NOTAS DE MATEMATICA

Nº 44

"LA LOI DU PARALLELOGRAMME ET LE THEOREME DE GLEASON"

POR

JOSE SANTODOMINGO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA-VENEZUELA

1980

RÉSUMÉ

Ce travail porte essentiellment sur le théorème de Gleason (sur les formes quadratiques) et questions qui s'y ratachent telles les questions de représentation.

Nous donnons la représentation des formes semi-quadratiques et une generalisation du théorème de Gleason. Finalment pour les A-módules proyectifs de type fini nous avons calculé les A-modules quotients:

$$Q_o(A,M,N)/_{Q(A,M,N)} \quad , \quad Q(A,M,N)/_{Q_o(A,M,N)}$$

Je tiens a exprimer a Monsieur le Professeur A. Micali, qui a bien voulu diriger ce travail, mes plus vifs remerciements. Je remercie Monsieur M. Lefranc d'avoir bien voulu assurer la présidence du Jury, je remercie également Monsieur P.h. Revoy et Monsieur G. Loupias d'avoir accepté d'être membres du Jury. Mes remerciements vont aussi a madame Arnaud et Mademoiselle Elide Ramírez qui a assuré avec dévouement le travail de Secrétariat concernant cette publication.

NOTATION

Z_2	Corps a deux éléments
$Q(A,M,N)$	A-module des Applications A-quadratiques de M dans N.
$Q_o(A,M,N)$	A-module des Applications A-quasiquadratiques de M dans N.
$Q_1(A,M,N)$	A-module des Applications A-semi-quadratiques de M dans N.
Z	L'anneau des entiers relatifs.
Q	Corps des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
Z_n	Anneau des entiers module n.

SOMMAIRE

Par la suite, A designera un anneau commutatif a élément unité et tout A-module est unitaire.

1. PRELIMINARES. Soient M et N deux A-modules. On dira qu'une application $q:M \to N$ est une application A-semi-quadratique si elle vérifie la loi du parallélogramme, a savoir, $q(x+y)+q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$ quees que soient x,y dans M.

A toute application A-semi-quadratique on associera l'application $\phi:M \to N$ définie par $(x,y) \to q(x+y)-q(x)-q(y)$. On dira que ϕ est l'application symétrique associée a q.

Notons $Q_1(A,M,N)$ le A-module des applications A-semi-quadratiques de M dans N.

LEMME 1.1. Soient M et N deux A-modules, $q:M \to N$ une application A-semi-quadratique et ϕ l'application associée a q et supposons que l'homothetie définie par 2 dans N soit injective. Alors ϕ est biadditive et vérifie, pour tout x dans M, $\phi(x,x) = 2q(x)$ et $q(-x) = q(x)$.

En effet, la loi du parallélogramme nous donne $2q(0)=0$, donc $q(0)=0$ et par suite $q(y) + q(-y) = 2q(y)$ ce qui entraîne $q(y)=q(-y)$. La symétrie de ϕ est evidente et la loi du parallélogramme nous donne $q(2x)=4q(x)$.

Donc, $\phi(x,x) = q(2x)-2q(x) = 2q(x)$. De plus, $2\ \phi(x,y) =$
$= q(x+y)-q(x-y)$.

Démontrons maintenant que ϕ est biadditive. Etant donnés x,y,z trois éléments de M, on a $4(\phi(x,z)+\phi(y,z)) =$
$= 2q(x+z)-2q(x-z)\ 2q(y-z)-\ 2q(y-z)$,

$2q(x+z) + 2q(y+z) = q(x+y+2z) + q(x-y)$ et

$2q(x-z) + 2q(y-z) = q(x+y-2z) + q(x-y)$. Par suite, nous avons $4(\phi(x,z)+\phi(y,z)) = 2\phi(x+y,2z)$, donc $2(\phi\ (x,z) +$
$+ \phi(y,z)) = \phi(x+y,2z)$ et si l'on fait $y=0$, on a
$2\phi(x,z) = \phi(x,2z)$. Ceci entraine que $2(\phi(x,z)+\phi(y,z)) =$
$2\phi(x+y,z)$ et $\phi(x+y,z) = \phi(x,z) + \phi(y,z)$ ce qui démontre la biadditivité de ϕ.

Si M et N sont deux -modules, une application $q:M \longrightarrow N$ sera dite A-quasi-quadratique si les conditions suivantes sont verifiées:

QQ1) pour tont $(a,x) \varepsilon A \times M$, $q(ax) = a^2 q(x)$;

QQ2) quels que soient x,y dans M, $q(x+y)+q(x-y) =$
$= 2q(x) + 2q(y)$.

Il est évidente qui une condition nécessaire et suffisante pour que $q:M \longrightarrow N$ soit une application A-quasi-quadratique est que:

(i) pour tout $(a,x) \in A \times M$, $q(ax) = a^2 q(x)$;

(ii) l'application $\phi : M \times M \longrightarrow N$ définie par $\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ soit Z-bilinéaire.

Notons $Q_o(A,M,N)$ le A-module des applications A-quasi-quadratiques de M dans N.

Si M et N sont deux A-modules, une application $q : M \longrightarrow N$ sera dite <u>A-quadratique</u> si les conditions suivantes sont vérifiées:

Q1) pour tout $(a,x) \in A \times M$, $q(ax) = a^2 q(x)$

Q2) l'application $\phi : M \times M \longrightarrow N$ définie par $\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ est A-bilinéaire, necessairement symétrique que l'on appellera l'application A-bilinéaire symétrique associée a q.

Notons $Q(A,M,N)$ le A-module des applications A-quadratiques de M dans N. Il est clair que l'on a les inclusions, en tant que sous-A-modules,

$$Q(A,M,N) \subset Q_o(A,M,N) \subset Q_1(A,M,N).$$

On se pase le probleme de calculer les A-modules quotients:

$$Q_o(A,M,N)/_{Q(A,M,N)} ; \quad Q_1(A,M,N)/_{Q(A,M,N)}$$

et

$$Q_1(A,M,N)/_{Q_o(A,M,N)} .$$

Ceci va nous conduire a une généralisation du théoréme de Gleason lequel sera l'objet du paragraphe 3.

<u>LEMME 1.2</u>. Supposons que l'homothétie définie par 2 dans N soit injective. Si $q \in Q_1(A,M,N)$, une condition necessaire et suffisante pour que $q \in Q(A,M,N)$ est que pour tout $(x,y) \in M\times M$ et pour tout $a \in A$ on ait $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$, où ϕ est l'application symétrique associée a q.

En effet si $q \in Q_1(A,M,N)$, q vérifie la condition Q1), car $2q(ax) = \phi(ax,ax) = a^2\phi(x,x) = 2a^2q(x)$, donc $q(ax) = a^2q(x)$.

<u>EXAMPLE 1.3</u>. Soient B un anneau commutatif a élément unité et A l'anneau des matrices d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ avec x,y dans B. Il est clair que A est un anneau commutatif a élément unité et considérons l'application $q:A \longrightarrow A$ définie par $q(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$. Montrons que q est une application A-semi-quadratique. En effet, si

$$u = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ et } u' = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$$

sont deux éléments de A, on a $q(u+u') + q(u-u') =$

$$\begin{pmatrix} 2(xy + x'y') & 0 \\ 0 & 2(xy+x'y') \end{pmatrix} = 2q(u)+2q(u').$$

Par contre, l'application $q:A \longrightarrow A$ n'est pas A-quasi-quadratique. En effet,

$$q(u\,u') = \begin{pmatrix} xyx'y' & 0 \\ 0 & xy\,x'\,y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'y' & 0 \\ 0 & x'y' \end{pmatrix}$$

$= q(u)\ q(u')$, cést a dire, que est une application A-semi-quadratique multiplicative. Mais

$$q(u) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

on a, en général, $q(u) \neq u^2$, on encore, $q(u\,u') \neq u^2 q(u')$.

<u>EXAMPLE 1.4</u>. Si M et N sont deux Z_2-espaces vectoriels, l'application $q:M \longrightarrow N$ définie par $q(x) = 1$ pour tout $x \in M$ est une application Z_2-quadratique.

Plus généralment, on a la proposition suivante:

<u>PROPOSITION 1.5</u>. Soient A un anneau de caracteristique 2 et M,N deux A-modules. Toute application $q:M \longrightarrow N$ est une application A-semi-quadratique.

En effet, quels que soient x et y dans M on a $q(x+y)+q(x-y) = q(x+y) + q(x+y) = 0$ et $2q(x) + 2q(y) = 0$.

<u>PROPOSITION 1.6</u>. Soient M et N deux Z-modules.

Si l'homothétie définie par 2 dans N est injective alors $Q_1(Z,M,N) = Q_o(X,M,N) = Q(Z,M,N)$.

En effet, si $q \in Q_1(Z,M,N)$, la loi du parallélogramme nous donne $2q(0) = 0$ donc $q(0) = 0$, et par suite, $q(2x) + q(0) = 2q(x) + 2q(x)$, donc $q(2x) = 4q(x)$. Montrons que, pour tout $n \in Z$ et pour tout $x \in M$, $q(nx) = n^2 q(x)$, pour cela, on procéde par récurrence sur n. On a $q((n-1)x + x) + q((n-1)x-x) = 2q((n-1)x + 2q(x)$ donc $q(nx) + (n-2)^2 q(x) = 2(n-1)^2 q(x) + 2q(x)$. Il s'ensuit que $q(nx) = (2(n-1)^2 + 2-(n-2)^2)q(x) = n^2 q(x)$.

<u>PROPOSITION 1.7</u>. Si M et N sont deux Q-espaces vectoriels, on a $Q_1(Q,M,N) = Q_o(Q,M,N) = Q(Q,M,N)$.

Soit $q \in Q_1(Q,M,N)$. Il suffit de vérifier que si ϕ est l'application symétrique associée a q, on a $\phi(\frac{p}{q} x,y) = \frac{p}{q} \phi(x,y)$ pour tout $q \in Z - \{0\}$ et pour toute cuple (x,y) dans MxM (c.f. lemme (.2). Or,

$$\phi(\frac{p}{q} x,y) = \phi(p. \frac{1}{q} x,y) = p\ \phi(\frac{1}{q} x,y)$$

et d'autre part, $q\phi(\frac{1}{q} x,y) = \phi(q.\frac{1}{q} x,y) = \phi(x,y)$, donc $\phi(\frac{1}{q} x,y) = \frac{1}{q} \phi(x,y)$. Par suite $\phi(\frac{p}{q} x,y) = \frac{p}{q} \phi(x,y)$, ce qui achéve la démonstration de la proposition.

2. RAPPELS SUR LA SEPARABILITE. Dans [1] , A.M. Gleason montre que si A est l'extension de Q des nombres algébriques, $Q_0(A,M,N) = Q(A,M,N)$ et si A est une extension transcendant de Q, $Q_0(A,M,N) \neq Q(A,M,N)$. En vue de généraliser le théoréme de Gleason nous démontrerons que si A est une Q-algébre séparable $Q_0(A,M,N) = Q(A,M,N)$ ce qui donne en particulier le théoréme de Gleason. Pour arriver a ce but, nous rappelons quelques définitions et résultats.

Soient K un anneau commutatif a élément unité et A un K-module. On dira que A est une K-algébre ou une algébre sur K, s'il existe une application K-bilinéaire $\mu: A\times A \longrightarrow A$, $(x,y) \longrightarrow xy$ appelée multiplication de A. On dira que A est associative si la multiplication μ est associative, i.e, quels que soient x,y,z dans A, $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$ et que A est commutative si μ est symétrique i.e, $\mu(x,y) = \mu(y,x)$, quels que soient x,y dans A.

De plus, nous dirons que A a un élément unité noté 1, si $\mu(x,1) = \mu(1,x) = x$ pour tout x dans A.

Si A est une K-algébre, la K-algébre opposé $A°$, est définie comme suit: en tant que K-module $A° = A$ et la multiplication de $A°$ est définie par $\mu: A° \times A° \longrightarrow A°$, $(x°,y°) \longrightarrow \mu(y,x)$.

Notons que si A est commutative, $A°= A$ en tant que K-algébre.

Se donner une structure de K-algébre sur A révient a se donner une application K-linéaire $u: A \otimes_k A \longrightarrow A$, c'est a dire, un éléments

$$\mu \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A) .$$

On dira qu'une K-algébre associative A, non neccesairement commutative, est <u>simple</u> si les seuls idéaux bilatéres de A sont 0 et A et on dira que A est semi-simple si A est somme directe finie d'algébres simples.

Soient A,A' deux K-algébres et $f: A \longrightarrow A'$ une application K-linéaire. On dira que f est un <u>morphisme</u> de K-algébres si $f(x,y) = f(x)f(y)$ quels que soient x,y dans A. Si de plus A et A' ont des éléments unité notés 1 et 1' respectivament, on supposera que $f(1)=1'$.

En général, l'application $\mu \otimes_k A° \longrightarrow A$ définie par $x \otimes y \longrightarrow xy$ n'est pas un morphisme d'algébres, sauf si A est commutative. En effet, il suffit de voir que $\mu(x \otimes y°)(x' \otimes y'°) = \mu(xx' \otimes (y'y)°) = xx'y'y$ et que $\mu(x \otimes y°)\mu(x' \otimes y'°) = xy(x'y') = xy\ x'y'$.

Considerons $A \otimes_k A°$ munie de sa structure naturalle de k-algébre, i.e, $(x \otimes y°)(x' \otimes y'°) = xx' \otimes (y'y)°$

pour x, x' dans A et y°, y'° dans A°.

On peut munir A d'une structure de $A \underset{k}{\otimes} A^\circ$-module a gauche "via" $(x \otimes y^\circ)z = xzy$, ou $x, z \in A$ et $y^\circ \in A^\circ$.

On remarque que μ est une application $A \underset{k}{\otimes} A^\circ$ -linéaire.

$$(x \otimes y^\circ)\ \mu(x' \otimes y'^\circ) = (x \otimes y^\circ)\ x'y' = xx'y'y =$$

$$= \mu((x \otimes y^\circ)\ (x' \otimes y'^\circ)).$$ De plus, μ est surjective.

Nous avons donc la suite exacte de $A \underset{k}{\otimes} A^\circ$-modules a gauche

$$0 \longrightarrow J(A) \longrightarrow A \underset{k}{\otimes} A^\circ \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

où

$$J(A) = \mathrm{Ker}\ (\mu).$$

On dira que A est une K-<u>algébre</u> <u>séparable</u> si la suite exacte

$$0 \longrightarrow J(A) \longrightarrow A \underset{k}{\otimes} A^\circ \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

de $A \underset{k}{\otimes} A^\circ$-modules à gauche se scinde.

<u>LEMME 2.1</u>. Soient K un corps commutatif et A une K-algébre associative de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) A est une K-algébre séparable;

(ii) A est une K-algébre semi-simple.

Cf [9] et [10]

Si A est une K-algébre commutative et associative a élément unité, notons $Der_K(A)$ le A-module des K-dérivations de A dans A, i.e, des applications K-linéaires $d: A \longrightarrow A$ vérifiant $d(xy) = d(x)y+xd(y)$, quels que soient x,y dans A. La proposition suivante nous montre le rapport existant entre dérivations et séparabilité.

PROPOSITION 2.2. Soient K un anneau commutatif a élément unité et A une K-algébre associative et commutative a élément unité. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) A est une K-algébre séparable;

(ii) $Der_K(A) = 0$.

Pour la démonstration de cette proposition, on renvoie à la bibliographie citée (Cf [3]). Par la suite, nous verrons comment appliquer ce résultat au probléme qui nous occupe.

3. LE THEOREME DE GLEASON. Soient A un anneau commutatif a élément unité, M et N deux A-modules et F(A,M,N) le A-module des applications $f: AxMxM \longrightarrow N$ qui sont A-linéaires et anti-symétriques dans la déuxiéme et la troisiéme variable et qui sont des Z-dérivations dans la premiére variable, i.e, quels que soient a,b dans A et pour x,y parcourant M on a, $f(a+b ,x,y) = f(a,x,y) + f(b,x,y)$ et $f(ab,x,y) =$

$= af(b,x,y) + bf(a,x,y)$. Si $q \in Q_o(A,M,N)$, on note αq: $AxMxM \longrightarrow N$ l'application définie par $\alpha q(a,x,y) =$ $= \phi(ax,y) - a\phi(x,y)$, $a \in A$ et $x,y \in M$, ou $\phi: MxM \longrightarrow N$ est l'application symétrique associée a q. On a le résultat suivant:

<u>PROPOSITION 3.1</u>. Il existe une application A-lineaire α: $Q_o(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$ dont le noyou est $Q(A,M,N)$, c'est a dire, la suite de A-modules $0 \longrightarrow Q(A,M,N) \longrightarrow$ $\longrightarrow Q_o(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$ est exacte.

En effet definissons l'application

$$\alpha: Q_o(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$$

par $q \longrightarrow \alpha q$ et montrons d'abord que $\alpha q \in F(A,M,N)$, i.e, que αq est A-lineaire et anti-symétrique en ses deuxiéme et troisiéme variables et que αq est une dérivation dans su premiére variable. En effet pour tout a dans A et tout x dans M, on a $\phi(x,ax) = q(x+ax) - q(x) - q(ax) =$ $= ((a+1)^2 - 1 - a^2)q(x) = 2a\ q(x)$ et puisque ϕ est symétrique et $\phi(x,x) = 2q(x)$ pour tout x dans M, alors $\phi(x,ax) = \phi(ax,x) = a\phi(x,x)$. Par suite, pour tout a dans A et quels que soient x,y dans M, on a $\phi(a(x+y),x+y) = a\phi(x+y,x+y)$, soit, $\phi(ax,y) - a\phi(x,y) =$

$= -(\phi(ay,x) - a\,\phi(y,x))$, ou encore, $\alpha q(a,y,x) = -\alpha q(a,x,y)$.

Dantre part, $\phi(ax,ay) = q(ax+ay) - q(ax) - q(ay) =$

$= a^2(q(x+y) - q(x) - q(y) = a^2\,\phi(x,y)$, pour tout a dans A et quels que soient x,y dans M.

Dans la rélation $\phi(ax,y) + \phi(ay,x) = a(\phi(x,y)+\phi(y,x))$ remplaçons x par ax, puis a par a+b. On a $\phi(a^2x,y) + \phi(ay,ax) = a(\phi(ax,y) + \phi(y,ax))$, soit $\phi(a^2x,y) + a^2\phi(x,y) = 2a\,\phi(ax,y)$ et $\phi((a+b)^2x,y) + (a+b)^2\,\phi(x,y) = 2(a+b)\,\phi((a+b)x,y)$ ce qui, aprés simplification et compte tenu du que ϕ est Z-bilineairez entraîne, $\phi(abx,y) + ab\,\phi(x,y) = a\phi(bx,y) + b\phi(ax,y)$, soit $\phi(abx,y) - a\phi(bx,y) = b(\phi(ax,y) - a\phi(x,y))$, c'est a dire, $\alpha q(a,bx,y) = b\,\alpha q(u,x,y)$ et ceci, quels que soient a,b dans A et x,y dans M.

Enfin $\alpha q(a,x+x',y) = \phi(a(x+x'),y) - a\phi(x+x',y) =$

$= \phi(ax,y) + \phi(ax',y) - a\phi(x,y) - a\phi(x',y) = \alpha q(a,x,y) + \alpha q(a,x',y)$ pour tout a dans A et quels que soient x,y dans M. Donc α_q est A-lineaire dans sa deuxième variable et étant anti-symétrique en ses deuxième et troisième variables, on conclut que αq est aussi A-linéaire dans sa troisième variable.

Finalmente, αq est une Z-dérivation dans sa première variable. En effet, $\alpha q(a+b,x,y) = \phi((a+b)x,y) - (a+b)\ \phi(x,y) = \phi(ax,y) + \phi\ (bx,y) - a\phi(x,y) - b\phi(x,y) = \alpha q(a,x,y) + \alpha q(b,x,y)$ et $\alpha q(ab,x,y) = \phi(abx,y) - ab\phi(x,y) = (\phi(abx,y) - a\phi(bx,y)) + (a\phi(bx,y) - ab\phi(x,y)) = \alpha q(a,\ bx,y) + a\ \alpha q(b,x,y) = b\ \alpha q(a,x,y) + a\ \alpha q(b,x,y)$, quels que soient a,b dans A et x,y dans M.

D'autre part, il est clair que α est A-lineaire et $q \varepsilon \mathrm{Ker}(\alpha)$ si et seulement si $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$ pour tout a dans A et quels que soient x,y dans M, i.e, l'application ϕ associée à q est A-bilinéaire, necessairement symétrique. Donc $\mathrm{Ker}\ (\alpha) = Q(A,M,N)$, ce qui achéve la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 3.2. Si L est un A-module libre, pour tout A-module N, l'application A-linéaire

$$\alpha:\ Q_o(A,L,N) \longrightarrow F(A,L,N)$$

est surjective.

En effet, soit $f \varepsilon F(A,L,N)$ et montrons qu'il existe une application A-quasi-quadratique q telle que $\alpha(q) = f$. Soit $(ei)_{i\varepsilon I}$ une base de L sur A. On définit une application ψ: $L \times L \longrightarrow N$ par $\psi(x,y) = \sum_{i \varepsilon I} f(ai,ei,y)$, où $x = \sum_i ai\ ei$ et y sont deux éléments de L. Il est evident que ψ est additive dans sa premiere variable et A-lineaire dans sa séconde variable. On pose alors $q(x) = \psi(x,x)$ pour tout x dans L et si $x,y \varepsilon L$, $q(x+y) + q(x-y) = \psi(x+y,x+y) + \psi(x-y,x-y) = 2\psi(x,x) + 2\psi(y,y) = 2q(x)+2q(y)$. D'antre part, $q(ax) = \psi(ax,ax) = a\psi(ax,x) = a \sum_i f(aai,ei,x) = a \sum af(ai,ei,x) + a \sum_i ai\ f(a,ei,x) = a^2\ \psi(x,x) + a\ f(a,x,x) = a^2\ \psi(x,x) = a^2 q(x)$ aû $x = \sum_i ai\ ei$. Il s'ensuit que $q \varepsilon Q_o(A,L,N)$.

Il reste, enfin, à montrer que $\alpha(q) = f$. Pour cela considerons l'application symétrique ϕ: $L \times L \longrightarrow N$ associée a la application A-quasi-quadratique q, i.e, $\phi(x,y) = q(x+y)-q(x)-q(y)$, pour $x,y \varepsilon L$. Quels que soient $x,y \varepsilon L$, on a $\phi(x,y) = \psi(x,y) + \psi(y,x)$. Posons $\alpha(q) = f'$ soit, pour tout $a \varepsilon A$ et quels que soient $x,y \varepsilon L$, $f'(a,x,y) = \phi(ax,y)-a\phi(x,y) = \psi(ax,y) + \psi(y,ax)-a\psi(x,y) - a\psi(y,x) = \psi(ax,y) - a\psi(x,y) = \sum_i (f(aai,ei,y)-af(ai,ei,y)) = \sum ai\ f(a,ei,y) = f(a,x,y)$, si l'on pose $x = \sum_i ai\ ei$. Ceci nous dit que $f' = f$ et, par suite, $\alpha(q) = f$.

<u>PROPOSITION 3.3</u>. Si P est un A-module projectif, l'application A-linéaire $\alpha : Q_o(A,P,N) \longrightarrow F(A,P,N)$ est surjective.

En effet, si P est un A-module projectif, P est facteur direct d'un A-module libre L, i.e, il existe deux applications A-linéaires $P \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} P$ telles que $\beta\alpha = \mathrm{idp}$. Ceci revient à dire qu'il existe une décomposition en somme directe $L \cong P \oplus \mathrm{Ker}(\beta)$ (isomorphisme de A-modules). Désignons par

$$P_1 : Q(A,L,N) \longrightarrow Q(A,P,N)$$

l'application A-lineaire définie par $q \longrightarrow q\alpha$ et par $i_1 : Q(A,L,N) \longleftarrow Q(A,P,N)$ l'application A-linéaire definie $q\beta \longleftarrow q$. Il est clair que P_1 est surjective, car $P_1(q\beta) = q$, que i_1 est injective et que $P_1 i_1 = id$, application identique de $Q(A,P,N)$. Définitions analogues pour i_1, P_2, i_3, P_3 faisant commuter les diagrammes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q(A,L,N) & \longrightarrow & Q_o(A,L,N) & \xrightarrow{\alpha_2} & F(A,L,N) & \longrightarrow & 0 \\ & & P_1 \downarrow \uparrow i_1 & & P_2 \downarrow \uparrow i_2 & & P_3 \downarrow \uparrow i_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & Q(A,P,N) & \longrightarrow & Q_o(A,P,N) & \xrightarrow{\alpha_P} & F(A,P,N) & & \end{array}$$

Il s'ensuit que α_P est une application A-linéaire surjective. On remarque, tout simplement, que $P_3(f) = f\circ(id \times \alpha\times\alpha)$ pour tout f dans F(A,L,N) et que $P_3(f) = f\circ(id \times \beta\times\beta)$ pour tout f dans F(A,P,N), ou id designe l'identile de A. Ceci achêve la démonstration de la proposition.

La proposition suivante achéve cette série de considérations.

PROPOSITION 3.4. Soient A un anneau commutatif à élément unité et N un A-module. Si P est un A-linéaire α: $Q_o(A,P,N) \longrightarrow F(A,P,N)$ est surjective.

En effet, comme P est plat, il est limite inductive d'une famille $(Li)_{i\varepsilon I}$ de A-modules libres de type fini (théorême de Lazard), cf.( )....) soit $P = \varinjlim Li$. Il en résulte que $Q_o(A,P,N) = \varinjlim Q_o(A,Li,N)$ et $F(A,P,N) = \varinjlim F(A,Li,N)$ et comme, pour chaque $i\varepsilon I$ il existe une application A-lineaire surjective

$$\alpha_i: Q_o(A,Li,N) \longrightarrow F(A,Li,N)$$

et $\alpha = \varinjlim \alpha i$, alors α est aussi une application surjective.

Soient A un anneau commutatif a élément unité et M,N deux A-modules. On note I(A,M,N) le A-module des applications A-bilinéaires et antisymétriques de $M\times M$ dans N. Il est clair que $I(A,M,N)$ est le A-module $\Delta_2(M)^*$, ou $\Delta_2(M)$ est le sous-A-module de l'algêbre $\Delta(M)$ (cf [7] et [9]) formé par les éléments homogênes de degré 2 et que si de plus, 2 est inversible dans A, alors $I(A,M,N)$ est la deuxième puissance extérieure $\Delta_2(M)$ de M. La proposition suivante nous montre comment cet A-module est lié aux applications.

PROPOSITION 3.5. Soient A un anneau commutatif a élément unité et M,N deux A-modules. Il existe un isomorphisme de A-modules

$$\mathrm{Der}_Z(A) \otimes_A I(A,M,N) \cong F(A,M,N).$$

En effet, l'application

$$\mathrm{Der}_Z(A) \times I(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$$

définie par $(d,g) \longrightarrow \langle d,g\rangle$ est A-bilinéaire, où $\langle d,g\rangle \in F(A,M,N)$ est l'unique application A-linéaire rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "d"'] \arrow[d, "i"] \\
A & A\times M\times M \arrow[l, dashed, "\langle d,g\rangle"'] \\
 & M\times M \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

étant i et j les injections cononiques

· Pour tout $(a,x,y) \in A \times M \times M$, on a $\langle d,g\rangle (a,x,y) =$ $= d(a)\, g(x,y)$. Il s'ensuit que $\langle d,g\rangle \circ i = d$ et $\langle d,g\rangle \circ j = g$. L'application

$$\mathrm{Der}_Z(A) \times I(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$$

de prolongue alors en une application A-linéaire unique

$$\psi : \mathrm{Der}_Z(A) \underset{A}{\otimes} I(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$$

donnée par

$$\psi\Big(\sum_i d_i \otimes y_i\Big) = \sum_i \langle di,gi\rangle \ .$$

· D' autre part, l'application

$$\psi' : F(A,M,N) \longrightarrow \mathrm{Der}_Z(A) \underset{A}{\otimes} I(A,M,N)$$

définie par $f \longrightarrow (f\circ i) \otimes (f\circ j)$ est A-lineaire et il est clair que ψ et ψ' sont des isomorphismes réciproques.

On remarque que si $\mathrm{Der}_Z(A) = 0$, alors $F(A,M,N) = 0$ et par suite $Q_o(A,M,N) = Q(A,M,N)$. En suite on verra des examples de tels anneaux.

<u>PROPOSITION 3.6.</u> Si A est une Q-algébre commutative

et associative séparable, alors $Q_o(A,M,N) = Q(A,M,N)$, quels que soient les A-modules M et N.

Soient $q \varepsilon Q_o(A,M,N)$ et ϕ l'application associée a q. L'application d: $A \longrightarrow A$ définie par $d(a) = \phi(ax,y) - a\phi(x,y)$ est une dérivation pour tout $(x,y) \varepsilon MxM$.

Comme $Der_Q(A) = 0$, alors $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$ pour tout $a \varepsilon A$ et pour tout $(x,y) \varepsilon MxM$, c'est a dire $q \varepsilon (A,M,N)$.

Le lemme suivant achéve la démonstration de la proposition.

<u>LEMME 3.7</u>. Soient K un anneau commutatif a élément unité, S une partie multiplicative de K et A une S^{-1} K-algébre commutative et associative a élément unité. Alors $Der_K(A) = Der_{S^{-1}K}(A)$.

Notons que la structure de K-module de A est donnée par $\lambda x = \frac{\lambda}{1} x$ pour tout λ dans K et pour tout x dans A. Donc, si d: $A \longrightarrow A$ est une S^{-1} K-dérivation, alors d: $A \longrightarrow A$ est aussi une K-dérivation, soit, $Der_{S^{-1}K}(A)$ $Der_K(A)$. Réciproquement, comme toute application K-linéaire de A dans A est aussi $S^{-1}K$-linéaire, l'egalité $Der_{S^{-1}K}(A) = Der_K(A)$ s'ensuit.

COROLLAIRE 3.8. Si A est une Q-algèbre commutative et associative à élément unité, $Der_Z(A) = Der_Q(A)$.

De la proposition 3.6., on déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.9. (Théorème de Gleason). Si A est un anneau d'entiers algébriques, quels que soient les A-modules M,N, on a $Q_o(A,M,N) = Q(A,M,N)$.

Il suffit de montrer que A est une Q-algèbre séparable. En effet A est une Q-algèbre simple car si $I \neq 0$ est un ideal de A et si $a \in I$, $a \neq 0$, alors a est solution d'une équation algébrique à coefficients dans Q non tous nuls, $c_o + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a^n = 0$, donc, par example $1 = - c_o^{-1}(c_1 a + \ldots + c_n a^n) \in I$, soit, $I = A$. On voit donc que A est simple et, par suite, A est séparable sur Q (cf. lemme 2.1.).

PROPOSITION 3.10. (A.M. Gleason).

Si A est un corps, extension transcendante de Q, alors $Q(A,M,N) \subsetneq Q_o(A,M,N)$ quels que soient les A-espaces vectoriels M et N.

Pour chaque $b \in A$, il existe une Q-derivation $d: A \longrightarrow A$ qui ne s'anulle pas en b cf|3|. Définisons une application $f: A \times M \times M \longrightarrow N$ par $(a,x,y) \longrightarrow d(a)t(x,y)$, où

$t: M\text{x}M \longrightarrow N$ est une application A-bilinéaire et anti-symétrique non nulle.

Comme $\alpha: Q_o(A,M,N) \longrightarrow F(A,M,N)$ est surjective il existe $q \in Q_o(A,M,N)$ telle que $\alpha(q) = f$. C'est à dire, si ϕ est l'application associée a $q, \phi(bx,y) - b\phi(x,y) =$ $= d(b)\ t(x,y) \neq 0$, soit $q \notin Q(A,M,N)$.

De même, il est clair que si M est un A-module tel que $F(A,M,N) = 0$, toute application A-quasi-quadratique de M dans N est une application A-quadratique de M dans N. Nous donnons ici, un example de tels modules.

<u>EXAMPLE 3.11</u>. Soient A un anneau commutatif a élément unité, A intégre et M un A-module de torsion. Pour tout A-module sans torsion N, $F(A,M,N) = 0$.

En effet, soient $f \in I(A,M,N)$ et x,y deux éléments de M. Il existe des éléments non nuls a,b de A tels que $ax = 0$ et $by = 0$, donc $0 = f(ax,by) = ab\ f(x,y)$ et comme $ab \neq 0$ et N est sans torsion, alors $f(x,y) = 0$. Ceci étant verifié quels que soient x,y dans M, on déduit que $f = 0$, ou encore, $F(A,M,N) = 0$. (Por prop. 3.5).

<u>EXAMPLE 3.12</u>. D'aprés le résultat du l'exercice précedent, on voit inmédiatemment que $F(Z,Z_n,Z) = 0$,

$F(Z,Z_n,Q) = 0$ et $F(Z,Z_n,L) = 0$ pour tout corps L qui est extension de Q.

4. RAPPELS SUR LES MODULES INJECTIFS. Soient A un anneau commutatif à élément 1, M un A-module et $0 \to R \to L \to M \to 0$ une representation de M comme quotient d'un A-module libre L. On sait déja que pour tout A-module N la suite de A-modules $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Hom}_A(R,N)$ est exacte.

On définit $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Hom}_A(R,N))$.

De même, si $0 \to N \to Q \to S \to 0$ est une suite exacte de A-mudules, où Q est un A-module injectif, la suite de A-modules $0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,Q) \to \mathrm{Hom}_A(M,S)$, est exacte et posons, par definition, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)' =$ $= \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_A(M,Q) \to \mathrm{Hom}_A(M,S))$. On a la proposition suivante:

PROPOSITION 4.1. Les A-modules $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ et $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)'$ ne dépendent pas de la répresentation de M comme quotient d'un A-module projectif ni de la de N comme sous A-module d'un A-module injectif.

Nous identificarons ces deux A-modules et le noterons simplement $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$. Les résultats suivants sont bien connus (cf|5|).

<u>PROPOSITION 4.2.</u> Pour un A-module M, les conditions suivantes sont equivalentes:

i) M est un A-module projectif.

ii) Pour tout A-module N, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$.

<u>PROPOSITION 4.3.</u> Pour un A-module N, les conditions suivantes sont equivalentes:

i) N est un A-module injectif;

ii) $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$ pour tout A-module M.

<u>THEOREME 4.4.</u> (de la suite exacte de les Ext^1_A):

i) Soient A un anneau et $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Pour tout A-module N on a une suite exacte de A-modules

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M',N) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_A(M'',N) \to \mathrm{Ext}^1_A \to \mathrm{Ext}^1_A(M',N).$$

ii) Soient A un anneau et $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Pour tout A-module M on a une suite exacte de A-modules

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N') \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N'') \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_A(M,N') \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N'').$$

<u>EXAMPLE 4.5.</u> Considérons l'anneau quotient $Z_n = Z/_{nZ}$, où Z désigne l'anneau des entiers et n est un entier verifiant $(1 < n < \infty)$. Si n est un produit de nombres premiers différents, alors Z_n est un anneau auto-injectif.

En effet, supposons que $n = \pi_{i\varepsilon I}\, p_i$ où les p_i sont des nombres premiers tels que si $i \neq j$, alors $p \neq p_j$ et soit $Z_n = \oplus\, p_i\, Z_n$; $p_i\, Z_n$ est un idéal de Z_n pour chaque i.

Montrons que pour tout homomorphisme $fi: p_i\, Z_n \to Z_n$, il existe $m_i \in p_i\, Z_n$ tel que $fi(\lambda) = \lambda.mi$ pour tout $\lambda \in p_i\, Z_n$; il s'ensuit d'apres la proposition 4.6 que Z_n est Auto-injectif.

Considérons les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
& p_i\, Z_n \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, "\eta_i"] \\
Z_n & Z_n \arrow[l, dashed, "F"'] \\
& p_j\, Z_n \arrow[ul, "f_j"] \arrow[u, "\eta_j"']
\end{tikzcd}$$

ou les $\eta_i: p_i\, Z_n \to Z_n$ sont les injections canoniques, $i \in I$ et où $F: Z_n \to Z_n$ est <u>unique</u>, verifiant $F o\, \eta_i = f_i$ pour tout $i \in I$. Si l'on prend

$m_i = F((\delta_{ij})_{j\in I})$; on voit que $f_i(\lambda) = \lambda m_i$ pour tout λ dans $p_i Z_n$.

PROPOSITION 4.6. Un A-module Q est injectif, si et seulement si, pour chaque ideal I de A et pour chaque application A-linéaire $f: I \to Q$, il existe un élément g dans Q tel que $f(\lambda) = \lambda g$ pour tout λ dans I.

Pour la démonstration, voir cf|4|.

5. REPRESENTATION DES APPLICATIONS SEMI-QUADRATIQUES.

Soient A un anneau commutatif a élément unité et M et N deux A-modules.

Rappelons que l'on note $Q_1(A,M,N)$ le A-module des applications A-semi-quadratiques de M dans N et que si l'homothetie définie par 2 dans N est injective, alors toute application Z-semi-quadratique $q:M \to N$ est une application Z-quadratique pour les structures de Z-modules de M et de N.

PROPOSITION 5.1. (Représentation des applications A-quadratiques). Pour tout A-module M, il existe un A-module $\Gamma_2(M)$ et une application A-quadratique $q:M \to \Gamma_2(M)$ telle que toute application A-quadratique $q:M \to N$ se factorise de façon unique par une application A-linéaire $g: \Gamma_2(M) \to N$, i.e, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \\ \Gamma_2(M) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Commute, ou encore $Q(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma_2(M),N)$, isomorphisme de A-modules.

Rappelons seulement que

$$\Gamma_2(M) = A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \Big/ R \quad ,$$

où $A^{(M)}$ est le A-module libre de base M et R est le sous-A-module de $A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M$ engendré par les éléments de la forme $(e_{ax} - a^2 e_x, 0)$ et $(e_{x+y} - e_x - e_y, - x \otimes y)$ où $x,y \in A$ et où $(e_x)_{x \in M}$ est la base canonique du A-module libre $A^{(M)}$ et $\gamma: M \longrightarrow A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow \Gamma_2(M)$ est l'application composée de $M \to A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M$, $x \to (e_x, 0)$ et de la application surjective canonique $A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow \Gamma_2(M)$.

<u>PROPOSITION 5.2.</u> Pour tout groupe abélien M, il existe un groupe abélien $\Gamma_1(M)$ et une application semi-quadratique $\gamma_1: M \longrightarrow \Gamma_1(M)$ telle que toute application semi-quadratique $g: M \to N$ se factorise de façon uni-

que par un homomorphisme de groupes $g:\Gamma_1(M) \to N$, i.e, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & N \\ \Gamma_1(M) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Commute, c'est a dire, il existe un isomorphisme de groupes abéliens. $Q_1(Z,M,N) \cong \mathrm{Hom}_Z(\Gamma_1(M),N)$.

Si l'homothétie définie par 2 dans N est injective $q:M \to N$ est une application Z-quadratique, donc, il existe un Z-module $\Gamma_2(M)$ et une application Z-quadratique γ telle que toute application Z-quadratique $q:M \to N$ se factorise de façon unique par une application Z-linéaire $g:\Gamma_2(M) \to N$, i.e, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \\ \Gamma_2(M) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il suffit de prendre alors $\Gamma_1(M) =$ $= \Gamma_2(M)$ et $\gamma_1 = \gamma$.

Montrons que en géneral $\Gamma_1(M) = \Gamma_2(M)$, consideré avec sa structure naturalle de groupe abélien, et $\gamma_1 = \gamma$. En effet, soient $(e_x)_{x\varepsilon M}$ la base canonique du Z-module libre $Z^{(M)}$ et S les sous-Z-module de

$Z^{(M)} \times M \underset{Z}{\otimes} M$ engendré par les éléments de la forme $(e_x - e_{-x}, 0)$ et $(e_{x+y} - e_x - e_y, -x \otimes y)$, où x,y parcourent M. Notons $\Gamma_1(M) = Z^{(M)} \times M \underset{Z}{\otimes} M/_S$ le Z-module quotiant et considerons l'application $\gamma_1: M \to \Gamma_1(M)$ composée des applications $M \to Z^{(M)} \times (M \underset{Z}{\otimes} M)$, $x \to (e_x, 0)$ et de la surjection canonique $Z^{(M)} \times (M \underset{Z}{\otimes} M) \to \Gamma_1(M)$. Il est facile de voir que γ_1 est une application semi-quadratique.

D'autre part l'application $\psi: M \times M \to \Gamma_1(M)$ associée a γ_1 est Z-bilinéaire.

Soit, d'autre part, q une application semi-quadratique et ϕ l'application associée a q. Il existe une unique application Z-linéaire $h: M \underset{Z}{\otimes} M \to N$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & N \\ M \underset{Z}{\otimes} M \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

où la fléche verticale est canonique.

D'autre part il existe une application Z-linéaire $t: Z^{(M)} \to N$ donnée par $t(\sum_{x \in M} z_x e_x) = \sum_{x \in M} z_x q(x)$, faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \\ Z^{(M)} \arrow[ur, dashed, "t"'] & \end{tikzcd} \quad \text{(z-lineal)}$$

où la flèche verticale est canonique donc il existe une unique application Z-lineaire $\bar{g}$: $Z^{(M)} \times (M \underset{Z}{\otimes} M) \longrightarrow N$ rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & Z^{(M)} \arrow[dl, "t"'] \arrow[d, "i_1"] \\ N & Z^{(M)} \times M \underset{Z}{\otimes} M \arrow[l, dashed] \\ & M \underset{Z}{\otimes} M \arrow[u, "i_2"'] \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

où les i_i $(i=1,2)$ sont les injections canoniques. On a $q(x) = t(e_x) = \bar{g}(i_1(e_x)) = \bar{g}((e_x,0))$ et $\phi(x,y) = h(x \otimes y) =$ $= h(x \otimes y) = \bar{g}(i_2(x \otimes y)) = \bar{g}((0,x \otimes y))$ quels que soient x,y dans M, donc, $\bar{g}(S) = 0$. Il existe alors une unique application Z-lineaire g: $\Gamma_1(M) \longrightarrow N$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd} Z^{(M)} \times M \underset{Z}{\otimes} M \arrow[r] \arrow[d] & N \\ \Gamma_1(M) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & N \\ \gamma_1(M) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Pour démontrer l'unicité de g verifiant $g \circ \gamma_1 = q$ on procede comme suit. Supposons qu'il existe une autre application Z-linéaire $f: \Gamma_1(M) \longrightarrow N$ telle que $f \circ \gamma_1 = q$. On a $f \circ \gamma_1 = g \circ \gamma_1$, donc f et g coincident sur $\mathrm{Im}(\gamma_1)$. Si l'on démontre que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ engendre $\Gamma_1(M)$ en tant que Z-module, alors g=f. En effet, les éléments de la forme $(e_x, y \otimes z)$ où x,y,z parcourent M, engendrent $Z^{(M)} \times (M \underset{Z}{\otimes} M)$ en tant que Z-module donc les éléments $C(e_x, y \otimes z)$ pour x,y,z parcourrant M, engendrent $\Gamma_1(M)$ en tant que Z-module, où $C: Z^{(M)} \times M \underset{Z}{\otimes} M \longrightarrow \Gamma_1(M)$ est la surjection canonique et comme $C((e_x, y \otimes z)) = C((e_x, 0)) - C((e_{y+z} - e_y - e_z, -y \otimes z)) + C((e_{y+z} - e_y - e_z, 0)) = C((e_x, 0)) + C((e_y + z, 0)) - C((e_y, 0)) - C((e_z, 0)) = \gamma_1(x) + \gamma_1(y+z) - \gamma_1(y) - \gamma(z)$ alors $\{\gamma_1(x) \mid x \in M\}$ engendre $\Gamma_1(M)$ en tant que Z-module.

<u>PROPOSITION 5.3.</u> Pour tout A-module M, il existe un A-module $\Gamma_1(M)$ et une application A-semi-quadratique $\gamma_1: M \longrightarrow \Gamma_1(M)$ telle que toute application A-semi-quadratique $q: M \longrightarrow N$ se factorise de façon unique par une application A-linéaire $g: \Gamma_1(M) \longrightarrow N$, i.e, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & N \\ \Gamma_1(M) \arrow[ur, dashed, "q"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif, c'est à dire, il existe un isomorphisme de A-modules $Q_1(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma_1(M),N)$.

Considerons $\Gamma_2(M)$ avec sa structure naturalle de groupe abélien et désignons par $\Gamma_1(M)$ le A-module $\Gamma_1(M) = A \otimes_Z \Gamma_2(M)$ obtenu par extension des scalaires $Z \longrightarrow A$.

L'application composée $\gamma_1 : M \to \Gamma_2(M) \to A \otimes_Z \Gamma_2(M) = \Gamma_1(M)$ de $M \longrightarrow \Gamma_2(M)$, $x \longrightarrow \gamma(x)$ et $\Gamma_2(M) \to A \otimes_Z \Gamma_2(M)$, $z \to 1 \otimes z$ est A-semi-quadratique.

En effet, quels que soient x,y dans M, on a, $\gamma_1(x+y) + \gamma_1(x-y) = 1 \otimes \gamma(x+y) + 1 \otimes \gamma(x-y) = 1 \otimes (\gamma(x+y) + \gamma(x-y)) = 1 \otimes (2\,\gamma(x) + 2\,\gamma(y)) = 2(1 \otimes \gamma(x)) + 2(1 \otimes \gamma(y)) = 2\gamma_1(x) + 2\gamma_1(y)$ et, d'autre part, l'application $\psi : M \times M \to \Gamma_1(M)$ associée a γ_1 est donnée par $\psi(x,y) = 1 \otimes \phi(x,y)$ où ϕ est l'application A-bilineaire associée a γ. Ceci nous montre que ψ est Z-bilineaire.

Si q est une application A-semi-quadratique, alors q est une application Z-quadratique, donc il existe une unique application Z-lineaire g: $\Gamma_2(M) \to N$ telle que $\bar{g} \circ \gamma = q$. L'application $A \times \Gamma_2(M) \to N$ definie par $(a,\gamma(x)) \to aq(x)$ est Z-bilineaire, donc il existe une unique application Z-lineaire g: $A \otimes_Z \Gamma_2(M) \to N$ rendant commutatif le diagramme.

$$\begin{tikzcd} A \times \Gamma_2(M) \arrow[r] \arrow[d] & N \\ A \otimes_Z \Gamma_2(M) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

où la fléche verticale est canonique. Ceci nous dit qu'il existe une application Z-lineaire y telle que $g \circ \gamma_1 = q$. De plus, il est evident que g est A-lineaire.

Pour ce qui est de l'unicité de g, supposons qu'il existe une application A-linéaire h: $A \otimes_Z \Gamma_2(M) \to N$ telle que $h \circ \gamma_1 = q$. Donc $h \circ \gamma_1 = g \circ \gamma_1$ et ceci nous dit que coincident sur $\mathrm{im}(\gamma_1)$. Si l'on démontre que $\mathrm{Im}(\gamma_1)$ engendre $A \otimes_Z \Gamma_2(M)$ en tant que A-module alors $h = q$.

Les generateurs de $A \otimes_Z \Gamma_2(M)$ en tant que A-module sont de la forme $1 \otimes \gamma(x)$ avec $x \in M$. Comme les $\gamma(x)$ engendrent $\Gamma_2(M)$ en tant que A-module, les $\gamma_1(x) = 1 \otimes \gamma(x)$ engendrent $A \times_Z \gamma_2(M)$. Ainsi si $u \in A \otimes_Z \Gamma_2(M)$, on peut ecrire

$$u = \sum_i ui \otimes \gamma(x_i) = \sum_i a_i(1 \otimes \gamma(x_i)) = \sum_i a_i \, \gamma_1(x_i)$$

(sommes finies), avec $a_i \in A$ et $x_i \in M$, pour tout i. L'assertion est ainsi demontré.

6. APPLICATIONS QUASI-QUADRATIQUES. Une condition nécessaire et suffisante pour que q: $M \to N$ soit une application A-quasi-quadratique est que: (i) pour tout $(a,x) \in A\times M$, $q(ax) = a^2q(x)$, (ii) l'application ϕ: $M\times M \to N$, associée a q est Z-bilinéaire.

Soit $F_\circ(A,M,N)$ le A-module des applications $f_\circ$: $A\times M \to N$ qui verifient les relations suivantes:

(1) $f_\circ(a+b,x) + f_\circ(a-b,x) = 2f_\circ(a,x) + 2f_\circ(b,x)$

(2) $f_\circ(a,x+y)+f_\circ(a,x-y) = 2f_\circ(a,x) + 2f_\circ(a,y)$

(3) $f_\circ(ab,x) = f_\circ(a,bx) + a^2f_\circ(b,x)$

quels que soient $a,b \in A$ et $x,y \in M$.

PROPOSITION 6.1. Il existe une application A-lineaire β: $Q_1(A,M,N) \to F_\circ(A,M,N)$ dont le noyau est $Q_\circ(A,M,N)$, c'est a dire, la suite $0 \to Q_\circ(A,M,N) \to$ $\to Q_1(A,M,N) \xrightarrow{\beta} F_\circ(A,M,N)$ est exacte.

Pour tout $q \in Q_1(A,M,N)$, on note β_q: $A\times M \to N$ l'application définie par $\beta_q(a,x) = q(ax) - a^2q(x)$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in M$. Montrons d'abord que $\beta_q \in F_\circ(A,M,N)$. En effet, $\beta_q(a+b,x) + \beta_q(a-b,x) = q((a+b)x) - (a+b)^2 q(x)+$

$+ q((a-b)x)-(a-b)^2q(x) = q(ax+bx) + q(ax-bx) - 2a^2q(x)-$
$- 2b^2q(x) = 2q(ax) + 2q(bx)-2a^2q(x)-2b^2q(x) =$
$= 2(q(ax)-a^2q(x)) + 2(q(bx)-b^2q(x)) = 2\beta_q(a,x)+2\beta_q(b,x)$
quels que soient $a,b \varepsilon A$ et $x \varepsilon M$.

De même $\beta_q(a,x+y)+\beta_q(a,x-y) = q(a(x+y))-a^2q(x+y)+$
$+ q(a(x-y))-a^2q(x-y) = q(ax+ay) + q(ax-ay)-$
$- a^2(q(x+y)+q(x-y)) = 2q(ax)+2q(ay)- a^2(2q(x)+2q(y))=$
$= 2(q(ax)-a^2q(x))+2(q(ay)-a^2q(y)) = 2\beta_q(a,x)+2\beta_q(a,y)$,
quels que soient $a \varepsilon A$ et $x,y \varepsilon M$. Finalment,
$\beta_q(ab,x) = q(abx)-a^2b^2q(x) = q(abx)-a^2q(bx)+a^2q(bx)-$
$- a^2b^2q(x) = \beta_q(a,bc)+a^2\beta_q(b,x)$ quels que soient
$a,b \varepsilon A$ et $x \varepsilon M$.

D'autre part il est clair que l'application
β: $Q_1(A,M,N) \to F_o(A,M,N)$ définie par $q \to \beta_q$ est A-linéaire et que $q \varepsilon \ker(\beta)$ si et seulement si $q(ax) - a^2q(x) = 0$ pour tout $a \varepsilon A$ et pour tout $x \varepsilon M$, ou encore, si et seulement si q est une application A-quasi-quadratique. Donc $\ker(\beta) = Q_o(A,M,N)$ ce qui achéve la démonstration de la proposition.

Soit $F_1(A,M,N)$ le A-module des applications $f:AxMxM \to N$ qui sont additives en ses trois variables et qui verifient. $f(ab,x,y) = f(a,bx,y)+af(b,x,y)$ quels que soient a,b dans A et pour x,y parcourant M.

LEMME 6.2. Supposons que l'homothétie définie par 2 dans N soit injective et soient $q:M \to N$ une application semi-quadratique et $\phi: M\times M \to N$ l'application associée a q. Si pour tout a dans A et pour tout (x,y) dans MxM on a $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$, alors q est une application A-quadratique.

En effet, $2q(ax) = \phi(ax,ax) = a^2\phi(x,x) = 2a^2q(x)$, donc $q(ax) = a^2q(x)$, quels que soient a dans A et x dans M.

PROPOSITION 6.3. Il existe une application A-linéaire $\gamma: Q_1(A,M,N) \to F_1(A,M,N)$ dont le noyau est $Q(A,M,N)$, i.e une suite exacte de A-modules

$$0 \to Q(A,M,N) \to Q_1(A,M,N) \xrightarrow{\gamma} F_1(A,M,N).$$

Si $q \in Q_1(A,M,N)$ on note $\gamma_q: A\times M\times M \to N$ l'application definie par $\gamma_q(a,x,y) = \phi(ax,y) - a\phi(x,y)$ pour tout a dans A et (x,y) dans MxM, où ϕ est l'application associée a q.

Il est evident que $\gamma_q \in F_1(A,M,N)$, i.e, que γ_q est additive dans ses trois variables et que γ_q verifie $\gamma_q(ab,x,y) = \gamma_q(a,bx,y) + a\,\gamma_q(b,x,y)$, quels que soient a,b dans A et x,y dans M.

· D'autre part il est clair que l'application $\gamma : Q_\circ(A,M,N) \to F_1(A,M,N)$ définie par $q \to \gamma_q$ est A-linéaire et $q \in \ker(\gamma)$ si et seulement si $\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$ pour tout a dans A et x,y dans M, i.e, l'application ϕ associée a q est A-bilinéaire. Donc $\ker(\gamma) = Q(A,M,N)$, ce qui achéve la démonstration de la proposition.

Soit $F_\circ(A,M,N)$ le A-module des applications $f : AxMxM \to N$ qui verifient les conditions suivantes:

i) elles sont additives et symétriques en la deuxiéme et troisiéme variables;

ii) $f(ab,x,y) = f(a,bx,y) + a^2 f(b,x,y)$ quels que soient a,b dans A et x,y dans M,

iii) $f(a+b,x,y) + f(a-b,x,y) = 2f(a,x,y)+2f(b,x,y)$, quels que soient a,b dans A et x,y dans M.

<u>PROPOSITION 6.4</u>. Si l'homothetie définie par 2 dans N est injective il existe une application A-linéaire $\beta' : Q_1(A,M,N) \to F_\circ^!(A,M,N)$ dont le noyau est $Q_\circ(A,M,N)$, c'est à dire une suite exacte de A-modules

$$0 \to Q_\circ(A,M,N) \to Q_1(A,M,N) \xrightarrow{\beta'} F_\circ^!(A,M,N).$$

Si $q \in Q_1(A,M,N)$ on note $\beta'_q : AxMxM \to N$ l'application definie par $\beta'_q(a,x,y) = \phi(ax,ay) - a^2\phi(x,y)$ pour tout

a dans A et x,y dans M et où $\phi: M\times M \to N$ est l'application associée a q. Il est facile de voir que $\beta'_q \in F'_\circ(A,M,N)$ et que l'application $\beta': Q_1(A,M,N) \to$ $\to F'_\circ(A,M,N)$ définie par $q \to \beta'_q$ est A-linéaire. De plus, $q \in \ker(\beta')$ si et seulement si $\phi(ax,ay) =$ $= a^2 \phi(x,y)$, pour tout a dans A et x,y dans M. Ou encore si et seulement si q est une application A-quasi-quadratique. Donc $\ker(\beta') = Q_\circ(A,M,N)$, ce qui achéve la démonstration de la proposition.

<u>PROPOSITION 6.5</u>. Si L est un A-module libre de rang 1, l'application A-lineaire $\beta: Q_1(A,L,N) \to F_\circ(A,L,N)$ est surjective.

En effet, soit $f \in F_\circ(A,L,N)$ et $\{e\}$ une base de L. On définit $q: M \to N$ par $q(x) = f(a,e)$, si $x = a\,e$, où $a \in A$. Il est clair que q est une application A-semi-quadratique, car $q(x+y)+q(x-y)=f(a+b,e)+f(a-b,e)=$ $= 2f(a,e)+2f(b,e)= 2q(x)+ 2q(y)$, si $x = a\,e$ et $y = b\,e$.

Il reste a montrer que $\beta(q) = f$. Pour cela, calculons:

$$\beta_q(b,x) = q(bx)-b^2q(x) = f(ba,e) - b^2f(a,e) =$$

$$= f(b,a\,e) + b^2f(a,e)-b^2f(a,e)-f(b,a\,e) = f(b,x).$$

7. REPRÉSENTATION DES APPLICATIONS QUASI-QUADRATIQUES.

PROPOSITION 7.1. Pour tout A-module M, il existe un A-module $\Gamma_\circ(M)$ et une application A-quasi-quadratique $\gamma_\circ : M \to \Gamma_\circ(M)$ telle que toute application A-quasi-quadratique $q : M \to N$ se factorise de façon unique par une application A-lineaire $g_\circ : \Gamma_\circ(M) \to N$, i.e, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma_\circ"'] & N \\ \Gamma_\circ(M) \arrow[ur, dashed, "g_\circ"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif, ou encore, il existe un isomorphisme de A-modules $Q_\circ(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma_\circ(M),N)$ considerons $\Gamma_2(M)$ avec sa structure naturalle de groupe abelien et designons par R le sous-A-module de $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)$ engendré par les éléments de la forme: $1 \otimes \gamma(ax) - a^2 \otimes \gamma(x)$ où a parcourt A et x parcourt M. Notons $\Gamma_\circ(M) = A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)_{\;R}$ le A-module quotient et par $\gamma_\circ : M \to \Gamma_2(M) \to A \underset{Z}{\times} \Gamma_2(M) \to \Gamma_\circ(M)$ l'application évidente composée, où C est la surjection canonique. On voit que $\gamma_\circ$ est une application A-quasi-quadratique, car $\gamma_\circ(x+y)+\gamma_\circ(x-y) = c(1 \otimes \gamma(x+y))+c(1 \otimes \gamma(x-y)) =$

$$= c(1 \otimes (\gamma(x+y)+\gamma(x-y))) = c(1 \otimes (2\gamma(x) + 2\gamma(y))) =$$

$$= c(2(1 \otimes \gamma(x)) + 2(1 \otimes \gamma(y))) = 2\,\gamma_\circ(x) + 2\gamma_\circ(y)$$

et $\gamma_\circ(a\,x) = c(1 \otimes \gamma(a\,x)) = c(1 \otimes \gamma(a\,x) - a^2 \otimes \gamma(x) +$ $+ a^2 \otimes \gamma(x)) = c(a^2(1 \otimes \gamma(x)) = a^2\, c(1 \otimes \gamma(x)) =$ $= a^2\, \gamma_\circ(x)$, quels que soient x,y dans M et pour tout a dans A.

Soit, d'autre part, q une application A-quasi-quadratique; q est une application Z-quadratique donc il existe une unique application Z-lineaire $g:\Gamma_2(M) \to N$ telle que $g_\circ\gamma = q$. L'application définie par $(a,\gamma(x)) \to a\, q(x)$ de $A \times \Gamma_2(M) \to N$ est Z-bilinéaire, donc elle se factorise de façon unique par une application Z-linéaire $\bar{g}$: $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M) \to N$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd} A \times \Gamma_2(M) \arrow[r] \arrow[d] & N \\ A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M) \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, $\bar{g}$ est A-linéaire, car $\bar{g}(b(a \otimes \gamma(x)) =$ $= \bar{g}(b\,a \otimes \gamma(x)) = b\,a\,q(x) = b(\bar{g}(a \otimes \gamma(x))$, pour a,b dans A et x dans M.

De plus $\bar{g}(R) = 0$. Comme $\bar{g}(1 \otimes \gamma(ax) - a^2 \otimes \gamma(x)) =$ $= q(ax) - a^2 q(x) = 0$ pour tout a dans A et pour tout x dans M, alors $\bar{g}(R) = 0$ et ceci démontre l'existence de $g_\circ$, i.e, on vient de démontrer qu'il existe une application A-linéaire $g_\circ:\Gamma_\circ(M) \to N$ telle que $g_\circ.\gamma_\circ = q$.

Supposons qu'il existe une autre application A-linéaire $h:\Gamma_o(M) \to N$ verifiant $h_o g = q$. Alors $h_o\gamma_o = g_o \cdot \gamma_o$ entraîne que h et g_o coïncident sur $Im(\gamma_o)$ et si l'on démontre que $Im(\gamma_o)$ engendre $\Gamma_o(M)$ en tant que A-module, alors $h = g_o$. Or, les générateurs de $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)$, en tant que A-module, sont de la forme $1 \otimes \gamma(x)$ avec $x \in M$. Comme les $\gamma(x)$ engendrent $\Gamma_2(M)$ en tant que A-module, alors les $\gamma_o(x) = c(1 \otimes \gamma(x))$ engendrent $\Gamma_o(M)$.

Soit R' le sous-A-module de $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)$ engendré par les éléments de la forme: $1 \otimes \gamma(a\,x) - a^2 \otimes \gamma(x)$ et $1 \otimes (\gamma(ax+y)-\gamma(ax)-\gamma(y)) - a \otimes (\gamma(x+y)-\gamma(x)-\gamma(y))$ et considerons le A-module quotient $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)/_{R'}$. Il existe alors un isomorphisme de A-modules

$$\Gamma_2(M) \cong A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)/_{R'} .$$

En effet considerons l'application

$$g:\Gamma_2(M) \cong A \underset{A}{\otimes} \Gamma_2(M) \longrightarrow A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)/_{R'}$$

définie par $a \otimes \gamma(x) \longrightarrow \overline{a \otimes \gamma(x)}$ où la barre désigne classe module R'. Montrons que g est un isomorphisme de A-modules. En effet considérons l'application A-lineaire $g:\Gamma_2(M) \longrightarrow A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)\ _{R'}$ définie par

$\gamma(x) \to \overline{1 \otimes \gamma(x)}$, où la barre désigne classe module R'.

D'autre part, l'application A-lineaire $A \otimes_Z \Gamma_2(M) \to \Gamma_2(M)$ définie par $a \otimes \gamma(x) \to a\,\gamma(x)$ est surjective et s'annule sur R' donc elle se factorise par

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_Z \Gamma_2(M) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_2(M) \\
A \otimes_Z \Gamma_2(M)_{R'} \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

où la fleche verticale est canonique. Il est evident que h est surjective et comme $g_\circ h = id$, alors h est aussi injective, donc un isomorphisme de A-modules.

Considerons l'application A-lineaire surjective

$$h_2 : A \otimes_Z \Gamma_2(M)_R = \Gamma_\circ(M) \to \Gamma_2'(M) = A \otimes_Z \Gamma_2(M)_{R'}$$

définie par $C(a \otimes \gamma(x)) \to C'(a \otimes \gamma(x))$, où

$C : A \otimes_Z \Gamma_2(M) \to \Gamma_\circ(M)$ et $C' : a \otimes_Z \Gamma_2(M) \to \Gamma_2(M)$ sont les surjections canoniques.

Considerons aussi l'application A-linéaire

$$h_2 : A \otimes_Z \Gamma_2(M)_R = \Gamma_\circ(M) \longrightarrow \Gamma_2(M) \cong A \otimes_A \Gamma_2(M)$$

définie par $C(a \otimes \gamma(x)) \to a\,\gamma(x)$; on remarque que h_2 fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \times_{Z} \Gamma_2(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "C"'] & \Gamma_2(M) \\
\Gamma_o(M) \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

et comme h est surjective, il en est de même de h_2.

On a donc deux suites exactes de A-modules, a savoir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(R') \arrow[r] & \Gamma_o(M) \arrow[r, "h_2'"] \arrow[d, equal] & \Gamma_2'(M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(h_2) \arrow[r] & \Gamma_o(M) \arrow[r, "h_2"] & \Gamma_2(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et il est evident que $\ker(h_2) = C(R')$. On a donc la suite exacte de A-modules

$$0 \to C(R') \to \Gamma_o(M) \xrightarrow{h_2} \Gamma_2(M) \to 0$$

<u>PROPOSITION 7.2.</u> Pour tout A-module M, la suite exacte $0 \to C(R') \to \Gamma_o(M) \xrightarrow{h_2} \Gamma_2(M) \to 0$ est scindée.

En effet, soit $h_2' : \Gamma_2(M) \to \Gamma_o(M)$ l'application definie par $\gamma(x) \to C(1 \otimes \gamma(x))$, on a $h_2\, h_2'(\gamma(x)) =$ $= h_2(C(1 \otimes \gamma(x))) = \gamma(x)$, donc $h_2 \circ h_2' = id_{\Gamma_2(M)}$ ..

<u>COROLLAIRE 7.3.</u> Pour tout A-module M, $Q_o(A,M,N) \cong$ $\cong Q(A,M,N) \oplus Hom_A(C(R'),N)$.

PROPOSITION 7.4. Si M est un A-module projectif $F(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(C(R'),N)$.

En effet, on a les suites exactes (Prop. 3.3)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Q(A,M,N) & \to & Q_\circ(A,M,N) & \to & F(A,M,N) & \to & 0 \quad \text{et} \\ & & \| & & \| & & & & \\ 0 & \to & Q(A,M,N) & \to & Q_\circ(A,M,N) & \to & \mathrm{Hom}_A(C(R'),N) & \to & 0 \quad \text{donc} \end{array}$$

$$F(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(C(R'),N).$$

PROPOSITION 7.4. Si L est un A-module libre de type fini, alors $\Gamma_1(L) = A \otimes_Z \Gamma_2(L)$ est un A-module libre de type fini.

$\Gamma_2(L)$ est un Z-module libre de type fini. Soit $\gamma(e_i)_{i=1,\ldots n}$, une base de $\Gamma_2(L)$ comme Z-module et $g:\Gamma_2(L) \to A \underset{Z}{x} \Gamma_2(L)$ l'application Z-lineal définie par $g(\gamma(x)) = 1 \otimes \gamma(x)$. Il est clair que $g(\gamma(e_i))_{i=1,\ldots n}$ est une base de $A \otimes_Z \Gamma_2(L)$ comme A-module.

COROLLAIRE 7.5. Si P est un A-module projectif de type fini, alors $\Gamma_1(P) = A \otimes_Z \Gamma_2(P)$ est un A-module projectif de type fini.

En effet, il existe un A-module libre de type fini L et un A-module projectif P' tel que $P \oplus P' = L$, donc $A \otimes_Z L = A \otimes_Z (P \oplus P') = A \otimes_Z P \oplus A \otimes_Z P'$ est un A-module libre de type fini, donc $A \otimes_{Z} L$ est un A-module pro - jectif de type fini et $A \otimes_{Z} P$ est un A-module projectif de type fini.

<u>PROPOSITION 7.6</u>. Si $\Gamma_{\circ}(M)$ est projectif de type fini, alors $\Gamma_2(M)$ est projectif de type fini.

En effet, la suite exacte $0 \longrightarrow C(R') \longrightarrow \Gamma_{\circ}(M) \xrightarrow{h_2}$ $\longrightarrow \Gamma_2(M) \longrightarrow 0$ est Scindée, donc $\Gamma_{\circ}(M) \cong \Gamma_2(M) \oplus C(R')$.

<u>PROPOSITION 7.7</u>. Si L est un A-module libre de type fini, alors $\Gamma_{\circ}(L)$ est un A-module libre de type fini.

$\Gamma_{\circ}(L) = \Gamma_1(L)/_{R}$, où $\mathbb{R}$ est le sous A-module de $\Gamma_1(L)$ engendré par les éléments de la forme $\gamma(ax)-a^2 \otimes \gamma(x)$ et $\Gamma_1(L)$ est un A-module libre de type fini (prop. 7.4), donc R est aussi un A-module libre de type fini. Si $\gamma_1(e_i)_{i=1,\ldots n}$ est une base de $\Gamma_1(L)$, $C(1 \otimes \gamma_1(e_i))_{i,1,\ldots n}$ est une base de $\Gamma_{\circ}(L)$. En effet. $\alpha_1\ C(1 \otimes \gamma_1(e_1)) +$ $+\ldots+ \alpha_n\ C(1 \otimes \gamma(e_n)) = 0$ et seulement si $C(\alpha_1(1 \otimes \gamma(e_1))+$ $+\ldots+ \alpha_n(1 \otimes \gamma(e_n)) = 0$ si et seulement si $\alpha_1(1 \otimes \gamma(e_1))+$ $+\ldots+ \alpha_n(1 \otimes \gamma(e_n)) \in R \subset \Gamma_1(L)$ si et seulement si $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

D'autre part si $C(a \otimes \gamma(x))$ est un élément quelconque de $\Gamma_\circ(L)$, $a \otimes \gamma(x) \in \Gamma_1(L)$, donc $a \otimes \gamma(x) =$

$= \alpha_1(1 \otimes \gamma(e_1)) + \ldots + \alpha_n(1 \otimes \gamma(e_n))$, donc $C(a \otimes \gamma(x)) =$

$= \alpha_1 \, C(1 \otimes \gamma(e_1)) + \ldots + \alpha_n \, C(1 \otimes \gamma(e_n))$.

COROLLAIRE 7.8. Si P est un A-module projectif de type fini, alors $\Gamma_\circ(P)$ est un A-module projectif de type fini.

Considerons l'application $h_1 : \Gamma_1(M) \longrightarrow \Gamma_2(M)$ définie par $h_1(a \otimes \gamma(x) = a\gamma(x)$. h_1 est l'application Z-lineaire qui fait commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \times \Gamma_2(M) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \Gamma_2(M) \\ A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M) \arrow[ur, dashed, "h_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(Z-lineaire)}$$

où la fleche verticale est canonique et h est l'application Z-bilinéaire definie $(a,\gamma(x)) \longrightarrow a\gamma(x)$. h_1 est aussi A-linéaire. En effet $h_1(b(a \otimes \gamma(x)) = h_1$ $(ba \otimes \gamma(x)) = ba\,\gamma(x) = b\,h_1(a \otimes \gamma(x))$ et il est evident que $\ker(h_1) = \ker(h_1')$ ou $h_1' : / A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M) \longrightarrow A \underset{Z}{\times} \Gamma_2(M)/_{R'}$ est l'application A-linéaire définie par $a \otimes \gamma(x) \longrightarrow$ $\longrightarrow C'(a \otimes \gamma(x))$ et où R' est le sous-A-module de $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)$ engendré par les éléments de la forme $1 \otimes \gamma(ax) -$ $- a^2 \otimes \gamma(x)$ et $1 \otimes (\gamma(ax+y) - \gamma(ax) - \gamma(y)) - a \otimes (\gamma(x+y) -$ $- \gamma(x) - \gamma(y))$. On a donc la suite exacte $0 \to R' \longrightarrow$

$\longrightarrow \Gamma_1(M) \xrightarrow{h} \Gamma_2(M) \longrightarrow 0.$

PROPOSITION 7.9. Pour tout A-module M, la suite exacte $0 \longrightarrow R' \longrightarrow \Gamma_1(M) \longrightarrow \Gamma_2(M) \longrightarrow 0$ est scindée.

En effet, soit $h_1' : \Gamma_2(M) \longrightarrow \Gamma_1(M)$ l'application définie par $\gamma(x) \longrightarrow 1 \otimes \gamma(x)$, on a $h_1 \circ h_1'(\gamma(x)) =$ $= h_1(1 \otimes \gamma(x)) = \gamma(x)$, donc $h_1 \circ h_1' = 1d_{\Gamma_2(M)}$.

COROLLAIRE 7.10. Pour tout A-module M

$$Q_1(A,M,N) \cong Q(A,M,N) \oplus \mathrm{Hom}_A(R',N).$$

Considerons maintenant l'application A-linéaire $h_\circ : \Gamma_1(M) = A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M) \longrightarrow \Gamma_\circ(M)$ définie par $a \otimes \gamma(x) \to$ $\to C(a \otimes \gamma(x))$, $h_\circ$ est évidement surjective et $\ker(h_\circ) =$ $= R$, où R est le sous-A-module de $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_2(M)$ engendré par les éléments de la forme $1 \otimes \gamma(ax) - a^2 \otimes \gamma(x)$.
On a donc la suite exacte $0 \longrightarrow R \longrightarrow \Gamma_1(M) \xrightarrow{h_\circ}$ $\xrightarrow{h_\circ} \Gamma_\circ(M) \longrightarrow 0$, donc la suite exacte $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Gamma_\circ(M),N) \longrightarrow$ $\to \mathrm{Hom}_A(\Gamma_1(M),N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(\Gamma_\circ(M),N) \longrightarrow$ $\to \mathrm{Ext}_A^1(\Gamma_1(M),N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(R,N)$ et si M est projectif de type fini, alors $\Gamma_\circ(M)$ est projectif de type fini et on a la suite exacte.

$0 \longrightarrow Q_\circ(A,M,N) \longrightarrow Q_1(A,M,N) \longrightarrow Hom_A(R,N) \longrightarrow 0$

et par proposition 6.1, on a aussi la suite exacte

$0 \longrightarrow Q_\circ(A,M,N) \longrightarrow Q_1(A,M,N) \xrightarrow{\beta} F_\circ(A,M,N)$ et on peut se demander si $F_\circ(A,M,N) \cong Hom_A(R,N)$. Evidemment si β est surjective nous aurions cet isomorphisme mais nous n'avons pas pû établir la surjectivité de β, même si M est un A-module libre de type fini et de rang égal ou superiur a deux. Néannois par proposition 6.5 on a. Si M est un A-module libre de rang 1 $F_\circ(A,M,N) \cong Hom_A(R,N)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.M. Gleason, "The definition of quadratic form". Amer. Math. Monthly 73(1966), 1049-1056.

[2] G, Arnaud, "Sur les formes semi-quadratiques" THESE (Pour obtenir le grade de Docteur de Spécialité(Mathématiques) 1971; MR 50 ≠ ≠ 7220.

[3] O. Zariski- P. Samuel. "Commutative algébre, vol 1, Van Nostrand, Princeton 1958.

[4] H. Cartan and S. Eilenberg "Homological Algebra". Princeton 1956.

[5] A.Micali y O.E. Villamayor. "Estructuras Algebraicas(IV) Serie publicaciones O.E.A. Monografía N°16.

[6] N. Bourbaki, Algébre chap 9, Hermann, París 1959.

[7] P. Corsini et A.Micali, Torsion dans les algébres universelles, Journal of Mathematics, Tokushima University 3 (1969), 57,74.

[8] P. Corsini et A.Micali, Etude de certaines algébres associatives graduées, Anais da Academia Brasileira de Ciências, Rio de Janeiro.

[9] A. Micali "Estructuras Algebraicas VI. Serie Publicaciones O.E.A. (A paraître).

[10] A. Adrien Albert. "Structures of Algebres".