NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 78

MEDIDAS DE NO COMPACIDAD ABSTRACTAS Y TEOREMAS TIPO ASCOLI

POR

ANTONIO TINEO B.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA - VENEZUELA

1985

INTRODUCCION

En 1939 Kuratowski [6] definió una medida de no compacidad la cual tiene una serie de propiedades functoriales que no han sido totalmente estudiadas hasta el presente. Por ejemplo, nosotros notamos que si $f: X \to Y$ es una aplicación continua "cercana" a una isometría entonces las medidas (de Kuratowski) de X e Y están cercanas la una de la otra. Aquí X,Y denotan espacios métricos acotados.

Nuestra idea central es definir el concepto de medida de no compacidad como una transformación natural $\mu = \{\mu_X\}$ (entre dos functores definidos en una subcategoría de espacios métricos) la cual, además de verificar la propiedad antes enunciada satisface, a grosso modo, las siguientes otras:

(i) μ es invariante por isometrías.

(ii) μ tiene la propiedad del producto; es decir, la medida de un producto es el máximo de las medidas de las componentes de dicho producto.

(iii) μ no es expansiva; es decir, si $f: X \to Y$ no expande entonces la medida de $f(A)$ no supera la medida de A.

(iv) Cada μ_X es una medida de no compacidad en el espacio métrico X, en un sentido similar al presentado en [3].

Nuestros resultados principales consisten en probar que para tales medidas se tienen teoremas de tipo Ascoli como los probadas por Ambrosetti [2], Nussbaum [7] y Heinz [5] para la medida de no compacidad de Kuratowski.

Finalmente deseamos decir que el mismo método que empleó Kuratowski para construir su medida de no compacidad α a partir del diámetro δ, es empleado por nosotros para asociar a cualquier medida μ

(en el sentido anterior) una nueva medida μ^* tal que $\delta^* = \alpha$. Naturalmente, el diámetro δ es una medida de no compacidad en el sentido precedente).

1. DEFINICIONES

En esta sección básicamente introducimos el concepto de medida de no compacidad (abreviado m.n.c.) en un espacio métrico completo . Más detalles pueden ser encontrados en [3].

En lo que sigue (X,d) denotará un espacio métrico completo y $\mathcal{B}(X)$ denotará la familia de los subconjuntos acotados y no vacíos de X.

Por una *m.n.c. en X* entendemos una función $\mu = \mu_X : \mathcal{B}(X) \to [0,\infty)$ verificando las siguientes propiedades:

M1) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subseteq B$.

M2) $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$ donde $\overline{A}$ denota la clausura de A en X.

M3) Si $A_1 \supseteq \ldots . \supseteq A_n \supseteq \ldots$ es una sucesión decreciente de cerrados de $\mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(A_n) \to 0$ entonces $\bigcap A_n \neq \emptyset$.

M4) $\lim_{r\to 0^+} \mu(B(A,r)) = \mu(A)$ uniformemente en A; donde $B(A,r)$ es el conjunto de puntos de X que distan de A menos de r.

OBSERVACIONES:

(a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de X tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}) = 0 \qquad (*)$$

entonces, aplicando M3) a $A_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$ deducimos que $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente; de aquí se sigue que si $\mu(A) = 0$ entonces $\overline{A}$ es compacto.

(b) Si un espacio métrico X no es completo también se puede definir la noción de m.n.c. en X, utilizando las condiciones M1), M2) y M4) más la siguiente:

(M3)' si $\{x_n\}$ es una sucesión de (X) que verifica (*) entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión de Cauchy.

(c) Sea D la pseudo-métrica de Hausdorff en $\mathcal{B}(X)$ (ver por ejemplo [3]); la condición M4) dice entonces que μ es uniformemente continua en dicha pseudométrica.

(d) Entre los ejemplos más conocidos de m.n.c. en X tenemos el diámetro ($\mu(A)$ = diám(A)) y la medida de no compacidad de Kuratowski [6], $\mu(A) = \alpha(A)$; definida como el ínfimo de aquellos $r > 0$ tales que A puede ser cubierto con un número finito de subconjuntos (de A ó de X) de diámetro menor o igual a r. Esta situación será generalizada más tarde. Otro ejemplo muy usado es la m.n.c. de la bola; $\chi_X(A)$; lo cual se define como el ínfimo de aquellos $r > 0$ tales que A puede ser cubierto por un número finito de bolas en X de radio r. Para más detalles ver, por ejemplo [3].

Supongamos ahora que X es un espacio de Banach; diremos que μ es *lineal* si se cumplen

$$\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

$$\mu(\lambda A) = |\lambda|\, \mu(A) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

donde, como es usual, $A+B = \{x+y: x \in A, y \in B\}$ y $\lambda A=\{\lambda x: x \in A\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Sea Co(A) la cápsula convexa de $A \subset X$ (Co(A) es el más pequeño convexo de X que contiene a A); diremos que μ es *convexa* si

$$\mu(Co(A)) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

Básicamente, el resultado siguiente fué probado por Darbo [4]. La versión actual puede encontrarse en [3].

TEOREMA 1.1. Sea μ una m.n.c. en un espacio de Banach la cual es lineal y convexa y sea $f: C \to C$ una aplicación continua definida en un convexo cerrado acotado y no vacío de X. Si existe una constante k; $0 \leq k < 1$; tal que $\mu(f(A)) \leq k\,\mu(A)$ entonces f posee un punto fijo.

2. LA CONSTRUCCION DE KURATOWSKI

En esta sección $\mu = \mu_X$ denotará una m.n.c. en X; haciendo un paralelismo con la idea de Kuratowski [6] asociamos a μ otra m.n.c. μ^*; la cual será lineal y convexa (X Banach) si μ es lineal y convexa . Recuperaremos de esta forma un resultado de Darbo [4].

Definimos $\mu^*(A)$ $(A \in \mathcal{B}(X))$ como el ínfimo de aquellos $r > 0$ tal que A puede ser cubierto por un número finito $A_1,\ldots,A_n$ de elementos de $\mathcal{B}(X)$ tales que $\mu(A_i) \leq r$. Dada una sucesión de cerrados $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ en $\mathcal{B}(X)$, con $\mu^*(A_n) \to 0$, podemos proceder como en [8] para obtener otra sucesión $B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ de cerrados de $\mathcal{B}(X)$ tal que $B_n \subset A_n$ y $\mu(B_n) \to 0$. De aquí se sigue facilmente la siguiente:

PROPOSICION 2.1. $\mu^*: \mathcal{B}(X) \to [0,\infty)$ es una m.n.c. en X, que llamaremos la μ-medida de Kuratowski.

OBSERVACION: La medida μ^* tiene la siguiente propiedad (propiedad de máximo [3]).

$$\mu^*(A \cup B) = \max\{\mu^*(A), \mu^*(B)\} .$$

De hecho μ tiene esta propiedad si y solo si $\mu^* = \mu$.

Supongamos que X es de Banach; si μ es lineal es fácil verificar que μ^* es lineal. Es más; siguiendo [1] ó [4] es fácil probar.

PROPOSICION 2.2. Si μ es lineal y convexa entonces μ^* es lineal y convexa.

PROPOSICION 2.3. Sea $f: X \to X$ una aplicación que envía acotados en acotados y supongamos que existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$\mu(f(A)) \leq k\,\mu(A)$$

entonces

$$\mu^*(f(A)) \leq k\,\mu^*(A). \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

DEMOSTRACION. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(X)$ tales que $A \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ y $\mu(A_i) \leq \varepsilon + \mu^*(A)$, entonces $f(A) \subseteq f(A_1) \cup \ldots \cup f(A_n)$ y $\mu(f(A_i)) \leq k\varepsilon + k\,\mu^*(A)$. Por tanto $\mu^*(f(A)) \leq k\,\varepsilon + k\,\mu^*(A)$ y el resultado se sigue rápidamente. #

COROLARIO 2.4. Sea μ una m.n.c. lineal y convexa en un espacio de Banach X y sean $f,g: C \to X$ funciones continuas definidas en un subconjunto no vacío cerrado, convexo y acotado de X. Supongamos que:

(i) $f(x) + g(x) \in C \qquad (x \in C)$

(ii) $\overline{g(C)}$ es compacto.

(iii) Existe k $0 \leq k < 1$, tal que $\mu(f(A)) \leq k\,\mu(A)$. (Note que $f(A)$ es acotado).

(iv) $\mu(\{a\}) = 0$ para cada $a \in X$.

Entonces $f + g: C \to C$ posee un punto fijo.

DEMOSTRACION. Sea $K \subset X$ precompacto, dado $\varepsilon > 0$ K puede ser cubierto con un número finito de bolas abiertas $B(x_1,\varepsilon),\ldots, B(x_n,\varepsilon)$. Por otro lado $B(x,\varepsilon) = \{x\} + \varepsilon B(0,1)$, de modo que $\mu(B(x,\varepsilon)) \leq \varepsilon\,\mu(B(0,1))$. De aquí $\mu^*(K) = 0$, donde μ^* es la μ-medida de Kuratowski. Notando ahora que $(f+g)(A) \subseteq f(A) + g(A)$ vemos que $\mu^*((f+g)(A)) \leq k\,\mu^*(A)$ y el resultado se sigue del Teorema 1.1. #

3. MEDIDAS DE NO COMPACIDAD EN LA CATEGORIA DE ESPACIOS METRICOS E ISOMETRIAS

En esta sección consideramos una m.n.c. como una ley μ que asocia a cada espacio métrico completo X una m.n.c. μ_X en X verificándose algunos axiomas más. Para ser más precisos necesitamos recordar algunos conceptos.

Se dice que una aplicación $f\colon X \to Y$ entre dos espacios métricos es *no expansiva* si $d_Y(f(x),f(x')) \leq d_X(x,x')$ $(x,x' \in X)$. En caso que haya igualdad para cada par (x,x') decimos que f es una *isometría*.

Dados espacios métricos $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ se define el *espacio métrico producto* como el par (X,d) dado por $X = X_1 \times \ldots \times X_n$,

$$d((x_1,\ldots,x_n),\ (x_1',\ldots,x_n')) = \max\{d_i(x_i,x_i'):\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Las aplicaciones $\pi_i\colon X \to X_i$; $\pi_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$; son llamadas las proyecciones naturales. Note que dichas aplicaciones son no expansivas.

Finalmente, dada una aplicación $f\colon X \to Y$ entre dos espacios métricos acotados, definimos la *medida de no isometría* de f, denotada $I(f)$, mediante

$$I(f)=\sup\{|d(f(x),f(x'))-d(x,x')|:\ x,x' \in X\}.$$

Por una *medida de no compacidad* (m.n.c.) entendemos una ley μ (transformación natural. Ver más adelante) que asocia a cada espacio métrico completo X una m.n.c. μ_X en X; verificándose además las siguientes propiedades:

m1) Si $f: X \to Y$ es una isometría entonces

$$\mu_Y(f(A)) = \mu_X(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(X))$$

m2) Si $f: X \to Y$ es no expansiva entonces

$$\mu_Y(f(A)) \leq \mu_X(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(X))$$

m3) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $f: X \to Y$ es una aplicación no expansiva y sobreyectiva entre espacios acotados tal que $I(f) \leq \delta$ entonces

$$|\mu_Y(y) - \mu_X(X)| \leq \varepsilon.$$

Equivalentemente $\mu_X(X) \leq \varepsilon + \mu_Y(Y)$.

m4) Si X es el espacio métrico producto de $X_1,\ldots,X_n$ y si $\pi_i: X \to X_i$ $(1 \leq i \leq n)$ denotan las proyecciones naturales entonces

$$\mu_X(A) = \max\{\mu_{X_i}(\pi_i(A)) : 1 \leq i \leq n\} \ ; \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

OBSERVACIONES:

(a) Sea M la categoría cuyos objetos son los espacios métricos completos y cuyos morfismos son las isometrías y sea $\mathcal{B}: M \to$ Ens el functor, con valores en la categoría de conjuntos, dado por $\mathcal{B}(X)$ = subconjuntos acotados y no vacíos de X, $\mathcal{B}(f)\ (A) = f(A)$ (f un morfimso de M). Entonces una m.n.c. μ es una transformación natural entre $\mathcal{B}$ y el functor constante $\mathcal{B}_o$, dado por $\mathcal{B}_o(X) = [0,\infty)$ $(\mathcal{B}_o(f)$ = identidad de $[0,\infty))$; que verifica las condiciones m2), m3) y m4); además μ_X es una m.n.c. en X para cada X.

(b) La condición m1) permite suprimir los subíndices en los símbolos μ_X , μ_Y etc. Así, escribimos $\mu(A)$ en lugar de $\mu_X(A)$.

(c) La condición m4) es equivalente a decir que

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \max\{\mu(A_i): \ 1 \leq i \leq n\} \ ; \quad A_i \in \mathcal{B}(X_i).$$

(d) La medida χ de no compacidad de la bola no satisface la condición (m1). Es bien sabido que existen espacios métricos $A \subset X \subset Y$ tales que $\chi_Y(A) \lneq \chi_X(A)$. Sin embargo χ satisface m2)-m4).

TEOREMA 3.1. Sea μ una m.n.c. y para cada espacio métrico completo X sea μ^*_X la μ_X-medida de Kuratowski en X. Entonces μ^* es una m.n.c.

DEMOSTRACION. La condición m1) es verificada trivialmente mientras que m2) fué prácticamente probada en la proposición 2.3. Para probar m3) sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ dado por (m3) para μ con $\varepsilon/2$ en vez de ε. Dada $f: X \to Y$ no expansiva y sobreyectiva entre espacios acotados, escojamos $Y_1, \ldots Y_n$ cerrados en Y tales que $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ y $\mu(Y_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu^*(Y)$. Si ponemos $X_i = f^{-1}(Y_i)$ y denotamos por $f_i: X_i \to Y_i$ la restricción de f tenemos que $I(f_i) \leq I(f)$, de modo que si $I(f) \leq \delta$ entonces $\mu(X_i) \leq \mu(Y_i) + \varepsilon/2$; de aquí $\mu(X_i) \leq \varepsilon + \mu^*(Y)$, lo cual prueba que $\mu^*(X) \leq \varepsilon + \mu^*(Y)$. La condición m3) se sigue observando que $\mu^*(Y) \leq \mu^*(X)$. La prueba de m4) se sigue facilmente de la observación anterior, parte (c).

NOTA. Es fácil verificar que el "diámetro" es una m.n.c. tal que $|\delta(Y) - \delta(X)| \leq I(f)$ si $f: X \to Y$ es una aplicación sobre no expansiva. De aquí, la medida α de no compacidad de Kuratowski satisface nuestros requerimientos m1)-m4) de medidas a no compacidad. Además $|\alpha(Y)-\alpha(X)| \leq I(f)$, si $f: X \to Y$ es sobre y no expansiva.

4. TEOREMAS DE TIPO ASCOLI

En esta sección nosotros fijamos una m.n.c. μ probamos (para esta μ) algunos teoremas que ya fueron mostrados, para la m.n.c. de Kuratowski por Ambrosetti [2], Nussbaum [7] y Heinz [5].

En lo que sigue M denotará un espacio topológico compacto y C(M, X) denotará el espacio de las funciones continuas de M en X; provisto de la métrica usual (métrica del supremo); además fijaremos un sbuconjunto acotado y no vacío H de C(M,X).

Dado $M_o \subset M$ cerrado denotaremos por $H(M_o)$ el subconjunto de $C(M_o,X)$ obtenido por restricción a M_o de los elementos de H. Hacemos notar de una vez por todas que si $M_o \subset M_1 \subset M$ entonces la aplicación de restricción $r: C(M_1,X) \to C(M_o,X)$ $(r(f) = f|_{M_o})$ es no expansiva de modo que

$$\mu(H(M_o)) \leq \mu(H(M_1)).$$

Dado $x_o \in M$ pondremos $H(x_o) = \{f(x_o): f \in H\}$; si $x_o \in M_o \subset M$ tenemos que la proyección natural $\pi: H(M_o) \to H(x_o)$; $\pi(\alpha) = \alpha(x_o)$, es sobreyectiva no expansiva de modo que

$$\mu(H(x_o)) \leq \mu(H(M_o)).$$

LEMA 4.1. Si $M_1,\ldots,M_n$ es un cubrimiento finito de M por cerrados entonces

$$\mu(H) = \max\{\mu(H(M_i)): \quad 1 \leq i \leq n\}$$

DEMOSTRACION. Basta observar que la aplicación

$$\Phi: C(M,X) \to C(M_1,X) \times \ldots \times C(M_n,X);\ f \to (f|_{M_1},\ldots,f|_{M_n})$$

es una isometría y enseguida aplicar m1) y m4). #

Dado $x_o \in M$ definamos $\hat{\mu}(M(x_o))$ como el ínfimo de los $\mu(H(\overline{U}))$ donde $\{U\}$ es la familia de abiertos de M que contienen a x_o. Obsérvese que $\hat{\mu}(H(x_o)) \geq \mu(H(x_o))$.

LEMA 4.2.

$$\mu(M) = \sup_{x \in M} \hat{\mu}(H(x)).$$

DEMOSTRACION. Dados $\varepsilon > 0$ y $x_o \in M$ escojamos una vecindad U de x_o tal que

$$\mu(H(\overline{U})) \leq \varepsilon + \hat{\mu}(H(x_o)) .$$

Ya que M es compacto podemos hallar un cubrimiento abierto $U_1,\ldots,U_n$ de M y puntos $x_1 \in U_1,\ldots,x_n \in U_n$ tales que $\mu(H(\overline{U}_i)) \leq \varepsilon + \hat{\mu}(H(x_i))$; así que del lema 4.1 obtenemos

$$\mu(H) \leq \varepsilon + \max\{\hat{\mu}(H(x_i)) : 1 \leq i \leq n\} \leq \varepsilon + \sigma$$

donde $\sigma = \sup\{\hat{\mu}(H(x)) : x \in M\}$. De aquí $\mu(H) \leq \sigma$ y el resultado se obtiene notando que $\mu(H) \geq \hat{\mu}(H(x))$ para cada $x \in M$. #

El siguiente resultado es una generalización de un resultado de Ambrosetti [2].

COROLARIO 4.3. Si M es métrico y H es equicontinuo entonces

$$\mu(H) = \sup\{\mu(H(x)) : x \in M\}$$

DEMOSTRACION. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ dado por la condición m3); como H es equicontinuo existe $r > 0$ tal que

$$d(f(x),f(x_o)) \leq \delta/2 \quad \text{si} \quad d(x,x_o) \leq r \quad \text{y} \quad f \in H.$$

De aquí, si $f,g \in H$, tenemos que

$$d(f(x),g(x)) \leq \delta + d(f(x_o),g(x_o)) \quad \text{sí} \quad d(x_1,x_o) \leq r.$$

Sea $\overline{B}(x_o,r)$ la bola cerrada de centro x_o y radio r y sea

$$\pi_r \colon H(\overline{B}(x_o,r)) \to H(x_o)$$

la proyección natural ($\pi_r(\alpha) = \alpha(x_o)$); entonces π_r es sobre; no expansiva con $l(\pi_r) \leq \delta$ y por tanto

$$\mu(H(\overline{B}(x_o,r)) \leq \mu(H(x_o)) + \varepsilon$$

De aquí $\hat{\mu}(H(x_o)) \leq \varepsilon + \mu(H(x_o))$, lo cual prueba que $\hat{\mu}(H(x_o)) \leq \mu(H(x_o))$ y da fin a la demostración. #

Nos encaminamos ahora a generalizar un resultado de Nussbaum [7]; para ello introducimos las siguientes cantidades:

$$w(H,U,x_o) = \sup_{f,g \in H} \{\sup_{x \in \overline{U}} d(f(x),g(x)) - d(f(x_o),g(x_o))\}$$

$$w(H,x_o) = \inf \{ w(H,U,x_o)\}.$$

donde el inf es tomado sobre todas las vecindades abiertas U de x_o en M.

TEOREMA 4.4. Supongamos que existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$\mu(X) \leq \mu(Y) + k\ l(f)$$

para cada aplicación sobre y no expansiva $f\colon X \to Y$ entre espacios métricos acotados. Entonces,

$$\mu(H) \leq \sup_{x \in M} (\mu(H(x)) + kw(H,x)).$$

DEMOSTRACION. Dados un punto $x_o \in M$ y un abierto U de M conteniendo x_o, definamos $\pi_U: H(\overline{U}) \to H(x_o)$ como la proyección natural $\pi_U(\alpha) = \alpha(x_o)$; entonces

$$l(\pi_U) = w(H,U,x_o) .$$

En consecuencia,

$$\hat{\mu}(H(x_o)) \leq \mu(H(\overline{U})) \leq \mu(H(x_o)) + k\, w(H,U,x_o)$$

y el resultado se sigue rápidamente del lema 4.2. #

NOTA. Supongamos que M es métrico y sea w(H) la medida de no equicontinuidad de H; es decir,

$$w(H) = \lim_{r\to 0^+} \left[\sup \{d(f(x),\ f(y)) : d(x,y) \leq r,\ \ f \in H\} \right]$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$d(f(x),f(y)) \leq \varepsilon + w(H) \quad \text{si} \quad d(x,y) \leq r \quad \text{y} \quad f \in H.$$

Fijemos $x_o \in M$; dadas $f,g \in H$ tenemos

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x_o),g(x_o)) + 2w(H) + 2\varepsilon \quad \text{si } d(x,x_o) \leq r$$

lo cual dice que $w(H,\overline{B}(x_o,r),x_o) \leq 2w(H) + 2\varepsilon$. De aquí

$$w(H,x_o) \leq 2w(H) + 2\varepsilon$$

cualquiera sea $\varepsilon > 0$ y por tanto $w(H,x_o) \leq 2w(H)$. En consecuencia:

COROLARIO 4.5. Si M es métrico y se satisfacen las hipótesis del Teorema 4.4. entonces

$$\mu(H) \leq 2\, kw(H) + \sup\{\mu(H(x)) : x \in M\} .$$

Este es un resultado que Nussbaum [7] mostró cuando μ es la m.n.c. de Kuratowski. Note que si $\mu = \alpha$ es la m.n.c. de Kuratowski entonces la hipótesis del Teorema 4.4 es satisfecha con $k=1$.

En el caso que M es un conjunto sin estructura se pueden obtener resultados análogos a los obtenidos por Heinz [5]. Para ello sea $\mathcal{B}(M,X)$ el espacio de las funciones acotadas de M en X, provisto de la norma usual del supremo y fijemos $H \subset \mathcal{B}(M,X)$ acotado y no vacío.

Definamos $\hat{w}(H)$ como el ínfimo de aquellos $r > 0$ tales que existe una partición finita $M_1,\dots,M_n$ de M y puntos $x_1 \in M_1,\dots x_n \in M_n$, tales que

$$d(f(x),g(x)) \leq r + d(f(x_i),g(x_i)) \text{ si } f,g \in H,\ x \in M_i,\quad 1 \leq i \leq n.$$

Entonces tenemos:

TEOREMA 4.6. Supongamos que se satisface la desigualdad $\mu(X) \leq \mu(Y) + k\, l(f)$ del Teorema 4.4. Entonces

$$\mu(H) \leq k\, \hat{w}(H) + \sup\{\mu(H(x)) : x \in M\} .$$

DEMOSTRACION. Dado $r > \hat{w}(H)$ existe una partición finita $M_1,\dots M_n$ de M y puntos $x_1 \in M_1,\dots,x_n \in M_n$ tales que

$$d(f(x),g(x)) \leq r + d(f(x_i),g(x_i)) \quad \text{si} \quad x \in M_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

y cualesquiera sean $f,g \in H$. De aquí, si $\pi_i : H(M_i) \to H(x_i)$ denota la proyección natural, obtenemos $l(\pi_i) \leq r$ de modo que

$$\mu(H(M_i)) \leq \mu(H(x_i)) + k.r \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Por otra parte, procediendo como en la prueba del lema 4.1 vemos que $\mu(H) = \max\{\mu(H(M_i)): 1 \leq i \leq n\}$ y el resultado se sigue rápidamente. #

NOTA. En [5] Heinz definió un número $\chi_H(M)$ como el ínfimo de aquellos $r > 0$ para los cuales existe una partición finita $M_1, \ldots, M_n$ de M y puntos $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$ tales que

$$d(f(x), f(x_i)) \leq r \quad \text{si} \quad f \in H \quad y \quad x \in M_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

es fácil ver que $\hat{w}(H) \leq 2\,\chi_H(M)$, de modo que el Teorema 4.6 anterior, recupera una parte del Teorema 1 de [5] para cualquier medida μ satisfaciendo la hipótesis de 4.4.

5. OBSERVACION FINAL

La descripción de una m.n.c. dada en la sección 3 deja de lado situaciones interesantes; lo cual pondremos de manifiesto con un ejemplo.

Sea D la categoría cuyos objetos son pares de la forma $(X, \{K_n\})$ donde X es un espacio de Banach y $\{A_n: X \to X\}$ es una sucesión de operadores compactos de norma menor o igual a uno ($\|K_n\| \leq 1$) la cual converge fuertemente a la identidad:

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = x \qquad (x \in X).$$

Por un morfismo $f:(X, \{A_n\}) \to (Y, \{B_n\})$ entre dos objetos de D entendemos una aplicación no expansiva $f: X \to Y$ tal que $L_n \circ f = f \circ K_n$ $(n \geq 1)$.

En esta categoría tenemos el producto de dos objetos $(X,\{K_n\})$, $(Y,\{L_n\})$; el cual se define como el par $(X\times Y, \{K_n \times L_n\})$, donde $(K_n \times L_n)(x,y) = (K_n(x), L_n(y))$.

Para cada objeto $(X,\{K_n\})$ se obtiene una m.n.c. en X dada por

$$\mu(A,X,\{K_n\}) = \lim_{n\to\infty} \sup\{\sup_{x\in A} \| K_n(x) - x\| \} \; ; \quad A \in B(X).$$

Del hecho esta medida es lineal y convexa. Para más detalles ver [3]. Ahora, no es dificil probar que se tiene una cierta transformación natural $\mu=\{\mu(.,X, K_n)\}$ la cual verifica las condiciones m1)- m4) pero solo para morfismos (y productos) convenientes de la categoría D.

Por ejemplo, procediendo como en la sección precedente, podemos mostrar la siguiente versión de un resultado de Ambrosetti. Sea M un espacio métrico compacto y sea $H \subset C(M,X)$ equicontinuo; entonces

$$\mu(H, C(M,X),\{K_n^*\}) = \sup_{x\in M} \mu(H(x), X,\{K_n\})$$

donde $K_n^* : C(M,X) \to C(M,X)$ viene dada por $K_n^*(f) = K_n \circ f$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMANN HEBERT; Lectures on some Fixed point theorems. Instituto de Matemática pura e aplicada. Rio de Janeiro.

[2] AMBROSETTI A., Un teorema di esistenza per le equazioni diffe - renciale negli spaci di Banach. Rend. Sem. Univ. Padova, 39, (1967), 349-360.

[3] BANAS J. AND GOEBEL K., Measures of Non-Compactness in Banach Spaces. Marcel Dekker Inc. New York and Basel 1980.

[4] DARBO, G., Punti uniti in transformazioni a codominio no compatto. Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 24 (1955), 84-92.

[5] HEINZ H.P., Theorems of Ascoli Type involving measures of non - compactness. Nonlinear Analysis, Math. and Apple. Vol. 5, Nº 3, pp. 277-286. 1981.

[6] KURATOWSKI K., Sur les espaces complets. Fund. Math.15 (1930) 301-309.

[7] NUSSBAUM R.D., A generalization of the Ascoli. Theorem and an application to functional differential equations, J. Math. And. Appl. 35 (1971) 600-610.

[8] NUSSBAUM R.D., The fixed point index for local condensing maps. Annali di Matemática pura, LXXXIX, 217-258 (1971).