74

# PRODUCTO DE MEDIDAS REGULARES

POR

DIOMEDES BARCENAS

## RESUMEN

En el presente trabajo se muestra que el producto de dos medidas regulares sobre espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos, tiene una única extensión al $\sigma$-álgebra de Borel del espacio producto, en el caso en que ambas medidas son de variación acotada.

# PRODUCTO DE MEDIDAS REGULARES

## INTRODUCCION.

En [3] teorema 21.8 pg. 389, se prueba que si S y T son espacios de Hausdorff localmente compactos; B(S) y B(T) los $\sigma$-álgebras de Borel de S y T; $\mu_1$ y $\mu_2$ medidas regulares y $\sigma$-finitas sobre B(S) y B(T) respectivamente, entonces $\mu_1 \times \mu_2$ admite una extensión regular hasta la completación de B(S) x B(T). Jhonson [4] prueba que, bajo ciertas condiciones, el dominio de completación de B(S) x B(T) contiene a B(SxT). Como consecuencia de esto se obtiene que bajo las condiciones dados en [4], el producto de dos medidas regulares admite una extensión regular a B(SxT). En el parágrafo 2 de este trabajo demostramos que el producto de dos medidas finitas y regulares tiene una extensión regular de B(SxT) y en el parágrafo 3 extendemos este resultado al caso de medidas vectoriales de variación acotada.

## 1. PRELIMINARES

Sean T un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y K y G sub-conjuntos de T con G abierto y K compacto. El intervalo de extremos K y G se define como la clase de conjuntos.

$$I(K,G) = \{A \in \mathcal{P}(T): K \subset A \subset G\} .$$

Definamos sobre $\mathcal{P}(T)$ la topología $\tau$ que tiene por base los intervalos I(K,G). La topología inducida por $\tau$ sobre una clase $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(T)$ seguirá siendo denotada por $\tau$. Es fácil ver que una clase $\mathcal{A}$ es densa en $\mathcal{P}(T)$ con esta topología si y solo si para cada compacto K y cada abierto G que contenga a K, existe $A \in \mathcal{A} \cap I(K,G)$. En consecuencia, tanto la clase de los conjuntos compactos como la clase de los conjuntos abiertos son densas en $\mathcal{P}(T)$.

El siguiente resultado es esencial para los propósitos de este trabajo:

**TEOREMA:** Una medida positiva $\mu$ es regular si y solo si es continua en la topología de $P(T)$, esto es; si y solo si es continua en la topología inducida por $\tau$ sobre los borelianos de $T$.

**DEMOSTRACION:** Véase [2] pg. 304.

## 2. PRODUCTO DE MEDIDAS REGULARES

**LEMA 1.** Si $S$ y $T$ son espacios de Hausdorff localmente compactos y $A$ es el álgebra generado por los rectángulos medibles, entonces $A$ es denso en $P(S\times T)$.

**DEMOSTRACION:** Sea $K$ compacto y $G$ abierto en $S\times T$ con $K \subset G$; para cada $x \in K$ existen abiertos $U_x$ y $V_x$ en $S$ y $T$ respectivamente tal que $x \in U_x \times V_x \subset G$. Como $K$ es compacto, existen $x_1,\ldots,x_n \in K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times V_{x_i} \subset G;$$

y como $A$ es el álgebra generada por los rectángulos medibles,

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times V_{x_i} \in A$$

y en consecuencia $A$ es denso en $P(S\times T)$.

De la demostración del lema 1 se deduce el siguiente resultado:

**COROLARIO.** Si denotamos por $\tau_1 \times \tau_2$ la topología producto de $S\times T$ entonces $A \cap \tau_1 \times \tau_2$ es denso en $P(S\times T)$.

**TEOREMA 2.** Si $\mu_1$ y $\mu_2$ son medidas positivas finitas y regulares, entonces $\mu_1 \times \mu_2$ es regular sobre el álgebra $\mathcal{A}$ generado por los rectángulos medibles.

DEMOSTRACION. De acuerdo con [2] prop. 2 pag. 305; es suficiente probar que para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \in \mathcal{A}$ en SxT tal que $K \subset A$ y $\mu_1 \times \mu_2(B) < \varepsilon \quad \forall B \subset A \setminus K$.

Supongamos que A es un rectángulo medible de la forma $A_1 \times A_2$ con $\mu_1(A_1)\ \mu_2(A_2) > 0$ (el caso $\mu_1(A_1)\ \mu_2(A_2)=0$ es trivial); luego existen compactos $K_1$ y $K_2$ contenidos en $A_1$ y $A_2$ respectivamente tales que

$$\mu_1(B) < \frac{\varepsilon}{2\mu_2(A_2)} \quad ; \quad \mu_2(B') < \frac{\varepsilon}{2\mu_1(K_1)}$$

siempre que $B \in \mathcal{B}(S)$, $B \subset (A_1 \setminus K_1)$; $B' \in \mathcal{B}(T)$, $B' \subset A_2 \setminus K_2$. El conjunto $K = K_1 \times K_2$ es compacto en T; pertenece a $\mathcal{A}$ y además, para cada $E \in \mathcal{A}$ con $E \subset A \setminus K$ se tiene que

$$E \subset (A_1 \setminus K_1) \times A_2) \cup (K_1 \times (A_2 \setminus K_2)$$

y por lo tanto,

$$\mu_1 \times \mu_2(E) \leq \mu_1(A_1 \setminus K_1)\mu_2(A_2) + \mu_1(K_1)\mu_2(A_2 \setminus K_2) <$$
$$\leq \frac{\varepsilon\ \mu_2(A_2)}{2\mu_2(A_2)} + \varepsilon\ \frac{\mu_1(K_1)}{2\mu_1(K_1)} = \varepsilon\ .$$

El resultado general es consecuencia de [2] proposición 7 pag. 307.

TEOREMA 3. La función de conjuntos definida sobre los compactos de SxT mediante la fórmula

$$\gamma(K) = \inf\{\mu_1 \times \mu_2(A) : A \in \mathcal{A} \cap \tau_1 \times \tau_2 ; A \supset K\}$$

satisface las siguientes propiedades:

(1) $\gamma(K_1) \leq \gamma(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$

(2) $\gamma(K_1 \cup K_2) \leq \gamma(K_1) + \gamma(K_2)$

(3) Si $K_1 \cap K_2 = \Phi$, entonces $\gamma(K_1 \cup K_2) = \gamma(K_1) + \gamma(K_2)$

(4) Para cada compacto K y cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto G con $K \subset G$ tal que si K' es compacto y $K \subset K' \subset G$, entonces $\gamma(K') - \gamma(K) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION:

(1) Si $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} \cap \tau_1 \times \tau_2 : A \supset K_1\}$

$$\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{A} \cap \tau_1 \times \tau_2 : B \supset K_2\}$$

entonces $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto $\inf\limits_{B \in \mathcal{G}} \mu_1 \times \mu_2(B) \geq \inf\limits_{A \in \mathcal{F}} \mu_1 \times \mu_2(A) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \gamma(K_2) \geq \gamma(K_1)$.

(2) Si $K_1$ y $K_2$ son compactos existen $G_1$ y $G_2$ en $\mathcal{A} \cap \tau_1 \times \tau_2$ tal que $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ y $\mu_1 \times \mu_2(G_2) \leq \gamma(K_2) + \varepsilon/2$.

Como

$$K_1 \cup K_2 \subset G_1 \cup G_2,\ \gamma(K_1 \cup K_2) \leq \mu_1 \times \mu_2(G_1 \cup G_2)$$

$$\leq \mu_1 \times \mu_2(G_1) + \mu_1 \times \mu_2(G_2) \leq \gamma(K_1) + \gamma(K_2) + \varepsilon$$

y de la arbitrariedad de $\varepsilon$ se obtiene (2).

(3) Supongamos que $K_1 \cap K_2 = \Phi$ como S x T es Hausdorff y localmente compacto, existen abiertos $G_1$ y $G_2$ tales que

$$G_1 \cap G_2 = \Phi;\ k_1 \subset G_1 \ \text{ y } \ K_2 \subset G_2.$$

Los conjuntos $G_1$ y $G_2$ pueden ser seleccionados pertenecientes a $A \cap \tau_1 \times \tau_2$ por ser esta familia de conjuntos densa en $P(S{\times}T)$.

Sea $E \in A \cap \tau_1 \times \tau_2$ tal que

$$K_1 \cup K_2 \subset E \quad y \quad \mu_1 \times \mu_2(E) < \gamma(K_1 \cup K_2) + \varepsilon .$$

Luego,

$$\gamma(K_1) + \gamma(K_2) \leq \mu_1 \times \mu_2(E \cap G_i) + \mu_1 \times \mu_2(E \cap G_2) =$$

$$= \mu_1 \times \mu_2(E \cap (G_1 \cup G_2) \leq \mu_1 \times \mu_2(E) < \gamma(K_1 \cup K_2) + \varepsilon;$$

como $\varepsilon$ es arbitrario se sigue que

$$\gamma(K_1) + \gamma(K_2) \leq \gamma(K_1 \cup K_2)$$

y de la parte (2) de este teorema se sigue (3).

(4) Sea $\varepsilon > 0$ y $K$ compacto. Existe $G \in A \quad \tau_1 \times \tau_2$ tal que $k \subset G$ y

$$\mu_1 \times \mu_2(G) < \gamma(K) + \varepsilon .$$

Si $K'$ es compacto con $K \subset K' \subset G$, entonces

$$\gamma(K) \leq \gamma(K') \leq \mu_1 \times \mu_2(G) < \gamma(K) + \varepsilon \Rightarrow \gamma(K') - \gamma(K) < \varepsilon .$$

Esto prueba (4) y termina la demostración del teorema.

TEOREMA 4. Si $\mu_1$ y $\mu_2$ son medidas regulares, entonces $\mu_1 \times \mu_2$ tiene una única extensión regular y numerablemente aditiva a $\mathcal{B}(S{\times}T)$.

DEMOSTRACION. Sea $\gamma$ la función de conjuntos del lema anterior; por [2] teorema 1 pag. 339, la función de conjuntos

$$\overline{\gamma}: P(S\times T) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longrightarrow \sup_{A\supset K,\ K \text{ compacto}} \gamma(K)$$

es numerablemente aditiva y regular sobre el $\sigma$-álgebra

$$\Phi = \{A \in P(S\times T) : \overline{\gamma}(A) = \inf \overline{\gamma}(G);\quad G\supset A,\quad G \text{ abierto}\},$$

el cual contiene a los abiertos y por lo tanto a los borelianos de $S\times T$. Además, $\overline{\gamma}$ es única.

Probamos ahora que $\overline{\gamma}\,|\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(T) = \mu_1 \times \mu_2$ .

(a) $\overline{\gamma}$ y $\mu_1 \times \mu_2$ coinciden sobre los rectángulos de lados compactos.

Supongamos que K es un rectángulo medible de lados compactos; la monotonía de $\mu_1 \times \mu_2$ muestra que

$$\mu_1 \times \mu_2(K) \leq \gamma(K) \quad . \qquad (1)$$

Sean $\varepsilon > 0$, A abierto en S y B abierto en T tal que

$$\mu_1(A\setminus K_1) < \frac{\varepsilon}{\mu_2(K_2)} \ ;\ \mu_2(B\setminus K_2) < \frac{\varepsilon}{\mu_1(K_1)} \ .$$

Luego,

$$\mu_1 \times \mu_2(A\times B) - \mu_1 \times \mu_2(K_1 \times K_2) < \varepsilon$$

y por lo tanto,

$$\overline{\gamma}(K) \leq \mu_1 \times \mu_2(K) \qquad (2)$$

de (1) y (2) se deduce (a).

(b) Para cada rectángulo medible AxB,

$$\mu_1 \times \mu_2(A\times B) \leq \overline{\gamma}(A\times B).$$

Sean $K_1 \subset A$, $K_2 \subset B$ y $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu_1(A) < \mu_1(K_1) + \frac{\varepsilon}{2\mu_1(K_1)} ;$$

$$\mu_2(B) < \mu_2(K_2) + \frac{\varepsilon}{2\mu_2(K_2)} .$$

Luego,

$$\mu_1 \times \mu_2(A\times B) \setminus (K_1 \times K_2))$$

$$= \mu_1 \times \mu_2((A\setminus K_1)\times K_2) \cup (K_1 \times (B\setminus K_2)))$$

$$\leq \mu_1 \times \mu_2(A\setminus K_1)\ \mu_2(K_2)$$

$$+ \mu_1(K_1)\ \mu_2(B\setminus K_2) < \varepsilon \implies \mu_1 \times \mu_2(A\times B) =$$

$$\sup\{\gamma(K) : K \in A,\ K \subset A\times B,\ K \text{ compacto}\} \leq \overline{\gamma}(A\times B).$$

(c) $$\mu_1 \times \mu_2(S\times T) = \overline{\gamma}(S\times T).$$

Por (b) se tiene que

$$\mu_1 \times \mu_2(S\times T) \leq \overline{\gamma}(S\times T) .$$

Por otra parte, como $SxT \in A \cap \tau_1 \times \tau_2$ , para cada compacto se tiene que

$$\gamma(K) \leq \mu_1 \times \mu_2(SxT).$$

Tomando supremo sobre el lado izquierdo de esta desigualdad obtenemos que

$$\overline{\gamma}(SxT) \leq \mu_1 \times \mu_2(SxT)$$

de esto y la conclusión de (b) se deduce que

$$\overline{\gamma}(SxT) = \mu_1 \times \mu_2(SxT).$$

(d) $\mu_1 \times \mu_2(AxB)=\overline{\gamma}(AxB)$ para cada rectángulo medible AxB.

Supongamos que existe un rectángulo medible AxB tal que

$$\overline{\gamma}(AxB) > \mu_1 \times \mu_2(AxB)$$

por la regularidad de $\overline{\gamma}$ existe un compacto $K \subset AxB$ tal que

$$\overline{\gamma}(K) > \mu_1 \times \mu_2(AxB);$$

y de la aditividad de $\overline{\gamma}$ y $\mu_1 \times \mu_2$ junto con la parte (c) de este teorema se sigue que

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}((SxT \setminus K)) &\leq \mu_1 \times \mu_2((SxT \setminus AxB)) \\ &= \mu_1 \times \mu_2((S \setminus A)xB) \cup (Ax(T \setminus B)) \\ &= \mu_1(S \setminus A)\mu_2(B)+\mu_1(A)\mu_2(T \setminus B).\end{aligned}$$

De la regularidad de $\mu_1$ y $\mu_2$ se obtiene la existencia de rectángulos compactos $K'$ y $K''$, de lados compactos, tal que

$$K' \subset (S \setminus A) \times B \ ; \qquad K'' \subset A \times (T \setminus B) \qquad y$$

$$\mu_1 \times \mu_2 (S \times T \setminus A \times B) \leq \mu_1 \times \mu_2(K') + \mu_1 \times \mu_2(K'') + \varepsilon =$$

$$= \mu_1 \times \mu_2(K' \cup K'') + \varepsilon = \overline{\gamma}(K' \cup K'') + \varepsilon \ .$$

puesto que $\mu_1 \times \mu_2$ y $\overline{\gamma}$ coinciden sobre los rectángulos de lados compactos. Así,

$$\overline{\gamma}(S \times T \setminus K) < \mu_1 \times \mu_2(K' \cup K'')$$

lo cual contradice la monotonía de $\overline{\gamma}$ puesto que

$$K' \cup K'' \subset S \times T \setminus A \times B \subset S \times T \setminus K.$$

Esta contradicción muestra que $\overline{\gamma}$ y $\mu_1 \times \mu_2$ coinciden sobre los rectángulos medibles; y en consecuencia coinciden sobre el álgebra generado por los rectángulos medibles. Así, $\mu_1 \times \mu_2$ tiene una extensión regular, desde el álgebra A generado por los rectángulos medibles, hasta $\mathcal{B}(S \times T)$. Es decir, $\mu_1 \times \mu_2$ tiene una extensión continua, desde A hasta $\mathcal{B}(S \times T)$ en la topología $\tau$ que tiene por base los intervalos de la forma $I(K,G)$. Como A es denso en $P(S \times T)$ con dicha topología; la unicidad de la extensión se deduce de 5 ejercicio (c) pág. 119.

## 3. EXTENSION AL PRODUCTO DE MEDIDAS VECTORIALES

DEFINICION 1. Si $\mu$ es una medida vectorial, se dice que $\mu$ es regular si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada conjunto medible A existen un compacto K y un abierto G tal que $K \subset A \subset G$ y $\|\mu(B)\| < \varepsilon$ para cada conjunto medible $B \subset G \setminus K$.

**DEFINICION 2.** Si $\mu_1$ y $\mu_2$ son medidas vectoriales numerablemente aditivas y de variación acotada con valores en X e Y respectivamente donde X e Y son espacios de Banach; y si Z es un espacio de Banach y $b: X \times Y \to Z$ es una aplicación bilineal y continua, la medida producto de un rectángulo medible AxB se define por la fórmula

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = b < \mu_1(A), \mu_2(B) >$$

y se prueba ([1]) que $\mu_1 \times \mu_2$ tiene una única extensión numerablemente aditiva al $\sigma$-álgebra generado por los rectángulos medibles. Esta extensión es de variación acotada y además,

$$|\mu_1 \times \mu_2| \leq \|b\| \; |\mu_1| \times |\mu_2|.$$

El objetivo central de este parágrafo es probar el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.** El producto de dos medidas vectoriales regulares, numerablemente aditivas y de variación acotadas definidas sobre los borelianos de dos espacios topológicos de Hausdorff y localmente compactos S y T admite una única extensión regular a los borelianos de SxT.

**DEMOSTRACION.** Sean $\mathcal{B}(S)$ y $\mathcal{B}(T)$ los $\sigma$-álgebras de S y T respectivamente; X,Y,Z espacios de Banach y $b: X \times Y \to Z$ la aplicación bilineal y continua mediante la cual se define la medida producto. De [1] sabemos que

$$|\mu_1 \times \mu_2| \leq \|b\| \; |\mu_1| \times |\mu_2|;$$

de regularidad de $\mu_1$ y $\mu_2$ se deduce la de $|\mu_1|$ y $|\mu_2|$ y por el teorema 4 §2; $|\mu_1| \times |\mu_2|$ es regular. Esto implica la regularidad de

$\|b\|$ $|\mu_1| \times |\mu_2|$ y esta a su vez la de $|\mu_1 \times \mu_2|$.

Para cada compacto $K \subset S\times T$ definamos

$$\eta(K) = \inf\{|\mu_1 \times \mu_2| (A); \quad A \in \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(T): A \supset K\} .$$

La función de conjuntos $\eta$ satisface las condiciones del teorema 3 del parágrafo 2; y por un proceso similar al de la demostración dèl teorema 4 del mismo parágrafo, se prueba que $\eta$ admite una extensión regular $\mu$ a $\mathcal{B}(S\times T)$ y de la demostración del teorema 2 pág. 347 de [2], se deduce que $\mu(A) = |\mu_1 \times \mu_2|(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}(S\times T)$. Así, $\mu$ es una extensión regular de $|\mu_1 \times \mu_2|$ .

Usando un argumento similar al de las proposiciones 1 pag. 304 y 19 pág. 314 de [2], se obtiene que $\mu_1 \times \mu_2$ es regular sobre $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(T)$.

Consideremos ahora la pseudométrica

$$\rho: \mathcal{B}(S\times T) \times \mathcal{B}(S\times T) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$(A,B) \longrightarrow \mu(A \,\Delta\, B).$$

Como $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(T)$ es denso en $\mathcal{B}(S\times T)$ con la topología $\tau$, la proposición 29 §15 de [2] muestra que $\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(T)$ es denso en $\mathcal{B}(S\times T)$ con la topología determinada por la métrica $\rho$; por tanto $\mu_1 \times \mu_2$ puede ser extendida a una única medida $\gamma: \mathcal{B}(S\times T) \longrightarrow Z$ con variación acotada $|\gamma|$ tal que $|\gamma|$ es una extensión de $|\mu_1 \times \mu_2|$. De la unicidad de la extensión se deduce que $|\gamma| = \mu$. De donde $|\gamma|$ es regular y en consecuencia lo $\gamma$. Esto termina la prueba.

# R E F E R E N C I A S


[1] BARCENAS D. Producto Bilineal de Medidas, Notas de Matemáticas Nº 72, Mérida, Venezuela, (1985).

[2] DINCULEANU N. Vector Measures, Pergamon Press, Oxford, 1967.

[3] HEWITT-STROMBERG. Real and Abstract Analysis, Springer Verlog, Berlin, Third printing, 1975.

[4] JHONSON R.A. Product of two Borel Measures, Trans. Amer. Math. Soc. 611-625, 1982.

[5] KELLEY J.L. Topología General, Eudeba, Buenos Aires, 1962.