq (K + \varepsilon)^n\ d(\pi_1 F^{-n}(p),\ \pi_1 F^{-n}(p'))$$

Ya que ésta última desigualdad vale para cada $n \geq 1$ y $(K + \varepsilon)^n \to 0$

$(n \to \infty)$ $(K + \varepsilon < 1)$ entonces $d(\pi_1(p),\ \pi_1(p')) = 0$

porque $\{F^{-n}(p)\}$ y $\{F^{-n}(p')\}$ poseen subsucesiones acotadas. Esto termina la demostración.

1.7. PROPOSICION

Sea $\Psi \in \mathrm{Lip}(Y, X)$ con $\mathrm{lip}(\Psi) \leq 1$.

Si $a\,\varepsilon < 1$ entonces $g \circ \overline{\Psi} : Y \longrightarrow Y$ es biyectiva ,

$(g \circ \overline{\Psi})^{-1}$ es Lipschitz y $\mathrm{lip}((g \circ \overline{\Psi})^{-1}) \leq \dfrac{a}{1 - a\varepsilon}$

DEMOSTRACION

Fijemos $z \in Y$ y notemos que la ecuación (en y)

$g\,\overline{\Psi}\,(y) = z$ (1)

equivale a la ecuación

$$y = g_{\Psi(y)}^{-1}(z) \qquad (2)$$

Para cada $z \in Y$ definamos $K_z : Y \longrightarrow Y$ mediante $K_z(y) = g_{\Psi(y)}^{-1}(z)$; de manera que (1) equivale a $K_z(y) = y$.

Utilizando la nota 1.4. obtenemos $d(K_z(y), K_z(y') \leq$

$\leq a\,\varepsilon\, d(\Psi(y), \Psi(y')) \leq a\,\varepsilon\, d(y, y')$, lo cual dice que K_z es una contracción. En consecuencia $g \circ \overline{\Psi}$ es una biyección cuya inversa $u: Y \longrightarrow Y$ viene dada por $u(z)=$ único punto fijo de k_z. Para terminar

$d(u(z), u(z')) = d(K_z(u(z)), K_{z'}(u(z')) \leq$

$d(g_{\Psi u(z)}^{-1} z, g_{\Psi(u(z')}^{-1} z) + d(g_{\Psi(u(z'))}^{-1} z, g_{\Psi u(z')}^{-1} z') \leq$

$\leq a\,\varepsilon\, d(\Psi(u(z)), \Psi u(z')) + a\, d(z, z') \leq a\,\varepsilon\, d(u(z), u(z') +$

$+ a\, d(z, z')$

Es decir ;

$$d(u(z), u(z')) \leq \frac{a}{1-a\varepsilon}\, d(z, z')$$

lo cual termina la demostración.

1.8. **TEOREMA**

a) Sea (x_o, y_o) un punto fijo de F: si $a(K + 2\varepsilon) < 1$ entonces existe una única aplicación $\Psi \in Lip(Y,X)$ tal que $\Psi(y_o) = x_o$, $lip(\Psi) \leq 1$ y $f \circ \overline{\Psi} = \Psi \circ g \circ \overline{\Psi}$

b) Si F es un homeomorfismo y $a + a\varepsilon < 1$ entonces $W^u(F) \supseteq \{(\Psi(y), y) : y \in Y\} =$ gráfico de Ψ.

c) Si además $K + \varepsilon < 1$ entonces

$W^u(F) = \{p \in X \times Y : \{F^{-n}(p)\}$ posee una subsucesión acotada$\}$ = gráfico de Ψ .

DEMOSTRACION

a) Sea L el conjunto formado por aquellas $\Psi \in Lip(Y,X)$ tales que $lip(\Psi) \leq 1$ y $\Psi(y_o) = x_o$. En L consideramos la métrica.

$$\rho(\Psi_1, \Psi_2) = \sup \left\{ \frac{d(\Psi_1(y), \Psi_2(y))}{d(y, y_o)} : y \in Y, y \neq y_o \right\}$$

y procedemos como en 1.5. para probar que (L,ρ)

es completo.

Sea C el conjunto de aquellas $u \in Lip(Y, Y)$ tales que $u(y_o) = y_o$ y $lip(u) \leq \frac{a}{1-a\varepsilon}$ y sea $M: L \longrightarrow C$ definida por $M(\Psi) = (g \circ \overline{\Psi})^{-1}$. (Nótese que M está bien definida a causa de la proposición 1.7. , pues $1-a\varepsilon > a(K+\varepsilon) \geq 0$) , finalmente definamos $S: L \longrightarrow L$, por $S(\Psi) = f \circ \overline{\Psi} \circ M(\Psi)$ (Nótese que $f \circ \overline{\Psi} \in Lip(Y, X)$ y $lip(f \circ \overline{\Psi}) \leq K + \varepsilon$; de aquí

$$lip(S(\Psi)) \leq lip(f \circ \overline{\Psi})\, lip(M(\Psi)) \leq \frac{a(K+\varepsilon)}{1-a\varepsilon} < 1$$

y en consecuencia S está bien definida). Para terminar la prueba de (a) bastará mostrar que S es una contracción y para ello necesitamos algunas desigualdades intermedias.

Si $\Psi \in L$ entonces

$$d(M(\Psi)\,y\,,\,y_o) = d(M(\Psi)y,\,M(\Psi)y_o) \leq lip(M(\Psi))\,d(y,\,y_o) \leq$$

$$\leq \frac{a}{1-a\varepsilon}\,d\,(y\,,\,y_o) \qquad (1)$$

Además $M(\Psi)\,y = (g_{\Psi o M(\Psi)y})^{-1}\,y$ y si Ψ_1 , $\Psi_2 \in L$

entonces, aplicando la nota 1.4. queda

$$d(M(\Psi_1)y\ ,\ M(\Psi_2)y) \leq\ a\ \varepsilon\ d(\Psi_1 M(\Psi_1)y\ ,\ \Psi_2 M(\Psi_2)y) \leq$$

$$\leq a\ \varepsilon\ d(\Psi_1\ M(\Psi_1)y\ ,\ \Psi_2\ M(\Psi_1)y\ ) + a\ \varepsilon\ d\ (\Psi_2 M(\Psi_1)y\ ,$$

$$,\ \ \Psi_2\ M(\Psi_2)y) \leq\ a\ \varepsilon\ \rho(\Psi_1\ ,\ \Psi_2)\ d\ (M(\Psi_1)y\ ,\ y_o) +$$

$$+\ \ a\ \varepsilon\ d(M(\Psi_1)y\ ,\ \ M(\Psi_2)y\ )\ .$$

O sea

$$d(M(\Psi_1)y\ ,\ M(\Psi_2)y \leq \frac{a\ \varepsilon}{1-\ a\varepsilon}\ \rho(\Psi_1,\ \Psi_2)\ d(M(\Psi_1)y\ ,\ y_o) \leq$$

$$\leq \frac{a\ \ \varepsilon}{1-\ a\varepsilon}\ .\ \frac{a}{1-\ a\varepsilon}\ \rho(\Psi_1\ ,\ \Psi_2)\ d(y,\ y_o)\ =$$

$$=\ \ \varepsilon\ \left(\frac{a}{1-\ a\varepsilon}\right)^2\ \ d(y\ ,\ y_o) \qquad (2)$$

Por otra parte (si, Ψ_1, Ψ_2 ε L) se tiene

$$d(S(\Psi_1)y,\ S(\Psi_2)y) \leq\ d(\Psi_1\ M(\Psi_1)y\ ,\ \Psi_2\ M(\Psi_2)y)\ \ +$$

$$+\ \ \varepsilon\ d(M(\Psi_1)y,\ \ M(\Psi_2)y\ ) \leq\ K\ \rho(\Psi_1,\Psi_2)\ d(M(\Psi_1)\ y,\ y_o) +$$

$$+\ \ (K + \varepsilon)\ d\ (M(\Psi_1)y\ ,\ \ M(\Psi_2)\ y\ )$$

utilizando (1) y (2) se concluye que

$$\rho(S(\Psi_1), S(\Psi_2)) \leq \frac{aK + a^2 \varepsilon^2}{(1 - a\varepsilon)^2} \rho(\Psi_1, \Psi_2)$$

en consecuencia S es una contracción (porque

$\dfrac{aK + a^2 \varepsilon^2}{(1 - a\varepsilon)^2} < 1$ equivale a $a(K + 2\varepsilon) < 1$)

y termina la prueba de (a).

b) Sabemos que $u = (g \circ \overline{\Psi})^{-1}$ es una contracción

$(a + a\varepsilon < 1)$ y $f \circ \overline{\Psi} = \Psi \circ (g \, \overline{\Psi})$. De aquí

$F \circ \overline{\Psi} = \overline{\Psi} \circ (g \circ \overline{\Psi})$, lo cual equivale a

$F^{-1} \circ \overline{\Psi} = \overline{\Psi} \circ u$ y utilizando inducción $F^{-n} \, \overline{\Psi} =$

$= \overline{\Psi} \circ u^n$ $(n \geq 1)$ lo cual termina la demostración

de (b).

c) Sea $A = \{p \in X \times Y : \{F^{-n}(p)\}$ posee una subsucesión

acotada$\}$ entonces gráfico de $\Psi \subseteq W^u(F) \subseteq A$. Pero

de 1.6. se sigue que si $(x, y) \in A$ entonces $x = \Psi(y)$

(porque $(\Psi(y), y) \in A$) ; de aquí $A \subseteq$ gráfico de

Ψ lo cual da fin a la demostración.

Terminamos esta sección sumarizando los resultados obtenidos en 1.5. y 1.8. y dando una aplicación de los mismos a un resultado "concreto" .

1.9. **TEOREMA**

Sean X , Y espacios métricos completos y sea $F: X \times Y \to X \times Y$; $F(x , y) = (f(x , y) , g(x , y)) = (f(x , y) , g_x(y))$ un homeomorfismo. Supongamos que existen constantes $a, K, \varepsilon \in R$; $a > o$, $K > o$, $\varepsilon \geq o$ y que se verifican las siguientes hipótesis.

a) $d(f(x , y) , f(x^1 , y^1) \leq K d(x , x^1) + \varepsilon d(y , y^1)$

b) $d(g(x, y) , g(x^1 , y)) \leq \varepsilon d(x , x^1)$

c) $g_x : Y \to Y$ es biyectiva para cada $x \varepsilon X$

d) g_x^{-1} es Lipschitz y $lip(g_x^{-1}) \leq a \; (x \varepsilon X)$

e) $K + \varepsilon < 1$, $a + a \varepsilon < 1$

Entonces:

i) $W^s(F) = \{p \varepsilon X \times Y : \{F^n(p)\}$ posee una subsucesión acotada $\}$

$W^u(F) = \{p \varepsilon X \times Y : \{F^{-n}(p)\}$ posee una subsucesión acotada$\}$

ii) La restricción de F (resp. F^{-1}) a $W^s(F)$ (resp. $W^u(F)$) es una contracción.

iii) Existen funciones $\phi \varepsilon Lip(X , Y)$, $\Psi \varepsilon Lip(Y , X)$ tales que $lip(\phi) \leq 1$, $lip(\Psi) \leq 1$, $W^u(F)$ = gráfico de Ψ, $W^s(F)$ = gráfico de ϕ .

DEMOSTRACION

Notemos enseguida que la condición (e) implica $a(K + 2\varepsilon) < 1$ $[\, a(k + \varepsilon) < a < 1 - a\varepsilon \,]$. y el resultado se seguirá de 1.5. y 1.8. si probamos que F posee un único punto fijo.

Ya que g_x^{-1} es una contracción, se tiene una aplicación bien definida $u : X \to Y$ mediante $u(x)$ = único punto fijo de g_x^{-1} . Es decir, $u(x) = g_x^{-1} u(x)$; de aquí

$d(u(x), u(x^1)) \leq d(g_x^{-1} u(x), g_x^{-1}(u(x^1))) + d(g_x^{-1}u(x^1))$,

$, \quad y^{-1}_{x^1}\, u(x^1)) \leq a\, d(u(x)\ , u(x^1)) + a\, \varepsilon\, d(x\ , x^1)$

o sea

$$d(u(x), u(x^1)) \leq \frac{a\,\varepsilon}{1 - a}\, d(x\ , x^1) \qquad (1)$$

Sea $v : X \to X$ definida por $v(x) = f(x\ , u(x\ ))$, entonces $d(v(x), v(x^1)) \leq K\, d(x\ , x^1) + \varepsilon\, d(u(x), u(x^1) \leq$

$\leq \left[K + \frac{a\,\varepsilon^2}{1 - a} \right] d(x\ , x^1)$; pero $\varepsilon < \frac{1 - a}{a}$, $\varepsilon < 1 - K$

y en consecuencia $\varepsilon^2 < \frac{(1 - a)}{a}(1 - k)$ o sea que

$k + \frac{a\,\varepsilon^2}{1 - a} < 1$. Así v es una contracción y si x_o es el único punto de v estonces $(x_o\ , u(x_o))$ es el único punto fijo de F, dando fin a la demostración.

1.10 **PROPOSICION**

Sean X , Y espacios de Banach y sea $F_o : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ un homeomorfismo Lipschitz de la forma $F_o(x\ , y) = (f_o(x), g_o(y))$ donde $f_o : X \to X$, $g_o^{-1} : Y \to Y$ son contracciones.

Pongamos $a_o = \max \{ lip(f_o)\ , lip(g_o^{-1}) \}$ y supongamos que

F_o^{-1} es Lipschitz. Sea $\varepsilon \in R$,

$$o < \varepsilon < \max \left\{ \left[\operatorname{lip}(F_o^{-1}) \right]^{-1}, \frac{1 - a_o}{1 + a_o} \right\};$$

si $\Phi : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ es lipschitz y $\operatorname{lip}(\Phi) \leq \varepsilon$ entonces $f = f_o + \Phi$ es un homeomorfismo el cual verifica las hipótesis de 1.9.

DEMOSTRACION

Para cada $q \in X \times Y$ se tiene que la ecuación (en p)

$$F_o(p) + \Phi(p) = q \quad (F(p) = q) \qquad (1)$$

equivale a la ecuación

$$p = F_o^{-1}(q - \Phi(p)) \qquad (2)$$

Para cada $q \in X \times Y$ definimos $Kq : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ mediante $Kq(p) = F_o^{-1}(q - \Phi(p))$ y procedemos como en la prueba de 1.7. para mostrar que F es biyectiva y que F^{-1} es Lipschitz (En particular F es un homeomorfismo).

Por otra parte, escribamos $\Phi(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$

entonces $d(\alpha(x, y), \alpha(x', y')) \leq \varepsilon d(x, y') + \varepsilon d(y, y')$

$d(\beta(x, y), \beta(x', y')) \leq \varepsilon d(x, x') + \varepsilon d(y, y')$.

(La norma en $X \times Y$ es la norma producto $||(x, y)|| =$

$= \max \{||x||, ||y||\}$).

Si ponemos $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ entonces

$f(x, y) = f_o(x) + \alpha(x, y)$ y de aquí

$d(f(x, y), f(x', y')) \leq kd(x, x') + \varepsilon d(x, x')$ con

$K = a_o + \varepsilon$

$$(a_o + \varepsilon < a_o + \frac{1 - a_o}{1 + a_o} = \frac{1 + a_o^2}{1 + a_o} < 1 \text{ porque } a_o < 1)$$

Por otra parte $g(x, y) = g_x(y) = g_o(y) + \beta_x(y) = g_o(y) +$

$+ \beta(x, y)$

Para ver que g_x es biyectiva basta observar que la ecuación $g_x(y) = Z$ equivale a $y = g_o^{-1}(Z - \beta_x(y))$

y proceder como en 1.7. para mostrar que g_x^{-1} es

Lipschitz y $\mathrm{lip}\,(g_x^{-1}) \leq \dfrac{a_o}{1 - a_o\,\varepsilon} = a$

$\left(a = \dfrac{a_o}{1 - a_o\varepsilon} < a_o \dfrac{1 + a_o^2}{1 + a_o} < a_o < 1\right)$. Para terminar

basta observar que $d(g(x\ ,\ y)\ ,\ g(x'\ ,\ y)) =$

$$= d(\beta(x\ ,\ y)\ ,\ \beta(x'\ ,\ y)) \leq \varepsilon\ d(x\ ,\ x')$$

y que $a + \varepsilon\ a = \dfrac{a_o}{1 - a_o\varepsilon}(1 + \varepsilon) < \dfrac{a_o}{1 - a_o\varepsilon}\left(1 + \dfrac{1 - a_o}{1 + a_o}\right) =$

$$= 2\ \frac{a_o}{1 - a_o\varepsilon}\ \frac{1}{1 + a_o} < 2\ a_o\ \frac{1 + a_o^2}{(1 + a_o)^2} < 1\ .$$

(porque $a_o < 1$)

Esto termina la prueba de 1.10.

§2) CALCULO DIFERENCIAL

El objeto de esta sección es de introducir las notaciones necesarias, a fin de estudiar la diferenciabilidad en las aplicaciones $\phi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow X$ dadas por los teoremas 1.5. y 1.8 (X , Y espacios de Banach). La prueba de un teorema de invertibilidad global será también útil en las secciones venideras.

2.1. NOTACIONES Y DEFINICIONES

La norma de cualquier espacio de Banach será denotada con el símbolo $|| \ ||$, Si E , F son espacios de Banach entonces $L(E, F)$ denotará el espacio (de Banach) de aplicaciones lineales continuas $L : E \longrightarrow F$ provisto de la norma

$$|| L || = \sup\{||L(x)|| : X \in E, ||x|| \leq 1\}$$

Si L $L(E, F)$ y $x \in E$, usaremos frecuentemente la notación Lx en vez de $L(x)$. Un elemento $L \in L(E , F)$ se dirá <u>invertible</u> si L es biyectiva y si $L^{-1} \in L(E, F)$ (El segundo hecho es consecuencia del primero. "Teorema de la aplicación abierta" Ver | 1 |) .

Sean $U \subset E$, $V \subset F$ conjuntos no vacíos con U abierto.

Diremos que una aplicación $f: U \to V$ es diferenciable en el punto $x_o \in U$ si existe un $L \in L(E, F)$ tal que

$$\lim_{||h|| \to o} \frac{1}{||h||} \left[f(x_o + h) - f(x_o) - Lh \right] = 0$$

en este caso L es única y se le denota por $f'(x_o)$.

Además $f'(x_o)$ es llamada la diferencial (de Fréchet) de f en x_o.

Si f es diferenciable en todo punto $x \in U$ entonces se tiene una aplicación $f' : U \to L(E, F)$; $x \to f'(x)$; y se dice que f es de clase c^1 si f' es continua.

Mas generalmente; sea $m \geq 1$ un entero se dice que f es de clase c^m (denotado $f \in c^m$) si f' es de clase c^{m-1}. f' se llama la diferencial de orden 1 de f; la diferencial de orden m de f (si $f \in c^m$) se define inductivamente mediante $f^{(m)} = (f^{(m-1)})'$; conviniendo que $f^{(o)} = f$.

Para más detalles al respecto ver | 2 |

2.2. DERIVADAS PARCIALES

Sean E, F, G espacios de Banach, $W \subset E \times F$ un abierto no vacío y $f: W \to G$ una aplicación. Dado $(x_o , y_o) \in W$ entonces el conjunto $U = \{ x \in E : (x , y_o) \in W \}$ es abierto y se tiene una aplicación $f_{y_o} : U \to G$ definida mediante $f_{y_o}(x) = f(x , y_o)$. Si f_{y_o} es diferenciable en x_o se dice que f admite derivada parcial respecto a la primera variable y se utiliza la notación $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o\ y_o) = (f_{y_o})'(x_o)$.

La "derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o , y_o)$" se define de manera análoga y se tiene la siguiente relación: si f es diferenciable en (x_o , y_o) entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o , y_o)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o , y_o)$ existen y

$$f'(x_o , y_o)(h , k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o , y_o)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o , y_o)\, k .$$

para más detalles ver | 2 |

En lo que sigue E , F denotarán dos espacios de

Banach $U \subset E$ será un abierto no vacío y $f : U \to F$ una aplicación.

2.3. PROPOSICION

Supongamos que f es Lipschitz. Si f es diferenciable en $x_o \in U$ entonces $||f'(x_o)|| \leq lip(f)$.

DEMOSTRACION

Pongamos $M = lip(f)$ y sea $\varepsilon > o$ dado; entonces existe $\delta > o$ tal que

$$||f(x_o + h) - f(x_o) - f'(x_o)h|| \leq \varepsilon\, ||h|| \text{ si } ||h|| \leq \delta$$

De aqui

$$||f'(x_o)h|| \leq (M + \varepsilon)||h|| \text{ si } ||h|| \leq \delta$$

lo cual dice que $||f'(x_o)|| \leq M + \varepsilon$. , pero como esto vale para cada $\varepsilon > o$ el resultado se sigue inmediatamente.

A fin de mostrar nuestro próximo resultado, necesitamos el siguiente Lema (punto fijo) .

2.4. LEMA

Sea X un espacio métrico completo y sea $V \subset X$ bola abierta de radio r y centro x_o. Sea $f : V \to X$ una aplicación tal que $d(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1, x_2)$ (algún $k \in R$, $o \leq k < 1$) $d(f(x_o), x_o) < r(1 - k)$.

Entonces f posee un único punto fijo.

DEMOSTRACION

Utilizando inducción es fácil probar que $f^n(x_o)$ esta bien definido para $n \geq 1$ y $d(f^n(x_o), x_o) < r(1 - k^n)$. Ya que $d(f^{n+1}(x_o), f^n(x_o)) \leq k^n\, d(x_o, f(x_o))$, entonces

$$d(f^{m+n}(x_o), f^n(x_o)) \leq K^n (1+\ldots+ k^{m-1}) d(x_o, f(x_o)) \leq$$

$$\leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_o, f(x_o))$$; de aquí $\{f^n(x_o)\}$ es de Cauchy

y en consecuencia existe $x_1 \in X$ tal que $f^n(x_o) \to x_1$

$(n \to \infty)$, en particular $d(x_1, f^n(x_o)) \leq$

$$\leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_o, f(x_o)) < r\, K^n \qquad (n \geq o).$$

Tenemos entonces que $d(x_1 , x_o) < r$, asi $x_1 \in V$ y $f(x_1) = x_1$. Si $f(x_2) = x_2$ entonces $d(x_1 , x_2) \leq$

$\leq k\, d(x_1 , x_2)$ lo cual da $x_1 = x_2$ y termina la de-mostración.

2.5. **PROPOSICION**

Sea $V \subset F$ un abierto no vacío y sean $\phi : U \to V$, , $\psi : V \to U$ aplicaciones verificando la siguientes condiciones:

(1) $\phi \circ \psi$ = identidad de V $(\phi\, \psi(y) = y \ , \ y \in V)$

(2) $\phi \in C^1$ y ψ es lipschitz

Entonces $\phi'(x)$ es sobreyectiva cualquiera sea $x \in \psi(V)$.

DEMOSTRACION

Sea $y_o \in V$ y $x_o = \psi(y_o)$. Definamos $R: U \to F$ mediante $R(x) = \phi(x) - \phi'(x_o)(x - x_o)$; claramente

$R \in C^1$, $R(x_o) = \phi(x_o) = y_o$ y $R'(x_o) = \phi'(x_o) - \phi'(x_o) = 0$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2\,m}$ donde $m = \mathrm{lip}(\psi)$ ($m > o$ por (1)).

Y escojamos $r > o$ tal que la bola abierta $B(x_o\,, r) \subset U$ y $||\, R\,(x)\, || \leq \varepsilon$ si $x \in B(x_o\,, r)$.

Sea $\delta \in R$, $o < \delta \leq R/m$ tal que la bola $B(y_o\,, \delta)$ está contenida en V, entonces $\psi\,(B(y_o, \delta)) \subseteq B(x_o\,, r)$.

Probaremos que $\phi'(x_o)E$ contiene a $B(o, \frac{1}{2}\,\delta)$ lo cual, naturalmente, dará fin a la demostración.

Dado $y \in B(o\,, \frac{1}{2}\,\delta)$ definamos T_y: $B(y_o\,, \delta) \to F$ mediante $T_y(z) = y + R\psi(z)$; utilizando la desigualdad del valor medio concluímos que $||T_y\, z - T_y z'|| \leq \varepsilon\, m||z - z'|| = \frac{1}{2}\, ||z - z'||$; además $||T_y(z_o) - z_o|| = ||y|| < \frac{1}{2}\,\delta$, en consecuencia T_y está en la hipótesis de 2.4. y por tanto existe un único $z \in B(y_o\,, \delta)$ tal que $T_y(z) = z$.

Es decir $z = y + R\,\psi\,(z) = \phi\,\psi(z) - \phi'(x_o)(\psi(z) - x_o)$; o sea, $\phi'(x_o)(\psi(z) - x_o) = y$; lo cual termina la demostración.

2.6. **COROLARIO**

Sean, $f : E \to F$ homeomorfismo de clase c^1 tal que f^{-1} es lipschitz. Entonces f es un difeomorfismo de clase c^1. (Es decir, f^{-1} es de clase c^1). Es más, si $f \in c^m$ $(m \geq 1)$ entonces $f^{-1} \in c^m$. Además

$$||f'(x)u|| \geq [\mathrm{lip}(f^{-1})]^{-1} \; ||u|| \; , \; u \in E \qquad (*)$$

DEMOSTRACION

Ya que $||f(x_1) - f(x_2)|| \geq [\mathrm{lip}(f^{-1})]^{-1} \; ||x_1 - x_2||$, entonces la desigualdad (*) es válida; en particular $f'(x)$ es biyectiva cualquiera sea $x \in E$. Por otra parte de 2.5. se sigue que $f'(f^{-1}(y))$ es sobre cualquiera sea $y \in E$ $(f \circ f^{-1} =$ Identidad de E). De aquí $f'(x)$ es invertible para cualquier $x \in E$ $(||f'(x)^{-1}|| \leq$ $\leq \mathrm{lip}(f^{-1}))$. Un ejercicio fácil muestra ahora que f^{-1} es diferenciable en todo punto $y \in E$ y que $(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$. El resto de la demostración se sigue ahora fácilmente (Hay que utilizar el hecho que la aplicación $L \to L^{-1}$ es de clase c^∞ en