

NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 94

ESPACIOS NORMADOS CON LA PROPIEDAD (I)

POR

JOSE R. MORALES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA  
MERIDA-VENEZUELA

1988

# ESPACIOS NORMADOS CON LA PROPIEDAD (I)

## INTRODUCCION

En este trabajo trataremos una propiedad geométrica de los espacios normados conocida con el nombre de propiedad (I).

Las definiciones y notaciones que usaremos más adelante son ampliamente conocidas y pueden ser encontradas en [5], [7], [21], y para mayores detalles ver [13].

En la siguiente sección daremos, en cierta forma, un desarrollo histórico de la propiedad (I), aún cuando no en forma cronológica, enunciaremos la mayoría de los resultados importantes conocidos que caracterizan la propiedad, y también dejaremos algunas interrogantes planteadas.

En la segunda sección mostraremos que la propiedad (I) se preserva para subespacios e isomorfismos. Además, nos planteamos la interrogante de que si la propiedad (I) se transmite al espacio cociente y si se mantiene en el producto de espacios que poseen la propiedad (I).

En la última sección discutiremos la propiedad (I) con re-

lación a otras propiedades geométricas de los espacios normados, ampliamente conocidas, y dejaremos algunas interrogantes que por ahora quedarán sin respuesta. #

1.- En esta sección daremos un desarrollo histórico de la propiedad (I) y enunciaremos la mayoría de los resultados importantes que caracterizan los espacios normados que poseen la propiedad (I).

La propiedad (I), llamada también propiedad de intersección de Mazur, ha recibido ultimamente cierta atención como lo muestran ciertos artículos dedicados a este tópicó: [4], [24], etc. Iniciamos el desarrollo de la sección con la siguiente definición:

(1.1): Decimos que un espacio normado  $(X, \| \cdot \|)$ , tiene la propiedad (I), si todo subconjunto convexo, cerrado y acotado de  $X$ , puede ser expresado como una intersección de bolas cerradas. La investigación en esta área la inició S. Mazur en 1933, [12], donde él consideró el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio normado posea la propiedad (I), logrando la siguiente caracterización, que constituye el primer resultado importante que determina bajo qué condiciones un espacio de Banach tiene la propiedad (I):

(1.2): Si  $(X, \| \cdot \|)$  es un espacio de Banach reflexivo y la

norma de  $X$  es un espacio de Banach reflexivo y la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable entonces  $X$  posee la propiedad (I).

En el año de 1957, R.R. Phelps, [16], investigando sobre el mismo t3pico logr3 mejorar el resultado (1.2) dado por Mazur, pu3s Phelps debilit3 las condiciones dadas por Mazur, sustituyendo la reflexividad por una condici3n m3s d3bil, como es la subreflexividad y de 3sta manera no necesitamos asumir la completitud del espacio, y el resultado de Phelps que a continuaci3n enunciaremos, constituye la primera caracterizaci3n de los espacios normados que poseen la propiedad (I):

(1.3): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado tal que la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable.  $X$  es subreflexivo, si y solo si  $X$  posee la propiedad (I).

E. Bishop y R.R. Phelps, [2] mostraron que todo espacio de Banach es subreflexivo, as3 de (1.3) obtenemos:

(1.4): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Si la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable entonces  $X$  posee la propiedad (I).

Es ampliamente conocida la definici3n de espacio de Banach localmente uniformemente convexo, (LUC) y el resultado de que si la norma de  $X^*$  es LUC entonces la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable, ambos hechos dados por

A.R. Lovaglia, [11] y ahora usando tales hechos obtenemos:

(1.5): Si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach tal que  $X^*$  sea LUC entonces  $X$  posee la propiedad (I).

S.L. Troyanski, [2] demostró que todo espacio de Banach es reflexivo tiene una norma que es LUC y F-diferenciable, y usando éste resultado tenemos:

(1.6): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach reflexivo. Entonces  $X$  tiene una norma  $\|\|\cdot\|\|$  equivalente a  $\|\cdot\|$  tal que  $(X, \|\|\cdot\|\|)$  posea la propiedad (I).

K. John y V. Zizler, [9] mostraron que si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach tal que si  $X$  y  $X^*$  son debilmente compactos generados entonces  $X$  tiene una norma equivalente F-diferenciable, y por éste resultado obtenemos:

(1.7): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Si  $X$  y  $X^*$  son debilmente compactos generados entonces existe una norma  $\|\|\cdot\|\|$  equivalente a  $\|\cdot\|$  tal que  $(X, \|\|\cdot\|\|)$  posea la propiedad (I).

La recíproca del resultado (1.4) es aún un problema abierto, y así tenemos:

Problema # 1.1:

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach con la propiedad (I). ¿Existe una norma  $\|\cdot\|$  equivalente a  $\|\cdot\|$  tal que  $(X, \|\cdot\|)$  sea  $F$ -diferenciable?

Phelps continuó investigando y tratando de lograr mejores caracterizaciones de los espacios normados que poseen la propiedad (I), y en el año de 1960, Phelps mostró que un espacio normado tiene la propiedad (I), si el conjunto de puntos fuertemente expuestos débil- $*$   $B(X^*)$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$  y planteó la necesidad de esta condición para la propiedad (I), que es aún un problema abierto. Ahora enunciaremos el resultado dado por Phelps; [17] :

(1.8): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio normado. Si  $STRS(X^*)$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$  entonces  $X$  posee la propiedad (I).

En el mismo artículo Phelps caracterizó los espacios normados de dimensión finita que poseen la propiedad (I) como:

(1.9): Un espacio normado de dimensión finita posee la propiedad (I), si y solo si el conjunto de puntos extremales de  $B(X^*)$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ .

Y en forma muy particular tenemos otro resultado de Phelps:

(1.10): Un espacio normado de dimensión  $Z$ ,  $(X, \|\cdot\|)$  posee la propiedad (I), si y solo si  $X$  es suave.

En 1977, F. Sullivan, [21] dá una caracterización de la propiedad (I), para los espacios normados suaves en términos de la densidad de ciertos subconjuntos de  $X^*$ , lo cual es equivalente a la cuasicontinuidad de la función dualidad. A continuación daremos el resultado de F. Sullivan:

(1.11): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado suave.  $X$  posee la propiedad (I), si y solo si  $\mathcal{D}(M_\varepsilon(X))$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

F. Sullivan fué el primero quien consideró la idea de aproximar la diferencial de Frechet de la norma de  $X$  podría ser útil en el estudio y análisis de los espacios normados que poseen la propiedad (I).

En 1978, J.R. Giles, D.A. Gregory y S. Brailey en [7], tomaron y desarrollaron las ideas de Sullivan y obtienen cuatro equivalencias para la propiedad (I), dos de las cuales ha sido dadas por Phelps, [17] como condiciones necesarias, y las otras dos están relacionadas a las ideas de F. Sullivan, [21].

Ahora enunciaremos la caracterización (Teorema 2.1, [7]) dada por Giles, Gregory y Sims, y es el resultado más importante logrado por ellos:

(1.12): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i)  $X$  tiene la propiedad (I);

(ii) la función de dualidad sobre  $S(X)$ ,  $x \rightarrow \mathcal{D}(x)$  es cuasicontinua;

(iii) toda función de soporte sobre  $X$ ;  $x \rightarrow \langle x, \cdot \rangle$  envía conjuntos  $\|\cdot\|$ -densos en  $S(X)$  en conjuntos  $\|\cdot\|$ -densos en  $S(X^*)$ ;

(iv) para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{D}(M_\varepsilon(X))$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ ;

(v) el conjunto de los puntos dentados débil-\* es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ .

De hecho la caracterización de la propiedad (I) para espacios normados de dimensión finita (1.10) lograda por Phelps es una consecuencia inmediata del resultado (1.12).

Ahora pasamos a enunciar otras consecuencias del resultado dado por Giles, Gregory y Sims.

En [7] y para mayores detalles [13], se probó que si un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  es tal que si  $X^*$  posee la propiedad (I) entonces  $X$  es reflexivo, y usando un resultado de S.L. Troyanski, [22] acerca de la existencia de normas equivalentes para

espacios de Banach reflexivos se tiene la siguiente caracterización:

(1.13): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach.  $X$  es reflexivo, si y solo si  $X^*$  tiene la propiedad (I).

Es bien conocido el resultado que si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio normado tal que  $X^*$  sea separable, entonces  $X$  es separable, pero el recíproco en general no es cierto; ahora si al hecho de ser  $X$  separable le agregamos la propiedad (I) entonces se obtiene que  $X^*$  es separable, para una prueba de este resultado ver [13]; y usando el siguiente resultado de G. Restrepo, [18] : un espacio de Banach separable admite una norma equivalente  $F$ -diferenciable, si y solo si  $X^*$  es separable, por lo tanto tenemos la siguiente caracterización:

(1.14): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado separable.  $X$  posee la propiedad (I), si y solo si,  $X^*$  es separable.

R.R. Phelps, planteó el siguiente problema: Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado con la propiedad (I). ¿Es cierto que el conjunto de los puntos fuertemente expuestos débil-\* de  $B(X^*)$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ ?

A la luz del resultado (1.2) tenemos que el anterior puede ser escrito como:

Problema # 1.2:

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Si el conjunto de los puntos dentados débil-\* de  $B(X^*)$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ , ¿es el conjunto de los puntos fuertemente expuestos débil-\* de  $B(X^*)$   $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ ?

Acerca del anterior problema en [7] encontramos el siguiente comentario: usando el hecho de que si la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable en  $x \in S(X)$  entonces  $f_x \in D(X)$  es un punto fuertemente expuesto débil-\* de  $B(X^*)$ . Por tanto, si la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable sobre un conjunto  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X)$  entonces el conjunto  $f_x \in D(X)$  de puntos fuertemente expuestos débil-\* de  $B(X^*)$  y como la función de soporte  $x \rightarrow f_x$  envía conjuntos  $\|\cdot\|$ -densos de  $S(X)$  en conjuntos  $\|\cdot\|$ -densos de  $S(X^*)$  entonces tenemos una respuesta afirmativa al problema.

Además, en [13] se da una respuesta parcial al problema anterior, la cual es una adaptación de una prueba dada por C.D. Larman, ver [8] a un problema similar:

(1.15): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Si todo  $f \in S(X^*)$  es un punto dentado débil-\* de  $B(X^*)$  entonces el conjunto de puntos fuertemente expuestos débil-\* de  $B(X^*)$  es  $\|\cdot\|$ -denso en  $S(X^*)$ .

Prueba:

Consideremos  $X \subseteq X^{**}$ . Sea  $x \in S(X)$  y  $f \in S(X^*)$  tal que  $\hat{x}(f) = \|f\| = 1$ . Como  $f$  es un punto dentado débil-\* de  $B(X^*)$  entonces para  $0 < \varepsilon < 1$  existe  $y \in S(X)$ , y  $\alpha > 0$  tales que  $f \in S(\hat{y}, \alpha, B(X^*))$  y  $\text{diam } S(\hat{y}, \alpha, B(X^*)) < \varepsilon$ . Ahora consideremos  $0 < \eta < \varepsilon$  y  $\hat{z} = \eta \hat{y} + (1-\eta)\hat{x}$ , así,

$$\|\hat{z} - \hat{x}\| = \|\eta \hat{y} + (1-\eta)\hat{x} - \hat{x}\| = \eta \|\hat{y} - \hat{x}\| \leq 2\eta.$$

Escribimos  $K = B(X^*) \setminus S(\hat{y}, \alpha, B(X^*))$ . Entonces, como  $g(\hat{y}) \leq 1 - \alpha$  para todo  $g \in K$  y  $f(\hat{y}) > 1 - \alpha$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sup \hat{z}(K) &\leq \eta \sup \hat{y}(K) + (1-\eta) \sup \hat{x}(K) \\ &< \eta \hat{y}(f) + (1-\eta) \hat{x}(f) = \hat{z}(f), \end{aligned}$$

por tanto  $\sup \hat{z}(K) < \hat{z}(f)$ . Es decir,  $\hat{z}$  separa a  $f$  de  $K$ . En consecuencia,  $\hat{z}$  define un trozo de  $B(X^*)$ , el cual contiene a  $f$  y está contenido en  $S(\hat{y}, \alpha, B(X^*))$ , esto es,

$$f \in S(\hat{z}, \beta, B(X^*)) \subseteq S(\hat{y}, \alpha, B(X^*)),$$

luego  $\text{diam } S(\hat{z}, \beta, B(X^*)) < \varepsilon$ .

Ahora por (el lema 2.1 de [7] o lema 2.3 de [13]),  $Z \in M_\varepsilon(S(X))$ , y por el teorema de Bishop-Phelps, [5]  $D(M_\varepsilon(S(X)))$  es  $\| \cdot \|$ -denso en  $S(X^*)$  para todo  $0 < \varepsilon < 1$ , y como  $M_\varepsilon(X)$  es un abierto en  $S(X)$  entonces por el teorema de categoría de Baire,

$\bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon(X)$  es  $\| \cdot \|$ -denso en  $S(X)$ , y este conjunto de intersección es el subconjunto de  $S(X)$  donde la norma de  $X$  es  $F$ -diferenciable. Entonces,  $f_{\hat{x}} \in D(X)$  es un punto fuertemente expuesto débil-\* de  $B(X^*)$  por  $\hat{x}$ , y este conjunto es  $\| \cdot \|$ -denso en  $S(X^*)$  y aplicando el resultado (1.12) obtenemos la conclusión y por tanto hemos probado la afirmación (1.15).- #

A continuación daremos algunos resultados que caracterizan la propiedad (I) usando la noción de punto lejano de un subconjunto acotado en un espacio normado. Denotaremos por  $\text{Far}(K)$ , el conjunto de puntos lejanos de  $K$ .

Para la definición y propiedades de  $\text{Far}(K)$  le recomendamos ver, [14] que constituye un excelente resumen sobre la noción del punto lejano, como también M. Edelstein, [6], E. Asplund, [1], K.S. Lau, [10], y Pand y Kapoor [15], y todos estos obtienen

ciertas relaciones entre la propiedad [I] y los puntos lejanos.

M. Edelstein, [6] mostró el siguiente resultado:

(1.16): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach uniformemente convexo y  $\phi \neq K \subset X$  un subconjunto convexo, acotado y cerrado de  $X$ . Si  $X$  tiene la propiedad [I] entonces  $C_0(K) = \bar{C}_0(\text{Far}(K))$ .

El siguiente resultado fue dado por Panda y Kappor [15], para una prueba y las definiciones que involucran tal resultado ver [15].

(1.17): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach reflexivo CLUR y  $\phi \neq K \subset X$  un subconjunto convexo, acotado y cerrado de  $X$ . Si  $X$  posee la propiedad [I] entonces  $C_0(K) = \bar{C}_0(\text{Far}(K))$ .

Edelstein en la prueba de su resultado (1.16) usó la condición (UR) únicamente para mostrar que  $\text{Far}(K) \neq \phi$ , y esto fue observado por K.S.-Lau, quien en su artículo [10] modificó el resultado de Edelstein como sigue:

(1.18): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $\phi \neq K \subset X$  un subconjunto débilmente compacto. Si  $X$  tiene la propiedad [I] entonces  $C_0(K) = \bar{C}_0(\text{Far}(K))$ .

De (1.18) obtenemos el siguiente Corolario:

(1.19): Sea  $(X, \| \cdot \|)$  un espacio de Banach reflexivo y  $\phi \neq K \subset X$  es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de  $X$ . Si  $X$  tiene la propiedad (I) entonces  $\bar{C}_0(K) = \bar{C}_0(\text{Far}(K))$ .

Lau, [10] demostró el siguiente resultado:

(1.20): Sea  $(X, \| \cdot \|)$  un espacio de Banach reflexivo. Si para todo  $\phi \neq K \subset X$  subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $X$ ,  $\bar{C}_0(K) = \bar{C}_0(\text{Far}(K))$ , entonces  $X$  tiene la propiedad (I).

Ahora usando los resultados (1.19) y (1.20) obtenemos la siguiente caracterización de los espacios de Banach que poseen la propiedad (I) como:

(1.21): Sea  $(X, \| \cdot \|)$  un espacio de Banach reflexivo.  $X$  posee la propiedad (I), si y solo si, para todo subconjunto cerrado, acotado y convexo  $K$  de  $X$ ,  $\bar{C}_0(K) = \bar{C}_0(\text{Far}(K))$ .

Para finalizar esta sección daremos alguna información de ciertos artículos referidos al tópico que nos interesa y que nos muestran la importancia que ha ido tomando la propiedad (I) en los últimos años.

Los resultados de renormar los espacios normados con la propiedad (I) fueron probados por Deville, R., [4]

donde es demostrado por ejemplo que el "espacio Long James LJ" admite una norma equivalente con la propiedad (I), mientras la existencia de una norma equivalente F-diferenciable en LJ es aún un problema abierto.

V. Zisler, [24] probó que todo espacio de Banach que puede ser descompuesto en "forma bonita" en subespacios complementarios separables puede ser equivalentemente renormado de tal forma que todo conjunto débilmente compacto y convexo en X es entonces una intersección de bolas.

W.M. Ruess y C.P. Stegall en su artículo [19], caracterizaron el conjunto de puntos dentados débil-\* en el dual de las bolas unitarias de los espacios de operadores lineales compactos, débilmente compactos, y de todos los operadores lineales acotados entre dos espacios de Banach X e Y en términos de los puntos dentados de  $B(X)$  y de los puntos dentados débil-\* de  $B(Y)$ , y demostraron que para espacios de Banach X e Y, con  $\text{dim } X \geq 2$  y  $\text{dim } Y \geq 2$ , ninguno de los espacios de operadores:  $X \overset{Y}{\otimes}_{\epsilon} Y$ ,  $K_{\omega^*}(X^*, Y)$  y  $K(X, Y)$  satisfacen la propiedad (I). #

- 2.- En esta sección mostraremos algunas propiedades que satisfacen los espacios normados que poseen la propiedad (I).

(2.1): Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $\phi \neq Y \subset X$  es un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $X$  tiene la propiedad [I] entonces  $Y$  tiene la propiedad [I].

Prueba:

Sea  $\phi \neq K \subset Y$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $Y$ , y  $x \notin K$ . Como  $Y$  es un subespacio cerrado de  $X$  entonces  $K \subset X$  es un subconjunto cerrado, acotado y convexo en  $X$  y como  $X$  tiene la propiedad (I) entonces existe una bola cerrada  $B_x$  en  $X$  tal que  $K \subset B_x$  y  $x \notin B_x$ , de donde tenemos que  $K \subset B_x \cap Y$  y  $x \in B_x$ ;  $B_y = B_x \cap Y$  es una bola cerrada en  $Y$  tal que  $K \subset B_y$  y  $x \notin B_y$ , por lo tanto  $Y$  tiene la propiedad (I). #

En relación al resultado anterior dejaremos planteado el siguiente:

Problema # 2.1:

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado si todo subespacio cerrado de  $X$  tiene la propiedad (I), entonces, tiene  $X$  la propiedad [I]?

El siguiente resultado nos muestra que la propiedad [I] se preserva bajo transformaciones lineales continuas.

(2.2.): Sean  $(X, \|\cdot\|)$  e  $(Y, \|\cdot\|)$  espacios normados y  $T: X \rightarrow Y$

una transformación lineal continua y sobreyectiva. Si  $X$  tiene la propiedad [I] entonces  $Y$  tiene la propiedad [I].

**Prueba:**

Sea  $K_y \subset Y$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $Y$  e  $y \notin K_y$ . Como  $T$  es sobreyectiva existe  $K_x \subset X$  tal que  $T(K_x) = K_y$ . Como  $T$  es una aplicación lineal continua entonces  $K_x$  es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $X$  y además  $x \notin K_x$ . Puesto que  $X$  tiene la propiedad [I] entonces existe una bola cerrada  $B_x$  en  $X$  tal que  $K_x \subset B_x$  y  $x \notin B_x$ . Pero,  $K_y = T(K_x) \subset T(B_x) \subseteq B_y$  e  $y = T(x) \notin T(B_x) \subset B_y$ , así hemos hallado una bola cerrada  $B_y$  en  $Y$  tal que  $K_y \subset B_y$  e  $y \notin B_y$ , por lo tanto  $Y$  tiene la propiedad [I]. #

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de (2.2).

(2.3.): Sean  $(X, \|\cdot\|)$  e  $(Y, \|\cdot\|)$  espacios normados y  $T: X \rightarrow Y$  un isomorfismo.  $X$  posee la propiedad [I], si y solo si  $Y$  tiene la propiedad [I]. #

A continuación planteamos la situación de que si la propiedad [I] es transmitida al espacio cociente, y tenemos:

**Problema # 2.2.**

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $M \subseteq X$  un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $X$  tiene la propiedad (I), entonces, ¿tiene  $X/M$  la propiedad (I)?.

En relación al problema # 2.2 tenemos que existen ciertas respuestas parciales:

- 1.- Si  $X$  es reflexivo entonces  $X/M$  tiene la propiedad (I);
- 2.- Si  $X^*$  tiene la propiedad (I) entonces  $X/M$  tiene la propiedad (I);
- 3.- Si  $X^*$  es estrictamente convexo, entonces  $X/M$  es suave y  $\dim(X/M) = 2$  entonces  $X/M$  tiene la propiedad (I). #

La siguiente interrogante se refiere al problema de los 3 espacios:

**Problema # 2.3:**

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $M \subseteq X$  un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $M$  y  $X/M$  tienen la propiedad (I), ¿tiene  $X$  la propiedad (I)?.

Finalmente nos plantearemos el caso de el producto de espacios normados que poseen la propiedad (I).

**Problema # 2.4;**

Sea  $(X_i, \|\cdot\|_i)_{i=1}^n$  una familia finita de espacios normados que poseen la propiedad (I). Tiene el espacio producto,  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  con la norma

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2 \right)^{1/2} \text{ la propiedad (I)?} \quad \#$$

Para el momento de la redacción final del presente trabajo el autor desconocía el trabajo de A. Sersouri: (The Mazur property for compact sets, Pac. Jour of Math, 133, 1, (185-195), 1988). En el artículo 1. Sersouri prueba un resultado más general que el problema # 2.4, y que para información pasamos a enunciarlo:

Sea  $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$  una familia de espacios con la propiedad (I), entonces el espacio  $X = \left( \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha \right)_{c_0}$  tiene una norma equivalente con la propiedad (I). #

3.- En esta última sección dejaremos planteados una serie de problemas que resultan de comparar la propiedad (I) con otras propiedades geométricas de los espacios normados.

R.R. Phelps, [17] dá un ejemplo de un espacio de Banach isomorfo a  $\ell_1$ , el cual tiene las siguientes propiedades:

- 1.-  $X$  es suave y  $X^*$  es estrictamente convexo;
- 2.- la norma de  $X$  no es F-diferenciable en ningún punto

de  $S(X)$ ;

3.-  $X$  no posee la propiedad (I).

De este ejemplo se concluye que la propiedad (I) no es implicada por el hecho de ser  $X$  un espacio de Banach suave ó  $X^*$  ser estrictamente convexo. Así tenemos el siguiente,

Problema # 3.1:

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Si  $X$  tiene la propiedad (I). ¿Existe una norma  $\|\cdot\|$  equivalente a  $\|\cdot\|$  tal que  $(X, \|\cdot\|)$  sea estrictamente convexo: #

En relación al problema 3.1 tenemos que existen soluciones parciales si  $X$  es un espacio de Banach separable, o si  $X$  es un espacio de Banach tal que  $X^*$  posea la propiedad (I).#

Ahora recordaremos la siguiente definición:

(3.1): Decimos que un espacio de Banach tiene la propiedad (H) si  $X_n, X \in S(X)$  y  $X_n \rightarrow X$  entonces  $X_n \rightarrow X$  en norma; y decimos que  $X$  tiene la propiedad (HR) si  $X$  es estrictamente convexo y satisface la propiedad (H).

Son bien conocidos los siguientes resultados:

1.- Si  $X$  es (LUR) entonces  $X$  satisface la propiedad (HR).

2.- Si  $X^*$  es (LUR) entonces  $X$  tiene la propiedad (I). Por lo tanto si  $X^*$  es (LUR) entonces  $X^*$  tiene la propiedad (HR), así tenemos el siguiente,

**Problema # 3.2:**

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach tal que  $X^*$  posea la propiedad (HR). ¿Tiene  $X$  la propiedad (I)?.#

Sea  $(X_i)$  una sucesión de espacios de Banach y  $1 < p < \infty$ , el espacio  $(\ell_p(X_i), \|\cdot\|_p)$  es el espacio de Banach de todas las sucesiones  $x = (x_i)$  con  $x_i \in X_i$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$ , donde  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{1/p}$ .

Si cada  $X_i = X$ , para todo  $i$ , entonces  $\ell_p(X_i)$  es denotado por  $\ell_p(X)$  y si  $X = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  entonces  $\ell_p(X)$  es simplemente  $\ell_p$ .

En [20] Mark A. Smith da un excelente tabla resumen de las diferentes propiedades geométricas que satisface  $\ell_p(X_i)$  si  $(X_i)$  satisface tal propiedad.

A manera de información podemos señalar que si  $(X_i)$  es estrictamente convexo, LUR, MLUR, URED, HR entonces  $\ell_p(X_i)$  es estrictamente convexo, LUR, MLUR, URED, HR respectivamente, por lo tanto tenemos el siguiente,

**Problema # 3.3:**

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach con la propiedad [I]. ¿Tiene  $\ell_p(X)$ ,  $[1 < p < \infty]$  la propiedad [I]?

Se cumple el recíproco? #

Para un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ , un espacio de medida  $(S, \Sigma, \mu)$  y  $1 < p < \infty$ , el espacio  $(L^p(\mu, X), \|\cdot\|_p)$  es el espacio de funciones de Lebesgue-Bochner de  $\mu$ -clases de equivalencia de funciones fuertemente medibles  $f: S \rightarrow X$  con

$$\int_S \|f(s)\|^p d\mu(s) < \infty \text{ donde } \|f\|_p = \left( \int_S \|f(s)\|^p d\mu(s) \right)^{1/p}.$$

Si  $X = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , entonces  $L^p(\mu, X)$  es denotado simplemente por  $L^p(\mu)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $(S, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida completo.

M. Smith en [20] presenta un resumen de las diferentes propiedades geométricas que satisface  $L^p(\mu, X)$  si  $X$  satisface dicha propiedad. Ahora nos planteamos el siguiente,

Problema # 3.4:

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach con la propiedad [I] y  $(S, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida: ¿Tiene  $L^p(\mu, X)$ ,  $[1 < p < \infty]$  la propiedad [I]? Se cumple el recíproco? #

V. Zizler en [24] probó que si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Asplund con una función de dualidad direccionalmente semicontinua inferiormente entonces  $X$  tiene la propiedad (I). En relación a este resultado tenemos el siguiente,

Problema # 3.5.

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach con la propiedad (I). ¿Es  $X$  un espacio de Asplund?. #

En relación al problema 3.5 tenemos una respuesta positiva si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach y todo subespacio de  $X$  posee la propiedad (I) entonces por Corolario 3.18 de [13], tenemos que  $X$  es un espacio de Asplund. #

La siguiente noción juega un papel importante en la teoría del punto fijo para funciones no-expansivas. Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Denotamos por  $\text{diam}(H)$ , el diámetro de un subconjunto  $H$  de  $X$ ,  $\text{diam}(H) = \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in H\}$ . Un punto  $x_0 \in H$  es llamado un punto no-diametral de  $H$  si  $\sup\{\|x_0-y\| \mid y \in H\} < \text{diam}(H)$ . Un subconjunto convexo  $K$  de  $X$  se dice que tiene estructura normal si cada subconjunto convexo y acotado  $H$  de  $K$  para el cual  $\text{diam}(H) > 0$  posee un punto no-diametral, y el espacio  $X$  tiene estructura normal (EN) si ca-

da subconjunto convexo  $K$  de  $X$  tiene estructura normal.

Ahora nos hacemos las siguientes interrogantes para tratar de hallar, si es que existe, alguna relación entre los espacios de Banach que poseen la propiedad (I) y aquellos que tienen estructura normal.

Problema # 3.6:

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach:

1.- Si  $X$  tiene estructura normal, ¿tiene  $X$  la propiedad (I)?.

ó

2.- Si  $X$  posee la propiedad (I), ¿tiene  $X$  estructura normal?. #

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico Hausdorff compactos y consideremos el espacio de las funciones reales-continuas sobre  $X$ , y lo denotamos por  $C(X)$ .

Debe ser interesante averiguar bajo que condiciones  $C(X)$  posee la propiedad (I).

Para finalizar, considero conveniente tratar de generalizar los resultados dados para la propiedad (I) a espacios vectoriales topológicos. #

## R E F E R E N C I A S

- [1] E. Asplund, "Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach Spaces", Israel J. Math, 4, (1966), 213-216.
- [2] E. Bishop y R.R. Phelps", A proof that every Banach Space is subreflexive", Bull. AMS, 67 (1961), 97-98.
- [3] M.M. Day, "Normed linear spaces" 3 edit. Berlin, H, N.Y., Springer, 1973.
- [4] R. Deville, "Théorème de transfer pour la propriété de boules. Aparecerá.
- [5] J. Diestel, "Geometry of Banach spaces, selected TOPICS". Lecture Notes in Mathematics, (485), 1975).
- [6] M. Edelstein, "Farthest points of sets in uniformly convex Banach Spaces", Israel J. Math. 4, (1966), 171-176.
- [7] J.R. Giles, D.A. Gregory, y B. Sims, "Characterization of normed linear spaces with Mazur's intersección property". Bull. Aust. Math. Soc., 18, (1978), 105-123.
- [8] J.R. Giles, "Convex analysis with application in the differentiation of convex functions", Pitman Adv, Publ. Progr;

Boston, L.M. 1982.

- [9] K. John y V. Zisler, "A renorming dual spaces" Israel J. Math. 12, (1972), 331-336.
- [10] K.S. Lau' "Farthest points in weakly compact sets", Israel J. Math, 22, (1975), 168-174
- [11] A.R. Loyaglia, "Locally uniformly convex Banach spaces". Trans. AMS, 78 (1985), 225-238
- [12] S. Mazur, "Uber Schwache Konvergenz in deu Raumen ( $L^p$ )", Studia Math 4, (1933), 128-133.
- [13] J.R. Morales, "Caracterización de los espacios normados que poseen la propiedad de intersección de Mazur". Trabajo de Ascenso, U.L.A. 1988.
- [14] T.D. Narang, "A study of farthest points" Nieuw. Arch.Vour Wisk. (3), 25, (1977), 54-79.
- [15] B.B. Panda y O.P. Kapour, "On farthest ponts of sets". J. Math. Anal Appl. 62, (1978), 345-353.
- [16] R.R. Phelps, "Subreflexive normed linear space", Arch. Math. 8, (1957), 444-450.
- [17] R.R. Phelps, "A representation theorem for bounded convex sets". Proc. AMS, 11 (1960), 976-983.
- [18] G. Restrepo, "Differentiable norms in Banach Spaces", Bull.

- AMS, 70, (1964), 413-414.
- [19] W.M. Ruess y C.P. Stegall, "Weak \* denting points in duals of operators spaces". Lecture notes in Math, 1166, (1984), 158-168.
- [20] M.A. Smith, "Rotundity and Extremity in  $\ell_p(X_i)$  and  $L^p(\mu, X)$ ". Preprint.
- [21] F. Sullivan, "Dentability, Smoothability, and Stronger Properties in Banach Spaces", Indiana Math J., 26, (1977), 545-553.
- [22] S.L. Troyanski, "On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach Spaces", Studia Math, 37, (1971), 173-180.
- [23] V. Zizler, "A note on duality mapping in Banach Spaces". Archiv der Math, 26, (1975), 94-97.
- [24] V. Zizler, "Renorming concerning Mazur's intersection property of balls for weakly compact convex sets", Math Ann., 276, (1986) 61-66.