NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 95

SOBRE LA ESTABILIDAD DE UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES PERIODICOS DE ORDEN 2x2

POR

ANTONIO TINEO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA-VENEZUELA

1988

0. INTRODUCCION. En estas notas estudiamos la estabilidad de un sistema de la forma

$$x' + a(t)\, x + b(t)\, y = 0, \quad y' + c(t)x + d(t)y = 0 \quad . \tag{0.1}$$

donde $a,b,c,d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas positivas y T-periódicas para algún $T > 0$.

La importancia de este sistema radica en el hecho de que la estabilidad de las soluciones periódicas, de las ecuaciones de Lotka-Volterra (para dos especies en competencia en un ecosistema periódico), suele decidirse a través de tales sistemas. Para más información ver [ ], [ ].

En lo que sigue $\Phi(t)$ denota la matriz fundamental de (0.1) con $\Phi(0)$ = identidad. Uno de nuestros propósitos es mostrar el siguiente resultado:

0.1 TEOREMA. Supongamos que

$$\max(b/d) < \min(a/c) \tag{0.2}$$

entonces los autovalores de $\Phi(T)$ son reales diferentes y se encuentran en el intervalo (0.1). En particular el sistema (0.1) es asintóticamente estable.

El trabajo termina mostrando que el teorema 0.1 es falso si asumimos solamente

$$V/d < a/c \tag{0.3}$$

Esta última afirmación será probada indirectamente, usando resultados concernientes a las ecuaciones de Lotka-Volterra.

1. PRUEBA DEL TEOREMA 0.1. Dicha prueba será dada en dos etapas. Comenzaremos probando el siguiente resultado:

1.1. PROPOSICION. Si $b,c > 0$ entonces los autovalores de $\Phi(T)$ son reales positivos y diferentes. Si además $a > 0$, $d > 0$, entonces $\Phi(T)$ tiene un autovalor en (0.1).

DEMOSTRACION. Pongamos

$$Q(t) = \exp\left(\int_0^t [a(s) + d(s)]ds\right)$$

y sea (h,k) una solución no trivial de (0.1). Si definimos $F = Q\,h\,k$ entonces $F' = -Q(ch^2 + bk^2) < 0$; y así F es estrictamente decreciente. De este hecho se sigue que los elementos de la diagonal de $\Phi(T)$ son positivas y los de la antidiagonal son negativos. En particular resulta que los autovalores λ,μ de $\Phi(T)$ son reales diferentes con $\lambda + \mu > 0$. En fin $\lambda\mu = Q(T)^{-1} > 0$ y el resultado se sigue fácilmente, porque $Q(T) > 1$.

1.2. PRUEBA DEL TEOREMA 0.1. De acuerdo a la proposición anterior bastará ver que $\Phi(T)$ no tiene autovalor en $[1,\infty)$. Suponga mos que $\lambda \geq 1$ es un autovalor de $\Phi(T)$; entonces el sistema (0.1) posee una solución no trivial (h,k) tal que $h(t+T) = \lambda h(t)$ y $k(t+T) = \lambda k(t)$. Sea ahora $F = Q\,h\,k$ definida como antes; ya que F es estrictamente decreciente y $Q(t+T) = Q(t)\,Q(T)$, entonces

$$0 > F(t+T) - F(t) = [Q(T) - \lambda^2]\,h(t)\,k(t)$$

de donde $h(t)\,k(t) \neq 0$ $(t \in \mathbb{R})$. Pero (h,k) es solución periódica de (0.1) y en consecuencia no puede ser $h.k > 0$. (En caso contrario se tendría $h\,h' < 0$). En consecuencia $h\,k < 0$ y, sin pérdida de generalidad podemos asumir $h > 0 > k$.

De (0.1) se tiene

$$\int_0^T ah = \int_0^T b(-k) \quad , \quad \int_0^T ch = \int_0^T d(-k)$$

lo cual implica la siguiente contradicción:

$$\min(a/c) \int_0^T ch \leq \int_0^T \frac{a}{c}\,ch = \int_0^T ah = \int_0^T b(-k) = \int_0^T \frac{b}{d}\,d(-k) \leq$$

$$\leq \max\,(b/d \int_0^T d(-k) = \max(b/d) \int_0^T ch \qquad (1.1)$$

Esto termina la demostración.

NOTA. Supongamos que $\min(a/c) = \max(b/d)$ y que algunas de las funciones a/c , b/d no es constante. Entonces, procediendo como antes y usando (1.1) es fácil ver que el Teorema (0.1) permanece válido.

2. UN CONTRA-EJEMPLO. En esta sección mostramos que el Teorema 0.1 es falso bajo la condición (0.3).

2.1. PROPOSICION. Existen funciones α,β: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periódicas continuas positivas tales que $\alpha\beta < 1$,

$$\int_0^1 \alpha(t)dt > 1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \beta(t)dt > 1. \tag{2.1}$$

DEMOSTRACION. Escojamos un entero $N \geq 1$ tal que $(N+1)\ln 2 > 2$ y pongamos $k = 2^{-N}$. Sea ahora α_0: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 1-periódica (continua positiva) determinada por

$$\alpha_0(t) = \begin{cases} 2(k-2)t + 2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2(2-k)t + 2k-2 & \text{si} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y pongamos $\beta_0(t) = 1/\alpha_{0(t)}$; $t \in \mathbb{R}$; entonces

$$\int_0^1 \alpha_0(t)dt = 1 + \frac{1}{2}k > 1 \quad ; \quad \int_0^1 \beta_0(t)dt > \frac{2}{2-k} > 1 .$$

El resultado se obtiene definiendo $\beta = \beta_0$, $\alpha(t) = \alpha_0(t) - \varepsilon$ donde ε es un número prefijado tal que $0 < 2\varepsilon < k$.

En lo que sigue α,β denotan dos funciones 1-periódicas satisfaciendo las conclusiones de la proposición 2.1, además T: $\mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+ := \{(x,y): x \geq 0,\ y \geq 0\}$ denotará la aplicación de Poincaré asociada al sistema de Lotka-volterra siguiente:

$$u' = u\,[1-u - \alpha(t)v] \quad , \quad v' = v[1-\beta(t)u - v] \tag{2.2}$$

Si $p \in \mathbb{R}_+^2$ es un punto fijo de T pondremos $W^s(p) = \{q \in \mathbb{R}_+^2 : T^n_{(q)} \to p\}$ (variedad estable de T en p).

2.2. PROPOSICION. T posee un punto fijo p_* con ambas componentes positivas tal que $W^s(p_*)$ no es un abierto de $\mathbb{R}_+^2$.

DEMOSTRACION. Pongamos $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (1,0)$, $p_2=(0,1)$ y sea Fix(T) el conjunto de puntos fijos de T. Es bien conocido que $p_i \in \text{Fix}(T)$ $(i=0,1,2)$; $W^s(p_0) = \{p_0\}$, $W^s(p_1) \supseteq (0,\infty) \times \{0\}$ y $W^s(p_2) \supseteq \{0\} \times (0,\infty)$. Por otra parte, usando los argumentos de [ ] se sigue de (2.1) que $W^s(p_i)$ es abierto (en $\mathbb{R}_+^2$) si i=1,2, y que T tiene un punto fijo con ambas coordenadas positivas.

Pongamos $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$; usando nuevamente los resultados de [ ] se tiene que

$$P = \cup \{W^s(p) : p \in \text{Fix}(T),\ p \neq (0,0)\}$$

Si fuera $W^s(p)$ abierto en $\mathbb{R}_+^2$ para cada $p \in \text{Fix}(T)$, $p \neq (0,0)$ se tendría que P es reunión de una familia de abiertos disjuntos que contiene al menos tres miembros. Esto contradice la conexidad de P y termina la demostración.

2.3. NOTA. Sea p un punto fijo de T con ambos componentes positivas y sea (u,v) la solución 1-periódica de (2.2) determinada por $(u(0), v(0)) = p$; entonces $T'(p) = \Phi(1)$, donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental, con $\Phi(0)$ = identidad, del sistema

$$x' = x\,[1 - u(t) - \alpha(t)v(t)] - u(t)\,[x + \alpha(t)y]$$

$$y' = y\,[1 - \beta(t)u(t) - v(t)] - v(t)\,[\beta(t)\,x + y]$$

Recordando que $1 - u - \alpha v = u'/u$, $1 - \beta u - v = v'/v$, vemos que la matriz funcional $\psi(t)$ definida por

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} u(t)^{-1} & 0 \\ 0 & v(t)^{-1} \end{pmatrix} \Phi(t) \begin{pmatrix} u(0) & 0 \\ 0 & v(0) \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental con $\psi(0)$ = identidad, del sistema

$$x' = -u(t)x - \alpha(t)v(t)y \ , \quad y' = -\beta(t)u(t)x - v(t)y$$

Ya que $\psi(1)$ y $\Phi(1)$ sin matrices similares, entonces ellas tienen los mismos autovalores y de la proposición 1.1 se concluye que los autovalores de $T'(p)$ son reales positivos diferentes, uno de los cuales está en $[0,1)$.

2.4. PROPOSICION. Sea p_* dado por la proposición 2.2; entonces $T'(p_*)$ tiene un autovalor en $[1,\infty)$.

DEMOSTRACION. En caso contrario se tendría (de acuerdo a la nota anterior) que los autovalores de $T'(p_*)$ están en $(0,1)$ y en consecuencia $W^s(p_*)$ será abierto. Esta contradicción termina la prueba.

2.5. TEOREMA. Existen funciones 1-periódicas a,b,c,d continuas positivas satisfaciendo (0.3) tales que el sistema (0.1) posee una solución 1-periódica no tirival.

DEMOSTRACION. Sea p_* dado por la proposición 2.2 y sea $(u_*(t), v_*(t))$ la solución 1-periódica de (0.1) que en el tiempo $t = 0$ pasa por p_*. Sea además, $\Phi_*(t)$ la matriz fundamental con $\Phi_*(0)$ = identidad, del sistema

$$x' = - u_*(t)x - \alpha(t)\, v_*(t)y, \quad y' = - \beta(t)u_*(t)x - v_*(t)y \tag{2.3}$$

De la nota 2.3 y la proposición 2.4 se sigue que $\Phi_*(1)$ posee un autovalor en $[1,\infty)$, en consecuencia el sistema (2.3) posee una solución no trivial (h,k) tal que $h(t+1) = \lambda\, h(t)$ y $k(t+1) = \lambda k(t)$. Sea $\mu \geq 0$ tal que $\lambda = \exp(\mu)$ y definamos $p(t) = \exp(-\mu\, t)\, h(t)$, $q(t) = \exp(-\mu t)\, k(t)$; entonces (p,q) es una solución 1-periódica no trivial del sistema

$$x' = - (u_*(t)+\mu)x - \alpha(t)v_*(t)y \quad , \quad y' = - \beta(t)u_*(t)x - (v_*(t)+\mu)\, y\, .$$

El resultado se sigue ahora tomando $a(t) = \mu_* + u(t)$ $b(t) = \alpha(t)\, v_*(t)$ etc. #

B I B L I O G R A F I A

[1] ALVARFZ C. AND LAZER A. An application of topologiçal degree to the periodic competinq species problem. J. Austral. Math. Soc. Ser. B 28 (1986) 202-219.

[2] ALVAREZ C. AND TINEO A. Asymptotically stable solution of Lotka-Volterra Equations por aparecer en Radovi Matematicki Vol. 4, issue 2 (1988).

[3] MOTTONI P. AND SCHIAFFINO A. Competition system with periodic coeficients: A geometric approach. J. Math. Biol. 11 (1981) 319-335.

B I B L I O G R A F I A

[1] ALVAREZ C. AND LAZER A. An application of topological degree to the periodic competing species problem. J. Austral. Math. Soc. Ser. B 28 (1986) 202-219.

[2] ALVAREZ C. AND TINEO A. Asymptotically stable solution of Lotka-Volterra Equations por aparecer en Radovi Matematicki Vol. 4, issue 2 (1988).

[3] MOTTONI P. AND SCHIAFFINO A. Competition system with periodic coeficients: A geometric approach. J. Math. Biol. 11 (1981) 319-335.