NOTAS DE MATEMATICA
N°46

# ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE MEDIDAS ESPECTRALES EXTENDIBLES

POR

T.V. PANCHAPAGESAN

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1981

# ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE MEDIDAS ESPECTRALES EXTENDIBLES

POR

T.V. PANCHAPAGESAN+

RESUMEN

Si E(.) es una medida espectral en un espacio de Banach X, definida en un anillo R de conjuntos, daremos algunas caracterizaciones para que E(.) admita una extensión, en forma única, al $\sigma$-anillo generado por R, como una medida espectral en X.

INTRODUCCION. En [5], se obtiene que cada medida espectral, E(.), definida en un anillo de conjuntos R, con su rango contenido en un algebra de Boole (B.A) de proyecciones $\mathbb{P}$ en un espacio de Banach (complejo) X admite una extensión, en forma única, a una medida espectral $\overline{E}(.)$ en S(R), el $\sigma$-anillo generado por R cuando $\mathbb{P}$ es $\sigma$-completo en el sentido de Bade [1]. En este caso, el rango de $\overline{E}(.)$ esta contenido en $\overline{\mathbb{P}}^s$ en B(X), con respecto a la topología fuerte de operadores.

---

+ Auspiciado por los proyectos C-80-149,150 del C.D.C.H. de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

El mismo resultado fue obtenido en [4], cuando R es un algebra de conjuntos. El objetivo de este artículo es dar algunas caracterizaciones de tales medidas espectrales extendibles.

<u>1. PRELIMINARES.</u> Através de este trabajo, X denotará un espacio de Banach complejo y B(X) el algebra de Banach de todos operadores acotados en X con la norma usual. Un algebra de Boole (B.A) de proyecciones $\mathbb{P}$ en X en un subconjunto conmutativo de B(X) que cumple las condiciones siguientes:

i) $P^2 = P$, $P \in \mathbb{P}$

ii) $0 \in \mathbb{P}$

iii) Si $P \in \mathbb{P}$, entonces $I-P \in \mathbb{P}$

iv) Para P, Q en $\mathbb{P}$

$$P \vee Q = P+Q - PQ \in \mathbb{P}$$

$$P \wedge Q = PQ \in \mathbb{P}$$

Un algebra de Boole $\mathbb{P}$ de proyecciones en X se llamará $\sigma$-completo o completo cuando $\mathbb{P}$ es $\sigma$-completo o completo respectivamente, en el sentido de Bade [1]

<u>LEMA 1.1.</u> Un B.A. $\mathbb{P}$ de proyecciones en X está contenido en un B.A. de proyecciones $\sigma$-completo en X, si para todo $x \in X$,

$$N(x) = \{Ex: E \in \mathbb{P}\}$$

es relativamente debilmente compacto en X. Ver Panchapagesan [4, Lema 5].

DEFINICION 1.2 Un espacio de Banach X tiene la propiedad B-P, si cada serie de elementos de X, es convergente en la topología de X, siempre que la serie es debilmente no condicionalmente convergente.

LEMA 1.3. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de B-P, si y sólo si X no contiene a ninguna copia isomórfica de $c_o$ .
Ver Bessaga y Pelczyniski [2].

## 2, TEOREMA PRINCIPALES

DEFINICION 2.1. Sea $E(.): R \to B(X)$, R un anillo de conjuntos. E(.) se llamará una medida espectral en X, si E(.) cumple las condiciones siguientes:

i) $E(\phi) = 0$

ii) $E(\sigma \cap \delta) = E(\sigma)E(\delta)$, $\sigma, \delta \in R$

iii) $E(\bigcup_1^\infty \sigma_i)\, x = \lim_n \sum_1^n E(\sigma_i)x$, $x \in X$

siempre que

$$\{\sigma_i\}_1^\infty \subset R,\ \sigma_i \cap \sigma_j = \phi,\ i \neq j \text{ y } \bigcup_1^\infty \sigma_i \in R.$$

Notamos que si E(.) es una medida espectral en X, definida en el anillo R, entonces el rango de $E(.)$ es conmutativo y está contenido en el algebra de Boole $B_o$ de proyecciones, donde

$$B_o = \{E(\sigma): \sigma \in R\} \cup \{I-E(\sigma): \sigma \in R\} .$$

En lo que sigue R denota un anillo de conjuntos y $S(R)$ el $\sigma$-anillo generado por R.

TEOREMA 2.2. La medida espectral $E(.):R \to B(X)$ se puede extender a una medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$, sí y sólo si para $x \in X$, $E(R)x$ es relativamente debilmente compacto en X, donde

$$E(R)x = \{E(\sigma)x: \sigma \in R\} .$$

Cuando la extensión $\bar{E}(.)$ existe como una medida espectral en $S(R)$, entonces $\bar{E}(.)$ es única.

DEMOSTRACION. $E(R) \subset B_o$, donde $B_o = \{E(\sigma): \sigma \in R\} \cup \{I-E(\sigma): \sigma \in R\}$ es un B.A. de proyecciones en x. Si $E(R)x$ es relativamente debilmente compacto para todo $x \in X$, entonces

$$N(x) = \{Px: P \in B_o\} = E(R)x \cup \{x-E(R)x\}$$

es también relativamente debilmente compacto. Por lo tanto, por el Lema 1.1, $B_o$ está contenido en un B.A. $\sigma$-completo de proyecciones en X, lo cual implica que el rango $E(R)$ está contenido en un B.A. $\sigma$-completo de proyecciones en X.

Ahora, usando el teorema 6.5 de Panchapagesan and Shivappa Veerappa Palled[5], tenemos que $E(.)$ es extendible, en forma única, a una medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$.

Recíprocamente, si $E(.)$ es extendible a una medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$, entonces para todo $x \in X$, $\bar{E}(.)x$ es una medida vectorial acotada en $S(R)$, que es una extensión de medida vectorial $E(.)x$ en $R$. Por lo tanto, del teorema de extensión de Kluvanek [3, p.178] el rango $E(R)x$ es relativamente debilmente compacto en $X$.

<u>TEOREMA 2.3</u>. La medida espectral $E(.): R \to B(X)$ admite una extensión $\bar{E}(.)$ en $S(R)$, como una medida espectral en $S(R)$, en forma única, si y sólo si el rango de $E(.)$ está contenido en un B.A,$\sigma$-completo de proyecciones en $X$.

<u>DEMOSTRACION</u>. A la luz del teorema 6.5 de [5] , basta probar que la condición es necesaria. Del teorema 2.2 se sigue que $E(R)x$ es relativamente debilmente compacto para $x \in X$ y el mismo argumento en la primera parte de la demostración del teorema 2.2 prueba la necesidad de la condición. La unicidad de la extensión es una consecuencia del teorema 2.2.

<u>TEOREMA 2.4</u>. La medida espectral $E(.):R \to B(X)$ se puede extender a una medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$, en forma única, si y sólo si, para todo $x \in X$, $E(R)x \subset Y_x$, donde $Y_x$ es

debilmente secuencialmente completo en X y que

$$\sup_{\sigma\varepsilon R} \| E(\sigma) \| < \infty .$$

DEMOSTRACION. Del teorema de extensión en Kluvanek[3, p.178], se sigue que cuando $\sup_{\sigma\varepsilon R} \| E(\sigma) \| < \infty$, $E(R)x$ es relativamente debilmente compacto si y sólo si $E(R)x \subset Y_x$, $Y_x$ debilmente secuencialmente completo en X. Ahora, el teorema es una consecuencia de los teoremas 2.2 y 2.3 y el hecho que un B.A. $\sigma$-completo de proyecciones es acotado. (Ver Bade[1]).

TEOREMA 2.5. Sea $E(.): R \to B(X)$ satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) de la definición 2.1 y además la condición

(iii) Para $x \varepsilon X$, $x^* \varepsilon X^*$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^* E(\sigma_i)x = x^* E(\bigcup_1^{\infty} \sigma_i)x,$$

siempre que

$$\{\sigma_i\}_1^{\infty} \subset R, \ \sigma_i \cap \sigma_j = \phi, \ i \neq j \quad y \quad \bigcup_1^{\infty} \sigma_i \ \varepsilon \ R.$$

Entonces E(.) es una medida espectral en R. E(.) se puede extender como una medida espectral en S(R) si y sólo si, para todo $x \varepsilon X$, existe $y_x \varepsilon X$ tal que

$$\sum x^* E(\sigma_i)x = x^* y_x, \qquad (*)$$

siempre que

$$\{\sigma_i\}_1^\infty \subset R, \quad \sigma_i \cap \sigma_j = \phi, \quad i \neq j \ .$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Del teorema de Orlixz-Pettis, E(.) es numerablemente aditiva en la topología fuerte de operadores y así E(.) es una medida espectral en R. La condición(X:), es equivalente a la aserción que E(R)x es relativamente debilmente compacto, (por la equivalencia de (vi) y (iii) del teorema de extensión en Kluvanek[3, pp.178-179]). La conclusión se sigue del teorema 2.2.

Usando el resultado de Uhl[6] , obtenemos otra caracterización.

<u>TEOREMA 2.6</u>. Sea $E(.) : R \to B(X)$ una medida espectral. E(.) admite una extensión $\bar{E}(.)$ en S(R), en forma única, como una medida espectral, si y sólo si, para todo $x \in X$ existe una medida $\mu_x$ no negativa, finitamente aditiva y acotada en R tal que $\mu_x(\sigma) \to 0$, $\sigma \in R$ implica que $E(\sigma)x \to 0$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Por la equivalencia de (i),(ii) y (Xii) del teorema de extensión en Kluvanek [3] ó por Uhl[6] tenemos que la condición es equivalente a la aserción que E(R)x es relativamente debilmente compacto, para todo $x \in X$. Ahora, la conclusión se sigue del teorema 2.2.

<u>TEOREMA 2.7</u>. Sea $E(.) : R \to B(X)$ una medida espectral.E(.)

admite una extensión a la medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$ si y sólo si $E(.)$ cumple las condiciones siguientes:

i) $\sup_{\sigma \varepsilon R} \| E(\sigma) \| < \infty$ ;

ii) Si $\mu_x^*: H(R) \rightarrow R^+$ , $H(R)$ el $\sigma$-anillo hereditario generado por R, donde $\mu_x^*$ se define por

$$\mu_x^*(\sigma) = \inf\{ \sum_{k=1}^{\infty} \| E(\sigma_K)x \| , \quad \bigcup_i^{\infty} \sigma_K \supset \sigma, \ \sigma_K \varepsilon R . K=1,2..\}$$

para $x \varepsilon X$, entonces $\mu_x^*(\sigma) < \infty$ para todo $\sigma \varepsilon S(R)$ y para todo $x \varepsilon X$.

iii) R es $r^*(E(.)x)$-denso en $S(R)$, para todo $x \varepsilon X$, en el sentido que dados $\sigma \varepsilon S(R)$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_x \varepsilon R$ tal que

$$\mu_x^* (\sigma \Delta \delta_x) < \varepsilon .$$

<u>DEMOSTRACION</u>: La condición es suficiente, a la luz del teorema 2.2 y de la equivalencia de las condiciones (ii) y (xi) del teorema de extensión en Kluvanek[3]. La condición es necesaria. En efecto, del teorema 2.3 el rango de $E(.)$ está contenido en un B.A. $\sigma$-completo de proyecciones en X, lo cual implica que (i) es cierta. Ya que $E(.)x$ admite extensión a $\bar{E}(.)x$ en $S(R)$, por la equivalencia de (i) y (xi) del teorema de extensión en Kluvanek[3], las condiciones (ii) y (iii) son ciertas.

Vamos a dar el último teorema de caracterización.

TEOREMA 2.8. Sea X un espacio de Banach que no contiene a ningún subespacio isomórfico a $c_o$ y sea $E(.):R\to X$ una medida espectral. Entonces, existe una medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$, que extiende $E(.)$ en forma única, si y sólo si

$$\sup_{\sigma\varepsilon R} \| E(\sigma) \| < \infty \qquad (*)$$

o equivalentemente, el rango de E en R está contenida en un B.A. acotado de proyecciones.

DEMOSTRACION. Primero, observamos que la condición (*) es equivalente a la condición que

$$\sup\{ \| E(\sigma) \| : \sigma \varepsilon B_o \} < \infty$$

donde

$$B_o = \{E(\sigma) : \sigma \varepsilon R\} \cup \{I-E(\sigma) : \sigma \varepsilon R\}$$

es un B.A. de proyecciones que contiene a $E(R)$.

Si X es un espacio de Banach que cumple la hipótesis del teorema, entonces por el lema 1.3 X tiene la propiedad de B-P. Si

$$\sup_{\sigma\varepsilon R} \| E(\sigma) \| < \infty ,$$

se tiene que para cada $x \in X$, la medida vectorial $E(.)x$ es acotada y $E(R)x \subset X$, donde $X$ tiene la propiedad de B-P. Por lo tanto, de la equivalencia de (ii) y (iv) del teorema de extensión en Kluvanek[3] y del teorema 2.2 la suficiencia de la condición se sigue.

La necesidad de la condición es una consecuencia del teorema 2.3 y del hecho que un B.A. $\sigma$-completo de proyecciones es acotado en $B(X)$.

<u>COROLARIO 2.9</u>. Una medida espectral $E(.)$ en $R$ en un espacio de Banach debilmente secuencialmente completo se puede extender a una medida espectral $\bar{E}(.)$ en $S(R)$ si y sólo si $E(R)$ es acotado en $B(X)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Se sigue del teorema 2.8 por el hecho de que $X$ no contiene a ningún subespacio isomórfico a $c_o$ ó del teorema 2.4 donde tomamos $Y_x = X$, para todo $x \in X$.

## BIBLIOGRAFIA


1. W.G. Bade, On Boolean algebras of projections and algebras of operators, Trans. Amer. Math. Soc. V.80 (1955), 345-360.

2. C. Bessaga y A. Pelczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math. 17 (1958), 151-164.

3. I. Kluvánek, Extension and closure of vector measure, vector and operator valued measures and applications, Snowbird Resort, Academic Press(1973), 175-190.

4. T.V. Panchapagesan, Extension of spectral measures, Illinois J. Math. 16(1972), 130-142.

5. T.V. Panchapagesan y Shivappa Veerappa Palled, On vector lattice-valued measures-I, notas de Matematica, N°27,(1978), Departamento de Matematicas, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

6. J.J. Uhl, Extensions and de compositions of vector measures, J. London Math.Soc.(2) 3(1971), 672-676.



DEPARTAMENTO DE MATEMATICA<br>
FACULTAD DE CIENCIAS<br>
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES<br>
MERIDA-VENEZUELA