NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 118

LA PROPIEDAD (K-M) EN ESPACIOS DE BANACH

POR

JOSE ROBERTO MORALES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1991

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA

LA PROPIEDAD (K-M) EN ESPACIOS DE BANACH

TRABAJO DE ASCENSO PRESENTADO POR EL PROF. JOSE R. MORALES PARA OPTAR A LA CATEGORIA DE PROFESOR ASOCIADO.

1991

I N D I C E

LA PROPIEDAD (K-M) EN ESPACIOS DE BANACH

R E S U M E N

En el presente trabajo nuestro objetivo es estudiar la propiedad (K-M) en espacios de Banach y su relación con otras propiedades geométricas de dichos espacios.

I N T R O D U C C I O N

La propiedad (K-M) es una propiedad geométrica de los espacios de Banach definida por el autor en [14], que generaliza la propiedad (M), denotada así por B.B. Panda y O.P. Kappor, [17], pero esta propiedad fue inicialmente introducida y ampliamente estudiada por L.P. Vlasov en [24,25], quien la denotó por (CLUR) en el año 1967. La propiedad (K-M) es una de las muchas generalizaciones de los espacios localmente uniformemente convexos,(LUR) noción introducida por A.R. Lovaglia, [13] en 1955.
N. Chao-Xun y W. Jian-Hua, [26] introducen los espacios L-KR, que constituyen una generalización de los espacios (LUR), y acadaremos un resultado que nos dice bajo qué condiciones la propiedad (K-M) y los espacios L-KR son equivalentes.

Para finalizar esta parte introductoria diremos que en la sección preliminar, enunciaremos algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach en las cuales estamos interesados, tam bién daremos algunos resultados que nos muestran las relaciones existentes entre tales propiedades geométricas.

En la segunda sección definiremos la propiedad (K-M) y daremos otras propiedades geométricas y estudiaremos su relación con la propiedad (K-M). También dejaremos planteadas algunas interrogantes.

PRELIMINARES

En esta sección daremos algunas definiciones de las propiedades geométricas, en las cuales estamos interesados, resultados importantes que satisfacen tales propiedades y la notación a usar.Por E denotamos un espacio de Banach real y por E^* su dual. Por $B_E(B_{E^*})$ y $S_E(S_{E^*})$ denota la bola unitaria de $E(E^*)$ y la esfera de $E(E^*)$, respectivamente. Ahora pasamos a dar las definiciones de las propiedades geométricas.

DEFINICION 1. [4]:

Un espacio de Banach E, se dice uniformemente convexo,(UR), si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta(\varepsilon)>0$ tal que para todo

$$x,y \in B_E \quad y \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq 1 - \delta(\varepsilon)$$

entonces $\| x-y\| \leq \varepsilon$.

Esta definición fué introducida por J.A. Clarkson, [4] en 1936, quién además mostró que los espacios L^p y ℓ_p, $(1<p<\infty)$ son espacios (UR).

En 1939, V.L. Smul'yan, ver [6], introduce los espacios 2R, y en el año 1955, K. Fan e I. Glicksberg, [8] generalizan la noción de Smul'yan y definen los espacios Fully Convexos, más ampliamente conocidos como espacios KR, $K \geq 2$, y estos espacios generalizan los espacios (UR).

DEFINICION 2, [8]:

Sea $K \geq 2$. Un espacio de Banach E se dice Fully-K Convexo, (KR), si para cualquier sucesión $(x_n)_1^\infty$ en E tal que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \frac{1}{K} \| x_{n_1}+\ldots+x_{n_K} \| = 1,$$

entonces $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy en E.

El siguiente resultado nos dá la relación existente entre los espacios uniformemente convexos y los espacios (KR).

TEOREMA 1, [1]:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

$$(UR) \Rightarrow 2R \Rightarrow \ldots . KR \Rightarrow (K+1)R.$$

PRUEBA:

$UR \Rightarrow 2R$:

Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tal que

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} \frac{1}{2} \| x_{n_1} + x_{n_2} \| = 1.$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 1$, y podemos asumir que $\| x_n \| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)>0$, el de la definición 1, de espacio UR, E. Tomemos N tal que

$$\frac{1}{2} \| x_{n_1} + x_{n_2} \| \geq 1 - \delta$$

para todo $n_1, n_2 \geq N$. Entonces, por hipótesis tenemos que

$$\| x_{n_1} - x_{n_2} \| < \varepsilon, \text{ para todo } n_1, n_2 \geq N.$$

Así, $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy en E y hemos mostrado que E es un espacio 2R.

KR $\Rightarrow$ (K+1)R:

Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tal que

$$\lim_{n_1, \ldots, n_K \to \infty} \frac{1}{K+1} \| x_{n_1} + \ldots + x_{n_{K+1}} \| = 1.$$

Usando la desigualdad triangular tenemos

$$\frac{K+1}{K} \| \frac{1}{K+1} \sum_{i=1}^{K+1} x_{n_i} \| \leq \frac{1}{K} \| \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| + \frac{1}{K} \| x_{n_{K+1}} \|$$

y

$$\frac{K+1}{K} \| \frac{1}{K+1} \sum_{i=1}^{K+1} x_{n_i} \| - \frac{1}{K} \| x_{n_{K+1}} \| \leq \frac{1}{K} \| \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \|, \quad (*)$$

como $\|x_n\| \longrightarrow 1$, de $(*)$ se sigue que

$$1 = \frac{K+1}{K} - \frac{1}{K} \leq \lim_{n_1, \ldots, n_K \to \infty} \frac{1}{K} \| \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| \leq 1.$$

por tanto,

$$\lim_{n_1, \ldots, n_K \to \infty} \frac{1}{K} \| x_{n_1} + \ldots + x_{n_K} \| = 1,$$

y como E es un espacio de Banach, entonces $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión de Cauchy en E y esto nos muestra que E es un espacio (K+1)R. ■

El recíproco de las implicaciones del teorema 1, en general no se cumplen.

En 1955, A.R. Lovaglia, [3] define los espacios localmente uniformemente convexos, y en el año 1979, F. Sullivan, [21] introdujo los espacios K-UR y los espacios LK-UR, $K \geq 1$, propiedades geométricas que generalizan la noción de Clarkson, y de las cuales pasamos a dar sus definiciones respectivas.

DEFINICION 3, [13]:

Un espacios de Banach E es localmente uniformemente convexo (LUR), si $x \in S_E$, $(x_n)_1^{\infty} \subseteq B_E$ y $\| x_n + x \| \longrightarrow 2$ entonces $x_n \longrightarrow x$.

Para $x_1, \ldots, x_{K+1} \in E$, definimos la función volumen, [11, 21, 23], por

$$V(x_1,\ldots,x_{K+1}) = \sup\left\{ \left| \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ f_1(x_1) & \ldots & f_1(x_{K+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_K(x_1) & \ldots & f_K(x_{K+1}) \end{matrix} \right| \quad : \begin{matrix} f_i \in B_{E^*} \\ 1 \leq i \leq K \end{matrix} \right\}$$

DEFINICION 4, [21]:

Sea $K \geq 1$. Un espacio de Banach E se dice K-uniformemente convexo, (K-UR) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $\|x_i\| = 1, i=1,\ldots,K+1$, y $\frac{1}{K+1} \| x_1 + \ldots + x_{K+1} \| \geq 1-\delta$ entonces $V(x_1,\ldots,x_{K+1}) < \varepsilon$.

DEFINICION 5, [21]:

Sea $K\geq 1$. Un espacio de Banach E se dice localmente K-uniformemente convexo, (L-KUR) si para cualquier $\varepsilon>0$ y $x \in S_E$ existe un $\delta(x,\varepsilon)>0$ tal que para

$$x_1,\ldots,x_K \in S_E \quad y \quad \frac{1}{K+1} \| x + x_1+\ldots+ x_K\| \geq 1-\delta$$

implica que $V(x,x_1,\ldots,x_K) < \varepsilon$.

De la definición 4, para K=1 obtenemos la siguiente afirmación:

Un espacio de Banach E, se dice 1-uniformemente convexo, (1-UR) si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta(\varepsilon)>0$ tal que si

$$x,y\in B_E \quad y \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq 1-\delta(\varepsilon)$$

entonces

$$V(x,y) = \sup\left\{ \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ f(x) & f(y) \end{matrix} \right| \ / \ f_* \in B_{E^*} \ < \varepsilon \right\}$$

y de aca obtenemos que $\| x-y \| \leq \varepsilon$. Por tanto, la definición de espacio 1-UR coincide con la definición 1, de espacio UR.

TEOREMA 2:

Sea E un espacio de Banach. Entonces, para $K \geq 1$,

$$UR \Rightarrow 2\text{-}UR \Rightarrow \ldots K\text{-}UR \Rightarrow (K+1)\text{-}UR.$$

PRUEBA:

$UR \Rightarrow 2\text{-}UR$:

Sean $\varepsilon>0$ y $\delta(\varepsilon)>0$. Consideremos $x,y,z \in E$ tales que,

$$\| x + y + z \| \geq 3 - \delta(\varepsilon).$$

Usando la desigualdad triangular tenemos

$$\| x+y \| \geq \| x+y+z \| - \| z \| \geq 3-\delta(\varepsilon)-1 = 2-\delta(\varepsilon)$$

y en forma similar tenemos

$$\| x+z \| \geq 2-\delta(\varepsilon) \quad \text{y} \quad \| y+z \| \geq 2-\delta(\varepsilon).$$

Ahora,

$$V(x,y,z) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x) & f(y) & f(z) \\ g(x) & g(y) & g(z) \end{vmatrix} : f,g \in B_{E^*} \right\}$$

de donde se obtiene

$$V(x,y,z) \leq V(y,z) + V(x,z) + V(x,y)$$

y como E es (UR) entonces $V(x,y,z)<\varepsilon$, y por tanto E es 2-UR.

K-UR $\Rightarrow$ (K+1)-UR:

Supongamos que $\| x_n^{(i)} \| = 1$, $i=1,\ldots,K+2$, $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{K+2} \| \sum_{i=1}^{K+2} x_n^{(i)} \| = 1.$$

Entonces, para cada $j=1,2,,\ldots,K+2$ y usando la desigualdad tria-gular obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x_n^{(1)}+\ldots+x_n^{(j-1)}+x_n^{(j+1)}+\ldots+ x_n^{(K+2)} \|$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{K+1} \left| \| \sum_{i=1}^{K+2} x_n^{(i)} \| - \| x_n^{(j)} \| \right|$$

$$= \frac{1}{K+1} \left[(K+2)-1 \right] = 1,$$

por tanto para cada $j=1,\ldots,K+2$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x_n^{(1)}+\ldots+ x_n^{(j-1)}+ x_n^{(j+1)} + \ldots+ x_n^{(K+2)} \| = 1. \quad (**)$$

Sean f_1, $f_2,\ldots,f_{K+1} \in B_{E^*}$ y consideremos el determinante siguiente,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f_1(x_n^{(1)}) & f_1(x_n^{(K+2)}) \\ \vdots & \vdots \\ f_{K+1}(x_n^{(1)}) & f_{K+1}(x_n^{(K+2)}) \end{vmatrix}$$

y desarrollándolo por menores a lo largo de la segunda fila y usando (**), se obtiene

$$V(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(K+2)}) \le \sum_{i=1}^{K} V(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(j-1)},x_n^{(j+1)},\ldots,x_n^{(K+2)})$$

y como E es un espacio K-UR entonces $V(x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(K+2)}) < \varepsilon$, y así hemos mostrado que E es un espacio (K+1)-UR. ■

TEOREMA 3:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

LUR $\Leftrightarrow$ L-1 UR $\Rightarrow$ L-2 UR $\Rightarrow$ ...L-K UR $\Rightarrow$ L-(K+1) UR

PRUEBA:

Se muestra en forma similar al teorema 2. ■

D.P. Milman y B.J. Pettis mostraron en forma independiente el resultado siguiente:

Sea E un espacio de Banach.

Si E es un espacio UR

entonces E es un espacio reflexivo.

Su demostración puede ser vista en la monografía de J. Diestel [6] o en la de V.T. Istratescu, [10].

K. Fan e I. Glicksberg, [8] obtuvieron igual conclusión si E es un espacio KR, y F.Sullivan, [21], si E es un espacio K-UR; la demostración de estos últimos resultados pueden ser vista en la monografía de Bor-Luh Lin, [1].

Ahora recordemos la definición de espacio estrictamente convexo.

DEFINICION 6:

Sea E un espacio de Banach. Diremos que E es un espacio estrictamente convexo, (R), si $x,y\in S_E$ y $\| x+y \| = 2$, entonces $x=y$.

Referente a la paternidad de la anterior definición podemos decir que la referencia más antigua que se conoce es el artículo de J. A. Clarkson, [4], quien mostró que todo espacio de Banach separable E posee una norma equivalente bajo la cual E es un espacio estrictamente convexo.

El lema que a continuación pasamos a enunciar nos será útil más adelante.

LEMA 4, [26]:

Sea E un espacio de Banach.

i) Si E es un espacio K-UR y $(x_n)_1^{\infty}$ es una sucesión en E tal que

$$\lim_{n_1,\dots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x_{n_1}+\dots+ x_{n_{K+1}} \| = 1$$

entonces $(x_n)_1^\infty$ es un subconjunto relativamente compacto en E.

ii) Si E es un espacio LK-UR, sean $x \in S_E$ y $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tales que $\|x_n\| \longrightarrow 1$ y $\lim\limits_{n_1,\ldots,n_K \to\infty} \| x+x_{n_1}+\ldots+x_{n_K} \| = K+1$, entonces $(x_n)_1^\infty$ es un subconjunto relativamente compacto en E.

PRUEBA:

Para la demostración de este lema ver [26]. ∎

El siguiente resultado se debe a Bor-luh lin y Yu Xin-tai, [2], pero acá seguiremos la prueba sugerida por Nan Chao-Xun y Wang Jian-Hua, [26].

TEOREMA 5:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

$$K\text{-UR} + R \Rightarrow (K+1)R.$$

PRUEBA:

Sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tal que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_{K+1}\to\infty} \frac{1}{K+1} \left\| \sum_{i=1}^{K+1} x_{n_i} \right\| = 1. \qquad (1)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\| x_n \| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que toda subsucesión de $(x_n)_1^\infty$ tiene una subsucesión de Cauchy. En efecto, como E es un espacio K-UR, entonces por el lema 4 (i), $(x_n)_1^\infty$ es un subconjunto relativamente compacto en E, esto es $(x_n)_1^\infty$ tiene una subsucesión convergente en E y por tanto toda subsucesión de una subsucesión convergente es convergente, así tal subsucesión es de Cauchy.

Ahora mostraremos que $(x_n)_1^\infty$ tiene un único punto límite. En efecto, supongamos que existen subsucesiones (x_{n_i}) y (x_{m_i}) de (x_n) tales que

$$x_{n_i} \longrightarrow x, \quad x_{m_i} \longrightarrow y$$

donde $x,y \in E$.

Evidentemente tenemos que $\|x\| = \|y\| = 1$. Por (1) y usando la desigualdad triangular obtenemos,

$$\lim_{i\to\infty} \| x_{n_i} + x_{m_i} \| = 2$$

y por tanto, $\| x+y \| = 2$, y como E es (R) entonces $x = y$. Esto completa la prueba del teorema. ■

En 1988, Nao Chao-Xun y W. Jian Hua, [26] introdujeron los espacios L-KR, K≥1 que generalizan los espacios LUR.

DEFINICION 7, [26]:

Sea K≥1. Un espacio de Banach E se dice que es un espacio L-KR, si para cada sucesión $(x_n)_1^\infty$ en E y $x\in E$ tales que, $x \in S_E$

$$\lim_{n_1,\dots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1 \quad y \quad \| x_n \| \longrightarrow 1$$

entonces $x_n \longrightarrow x$.

Ahora tenemos el siguiente,

TEOREMA 6:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

$$LK\text{-}UR + R \Rightarrow L\text{-}KR.$$

PRUEBA:

Sea $x \in S_E$ y sea $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tales que,

$$\lim_{n_1,\ldots,n_K \to \infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_n \| = 1 \quad \text{y} \quad \| x_n \| \longrightarrow 1.$$

Como E es un espacio LK-UR, entonces por el lema 4 (ii) se tiene que $(x_n)_1^\infty$ es un subconjunto relativamente compacto en E. Por lo tanto, existe un $y \in E$ y una subsucesión (x_{n_i}) de (x_n) tal que $x_{n_i} \longrightarrow y$. Evidentemente, obtenemos que

$$\| y \| = 1 \quad \text{y} \quad \| x + ky \| = k + 1.$$

Así, $\| x+y \| = 2$ y como E es (R) entonces $x = y$, y esto nos muestra que x es el único punto límite de $(x_n)_1^\infty$, y por tanto $x_n \longrightarrow x$ y así hemos mostrado que E es un espacio L-KR. ■

En el año 1958, K. Fan e I. Glicksberg, [9] entre otras propiedades geométricas, introdujeron la propiedad (G) y la propiedad (H) en espacios estrictamente convexos. Es conveniente acotar, que en cierta forma no se conoce una referencia exacta del nacimiento de la propiedad (H), puesto que Radon en 1913 mostró que los espacios $L^P(\mu)$ poseen tal propiedad, y V.L. Smul'yan en 1939 demostró que todos los espacios (UR) satisfacen la propiedad (H). Para finalizar este comentario nos atreveríamos a decir que la propiedad (H), sola como una propiedad geométrica aparece definida por primera vez en la monografía de M.M. Day, [5] y esta propiedad también es conocida como la propiedad (K).

DEFINICION 8, [9]:

Un espacio de Banach E tiene la propiedad (G) si para cada $x \in S_E$ y $\varepsilon>0$, $x \in \overline{C}_o\, M(x,\varepsilon)$, donde $M(x,\varepsilon)$ esta dado por

$$M(x,\varepsilon) = \{ y: y \in B_E, \| y-x \| \geq \varepsilon\}.$$

DEFINICION 9, [5]:

Un espacio de Banach E, decimos que satisfacen la propiedad (H) si para todo $x \in S_E$ y $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tales que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad \| x_n \| \longrightarrow 1, \text{ entonces } \| x_n - x \| \longrightarrow 0.$$

K. Fan e I. Glisksberg, [9] mostraron que todo espacio LUR satisface la propiedad (G), la propiedad (H) y además que el espacio es estrictamente convexo.

Nan Chao-Xun y Wang Jian Hua en el siguiente artículo "Locally Fully K-Convex and Weakly Locally Fully K-Convex" en idioma chino, pero en su resumen podemos leer que ellos obtuvieron igual conclusión para espacios L-KR y el autor desconoce la prueba dada por ellos y pasamos a dar la nuestra.

TEOREMA 7:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

$$\begin{array}{ccccc} \text{L-KR} & \Rightarrow & \text{propiedad (G)} & \Rightarrow & \text{propiedad (H)} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(R)} & & \end{array}$$

PRUEBA:

Unicamente mostraremos

$$\text{L-KR} \Rightarrow \text{propiedad (G)}$$

ya que las otras son ampliamente conocidas. Supongamos que E es un espacio L-KR, pero no posee la propiedad (G). Entonces, existen un x en S_E y un $\varepsilon>0$ tal que $x \in \overline{C}_o\ M(x,\varepsilon)$. Seleccionemos ahora un $x^* \in S_{E^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. Puesto que

$$\sup x^*(\overline{C}_o\ M(x,\varepsilon)) = \sup x^*(M(x,\varepsilon)) \leq 1$$

y

$$x^*(x) \leq \sup x^*(\overline{C}_o\ M(x,\varepsilon)) \text{ se concluye que}$$

$$\sup x^*(M(x,\varepsilon)) = 1.$$

Ahora, sea (x_n) una sucesión en $M(x,\varepsilon)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = 1.$$

De donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 1$.

Más aún,

$$1 \geq \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| \geq \frac{1}{K+1} x^*(x + x_{n_1} + \ldots + x_{n_K})$$

$$= \frac{1}{K+1} [\ x^*(x) + x^*(x_{n_1}) + \ldots + x^*(x_{n_K})\ ] \longrightarrow 1,$$

por tanto,

$$\lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1,$$

y como E es un espacio L-KR se tiene que $x_n \longrightarrow x$, lo cual es imposible ya que $(x_n)_1^{\infty} \subseteq M(x,\varepsilon)$. Esta contradicción establece el resultado. ■

Para finalizar esta sección daremos algunos ejemplos que satisfacen las propiedades geométricas antes mencionadas.

EJEMPLO 1:

Consideremos el ejemplo dado por M.A. Smith, [19]. En efecto, para $x = (x^1, x^2, \ldots) \in \ell_2$ se define una norma $\| \,.\, \|$ por

$$\| x \| = | x^1 | + \| \tilde{x} \|_2, \text{ donde } \tilde{x} = (0, x^2, x^3, \ldots),$$

que satisface, $\|x\|_2 \leq \| x \| \leq 2 \| x \|_2$ y por tanto, $\| \,.\, \|$ es una norma equivalente a $\|.\|_2$.

Sea (α_n) una sucesión de números reales positivos decreciente a cero y $T\colon \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ una aplicación lineal continua dada por

$$T(x) = (\alpha_2 x^2, \alpha_3 x^3, \ldots).$$

Ahora, para cada $x \in \ell_2$ definimos una norma en ℓ_2 por

$$\| x \| = (\| x \|^2 + \| Tx \|_2^2)^{1/2}$$

que es equivalente a $\| \,.\, \|_2$.

Como (α_n) es una sucesión decreciente a cero se tiene que $\| Tx \| \leq \| x \|_2$ y por otra parte tenemos que $\| x \| \leq 2 \| x \|_2$ por tanto, $\| x \| \leq \sqrt{5} \| x \|_2$ y además $\| x \| \geq \| x \|_2$ y así

$$\| x \|_2 \leq |||x||| \leq \sqrt{5}\, \| x \|_2,$$

esto es $|||\cdot|||$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$.

Denotamos por $E = (\ell_2, |||\cdot|||)$. M.A. Smith demostró que E es un espacio estrictamente convexo y que satisface la propiedad (H).

T. Polak y B. Sims [18] tomaron $\alpha_n = \frac{1}{n}$ y demostraron que el espacio E es un espacio 2R, pero no es un espacio LUR.

Bor Luh-Lin y Yu Xin Tai, [2] usando el anterior espacio E definieron el espacio siguiente, $X = (\sum \oplus E)_{\ell_2}$ y mostraron que X es un espacio 2R, pero no es un espacio K-UR, para $k \geq 1$. N.C-Xun y W. J-Hua, [26] probaron que el espacio X no es un espacio L-KUR para $K \geq 1$, pero si es un espacio L-KR, $K \geq 2$. De este ejemplo podemos concluir que existe un espacio de Banach X que satisface las siguientes propiedades:

i) X es un espacio 2R, (ver [23]).

ii) X es un espacio reflexivo, (ver comentario, pag. 10).

iii) X es un espacio estrictamente convexo, (ver teorema 7)

iv) X es un espacio que satisface la propiedad (H), (ver teo.7)

v) X es un espacio L-KR, para $K \geq 2$, (ver [26]).

vi) X es un espacio que satisface la propiedad (G), (ver teo.7)

vii) X no es un espacio LK-UR, $K \geq 1$, (ver 26)

viii) X no es un espacio K-UR, $K \geq 1$, (ver [2])

ix) X no es un espacio LUR (ver teorema 3)

x) X no es un espacio UR. ∎ (ver teorema 2).

EJEMPLO 2: Consideremos el ejemplo siguiente dado por M.A.

Simth, [20]. En efecto, para $x = (x^1, x^2, \ldots) \in \ell_2$ definimos una norma $\| \cdot \|$ en ℓ_2 por

$$\|x\| = \max \{ \sup_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (|x^i| + |x^j|), \|x\|_2 \}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$R_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k e_k$$

donde (e_k), denota la base usual en ℓ_2.

Ahora se define

$$||| x ||| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \| R_k(x) \|.$$

Entonces, se tiene que $\| \cdot \|$ es una norma equivalente a $\| \cdot \|_2$ y en consecuencia $||| \cdot |||$ es una norma equivalente a $\| \cdot \|_2$ en ℓ_2.

Finalmente, para todo $X = (x^j)_1^{\infty}$ en ℓ_2 definimos la norma siguiente,

$$\|X\|_M = (||| x |||^2 + j^2(x))^{1/2}$$

donde $j^2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x^j|^2$. Tenemos que $\| \cdot \|_M$ es una norma equivalente a $\| \cdot \|_2$.

M.A. Smith demostró que el espacio $E = (\ell_2, \|\cdot\|_M)$ es un espacio LUR, pero no es un espacio 2R.

De este ejemplo podemos concluir que existe un espacio de Banach E que cumple las siguientes propiedades:

i) E es un espacio reflexivo,

ii) E es un espacio LUR,

iii) E es un espacio L-KR, K≥1,

iv) E es un espacio que satisface la propiedad (G),

v) E es un espacio estrictamente convexo,

vi) E es un espacio que satisface la propiedad (H),

vii) E no es un espacio 2R,

viii) E no es un espacio UR. ■

EJEMPLO 3:

Bor Luh-Lin, y Yu Xin-Tai, [2] modificaron el ejemplo 2 dado anteriormente en la forma siguiente:

Sea k un entero positivo mayor o igual que 2, y sea $\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_k$. Para cada $X = (a_1, \ldots) \in \ell_2$ se define una norma en ℓ_2 por

$$\|X\|^2_{\ell_1,\ldots,\ell_k} = \Big(\sum_{j=1}^{k} |a_{\ell_j}|^2\Big)^2 + \sum_{i\neq \ell_1,\ldots,\ell_k} a_i^2$$

entonces,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_{\ell_1,\ldots,\ell_k} \leq \sqrt{k}\ \|x\|_2$$

para todo $x \in \ell_2$ y por tanto $\|.\|_{\ell_1,\ldots,\ell_k}$ es una norma en ℓ_2 equivalente a $\|.\|_2$. Denotemos por $X_{\ell_1,\ldots,\ell_k} = (\ell_2, \|.\|_{\ell_1,\ldots,\ell_k})$.

Bor Luh-Lin y Yu Xin-tai demostraron que $X_{\ell_1,\ldots,\ell_k}$ son espacios K-UR, pero no son (K-1)-UR para todo $\ell_1,\ldots,\ell_k$.

Ahora, para cada $x \in \ell_2$ definimos

$$\|X\|_k = \sup_{\ell_1<\ldots<\ell_k} \|x\|_{\ell_1,\ldots,\ell_k}$$

De hecho tenemos que $\|.\|_k$ es una norma en ℓ_2 equivalente a $\|.\|_2$ y denotemos por $E_k = (\ell_2, \|.\|_k)$.

B.L. Lin y Yu Xin-tai demostraron que el espacio E_k es un espacio K-UR, pero no es un espacio KR.

N. Xun y W. Hua, [26] mostraron que el espacio E_k no es un espacio L(k-1)R. Así, de este ejemplo podemos decir que existe un espacio de Banach E_k que satisface las propiedades siguientes:

i) E_k es un espacio K-UR, $K \geq 2$,

ii) E_k es un espacio LK-UR, $K \geq 2$,

iii) E_k es un espacio reflexivo,

iv) E_k es un espacio estrictamente convexo,

v) E_k es un espacio que satisface la propiedad (H),

vi) E_k no es un espacio (K-1)-UR,

vii) E_k no es un espacio L-(K-1)R,

viii) E_k no es un espacio KR,

ix) E_k no es un espacio UR.

Para finalizar este capítulo diremos que los ejemplos dados anteriormente nos muestran que el recíproco de las implicaciones de los teoremas indicados en este capítulo no se cumplen en general, y además nos muestran que:

i) Existen espacios 2R que no son UR,

ii) Existen espacios K-UR que no son (K-1)-UR,

iii) Existen espacios L-KR que no son LK-UR ni LUR, etc.

ESPACIOS DE BANACH CON LA PROPIEDAD (K - M)

En este capítulo introduciremos la propiedad (K-M) en espacios de Banach,daremos otras nuevas definiciones de propiedades, estudiaremos su relación existente entre tales propiedades, dejaremos planteadas algunas interrogantes y finalmente diré que los teoremas 1,2,3,4,5,6 y 7 son la contribución del autor en el presente trabajo.

DEFINICION 1, [17]:

Un espacio de Banach E se dice que posee la propiedad (M) si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n)_1^\infty \subset B_E$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} \| x + x_n \| = 2$$

entonces $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E.

El autor en [14] introdujo los espacios que poseen la propiedad (K-M) que generaliza la definición anterior.

DEFINICION 2, [14]:

Sea K≥1. Un espacio de Banach E se dice que posee la propiedad (K-M) si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n)_1^\infty \subset B_E$ tales que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| X + \sum_{i=1}^{K} X_{n_i} \| = 1,$$

entonces $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E.

Obsérvese que de la definición 2, para K=1, obtenemos la si guiente afirmación:

Un espacio de Banach E se dice que posee la propiedad (1-M) si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n)_1^{\infty} \subset B_E$ tales que

$$\lim_{n_1 \to \infty} \| x + x_{n_1} \| = 2,$$

entonces $(x_n)_1^{\infty}$ es compacto en B_E. Por tanto, la definición de la propiedad (1-M) coincide con la definición 1,de la propiedad (M)

Ahora tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 1:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

propiedad (M) $\Rightarrow$ prop. (2-M) $\Rightarrow$ prop. (K-M) $\Rightarrow$ prop. [(K+1)-M].

PRUEBA:

Unicamente mostraremos que

propiedad (M) $\Rightarrow$ propiedad [(K+1)-M].

En efecto, sean $x \in S_E$ y $(x_n)_1^{\infty} \subseteq B_E$ tales que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_K \to \infty} \frac{1}{K+2} \| x + \sum_{i=1}^{K+1} x_{n_i} \| = 1.$$

Ahora usando la desigualdad triangular tenemos

$$\frac{K+2}{K+1} \| \frac{1}{K+2} (x + \sum_{i=1}^{K+1} x_{n_i}) \| - \frac{1}{K+1} \| x_{n_{K+2}} \| \leq \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \|.$$

Por tanto,

$$1 = \frac{K+2}{K+1} - \frac{1}{K+1} \leq \lim_{n_1,\ldots,n_K \to \infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| \leq 1$$

y así,

$$\lim_{n_1,\dots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1.$$

Como E posee la propiedad (K-M), $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E, y así E satisface la propiedad (K+1)-M. ■

Más adelante, en el ejemplo 1, veremos que el recíproco de las implicaciones del teorema 1 en general no se cumplen.

El resultado siguiente es una caracterización de los espacios que poseen la propiedad (K-M).

TEOREMA 2:

Sea E un espacio de Banach estrictamente convexo. Entonces,

$$\text{L-KR} \iff \text{propiedad (K-M)}.$$

PRUEBA:

($\Rightarrow$) Supongamos que E es un espacio L-KR. Sean $x\in S_E$ y $(x_n)_1^\infty \subseteq B_E$ tales que

$$\lim_{n_1,\dots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1 \quad \text{y} \quad \| x_n \| \longrightarrow 1.$$

Evidentemenete, $x_n \longrightarrow x$ y así E satisface la propiedad (K-M). Nótese que no usamos el hecho de ser E un espacio estrictamente convexo.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que E es un espacio que posee la propiedad (K-M). Sean $x\in S_E$ y $(x_n)_1^\infty \subseteq B_E$ tales que

$$\lim_{n_1,\dots,n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1 \quad \text{y} \quad \| x_n \| \longrightarrow 1.$$

Por tanto, $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E, esto es, existen un $y \in E$ y una subsucesión (x_{n_i}) de (x_n) tal que $x_{n_i} \longrightarrow y$.

Evidentemente, $y \in S_E$ y $\| x + Ky \| = K + 1$. Además, se tiene que $\| x+y \| = 2$ y como E es un espacio estrictamente convexo entonces $x = y$,y esto nos muestra que $(x_n)_1^\infty$ posee un único punto límite x, y en consecuencia $x_n \longrightarrow x$. Así E es un espacio L-KR y hemos mostrado el teorema. ■

EJEMPLO 1:

Usando el ejemplo 1 dado en la sección anterior podemos decir que existe un espacio de Banach X que satisface las siguientes propiedades:

i) X es un espacio L-KR, para $K \geq 2$,

ii) X es un espacio con la propiedad (K-M), $K \geq 2$

iii) X es un espacio estrictamente convexo,

iv) X no es un espacio LUR,

v) X es un espacio que no satisface la propiedad (M).

vi) X no es un espacio LK-UR, $K \geq 1$. ■

W. A. Kirk, [12] mostró que si E es un espacio K-UR, entonces E satisface la propiedad (H) e igual conclusión obtuvo Yu Xin-Tai, [27] si E es un espacio LK-UR.

El teorema siguiente constituye una generalización del resultado logrado por B.B. Panda y K. Kapoor [17] quienes lo probaron para $K = 1$.

TEOREMA 3:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,

$$\text{Propiedad (K-M)} \Rightarrow \text{propiedad (H)}.$$

PRUEBA:

Supongamos que E posee la propiedad (K-M). Sean $x \in S_E$ y $(x_n)_1^\infty$ una sucesión en E tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\| x_n \| \longrightarrow 1$.
Sea $x^* \in S_{E^*}$ tal que $x^*(x)=1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_n)_1^\infty \subset S_E$.
Entonces,

$$\begin{aligned} K+1 &= \lim_{n_1 \ldots n_K \to \infty} x^*\left(x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \right) \leq \lim_{n_1 \ldots n_K \to \infty} \|x^*\| \, \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| \\ &\leq \lim_{n_1 \ldots n_K \to \infty} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| \\ &\leq K+1. \end{aligned}$$

por tanto,

$$\lim_{n_1, \ldots, n_K \to \infty} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = K + 1.$$

Como E satisface la propiedad (K-M), entonces $(x_n)_1^\infty$ es compacto en B_E, y por lo tanto $(x_n)_1^\infty$ posee una subsucesión convergente (x_{n_k}), y además cualquier subsucesión de (x_{n_k}) es convergente y como $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces $x_n \longrightarrow x$. Así, hemos mostrado que E posee la propiedad (H). ∎

Ahora, antes de dar nuestros próximos resultados necesitamos definir algunas propiedades.

DEFINICION 3, [25]:

Sea E un espacio de Banach. Un conjunto $M \subset E$ se dice aproximativamente compacto si para cada $x \in E\backslash M$, $(x_n)_1^{\infty}$,

$$\|x-x_n\| \longrightarrow \inf \{ \|x-y\| : y \in M \},$$

entonces (x_n) es compacto en M.

Un espacio de Banach E se dice que satisface la propiedad Efimov-Stechkin, si para todo conjunto debilmente secuencialmente cerrado es aproximativamente compacto.

DEFINICION 4:

Un espacio de Banach E se dice que satisface la propiedad (s) si para cada $(\phi_n)_1^{\infty} \subset B_{E^*}$ y $x \in S_E$ tales que $\phi_n(x) \longrightarrow 1$ entonces $(\phi_n)_1^{\infty}$ es compacto en B_{E^*}.

Panda y Kappor en [17] mostraron los siguientes resultados:

Sea E un espacio de Banach. Entonces:

i) E posee la propiedad de Efimov-Stechkin

$$\Longleftrightarrow$$

x^* tiene la propiedad (s);

ii) Si E es reflexivo, entonces E tiene la propiedad (s)

$$\Longleftrightarrow$$

x^* tiene la propiedad de Efimov-Stechkin.

L.P.Vlasov en [25] mostró que si E es un espacio de Banach, entonces

E posee la propiedad Efimov-Stechkin $\Longleftrightarrow$ E es reflexivo y posee la propiedad (H).

TEOREMA 4:

Sea E un espacio de Banach. Entonces, si E^* posee la propiedad (K-M) entonces E satisface la propiedad (s).

PRUEBA:

Supongamos que E posee la propiedad (K-M). Sean $x \in S_E$ y $(\phi_n)_1^\infty \subseteq B_{E^*}$ tales que $x^*(x_n) \longrightarrow 1$. Por el teorema de Hanh-Banach existe un $x_o^* \in S_{E^*}$ tal que $x_o^*(x)=1$. Así,

$$K+1 = \lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{K} x_{n_i}^* + x_o^* \right)(x) \leq \lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{K} x_{n_i}^* + x_o^* \right\|$$

$$\leq \lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{K} x_{n_i}^* + x_o^* \right\|$$

$$\leq K + 1,$$

por tanto,

$$\lim_{n_1,\ldots,n_K\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{K} x_{n_i}^* + x_o^* \right\| = K + 1.$$

Como E^* tiene la propiedad (K-M), $(x_n^*)_1^\infty$ es compacto en B_{E^*} y así E tiene la propiedad (s) ■

El siguiente ejemplo nos muestra que existe un espacio de Banach E que satisface las siguientes condiciones:

i) E es un espacio reflexivo,

ii) E satisface la propiedad (H),

iii) E satisface la propiedad Efimov-Stechkin

iv) E^* posee la propiedad (s)

v) E no posee la propiedad (K-M).

Así, (ii) y (v) y (iv) y (v) nos muestran que el recíproco de las implicaciones de los teoremas 3 y 4, respectivamente, no se cumplen.

EJEMPLO 2:

Sea $(\ell_p, \|.\|_p)$, $1<p<\infty$ y $x \in \ell_p$. Definimos en ℓ_p una nueva norma por

$$|||\, x \,||| = |x_1| + \| \tilde{x} \|_p$$

donde $x = (x^1, x^2, \ldots)$ y $\tilde{x} = (0, x^2, \ldots)$. Claramente $\| \;\; \|$ satisface

$$\| x \|_p \le \| x \| \le 2 \| x \|_p$$

para todo $x \in \ell_p$ y, por tanto $|||\, . \,|||$ es una norma equivalente a $\|.\|_p$ en ℓ_p. Probaremos que $E = (\ell_p, |||\, . \,|||)$ posee la propiedad de Efimov-Stechkin, lo cual es equivalente a mostrar que E satisface la propiedad (H) y es reflexivo. Evidentemente tenemos que E es reflexivo, así unicamente probaremos que E satisface la propiedad (H). En efecto, sean x_{n_1}, $x \in \ell_p$ tales que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad y \quad |||\, x_n \,||| \longrightarrow |||\, x \,||| \quad .$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $|||\, x_n \,||| = |||\, x \,||| = 1$ puesto que en caso contrario normalizamos a x_n y x.

Así,

$$| x_n^1 | + \| \tilde{x}_n \|_p = | x^1 | + \| \tilde{x} \|_p \quad \text{para todo } n.$$

Como $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces $x_n^1 \longrightarrow x^1$ y por tanto

$$\| \tilde{x}_n \|_p \longrightarrow \| \tilde{x} \|_p \quad y \quad \tilde{x}_n \xrightarrow{w} \tilde{x}.$$

Ahora, como $(\ell_p, \|.\|_p)$, $(1\leq p<\infty)$ satisface la propiedad (H), entonces $\tilde{x}_n \longrightarrow \tilde{x}$, y por tanto $x_n \longrightarrow x$. Así hemos mostrado que E satisface la propiedad Efimov-Stechkin y por tanto el dual de $(\ell_p, \| . \|)$ satisface la propiedad (s).

Ahora mostraremos que E no posee la propiedad (K-M). En efecto, consideremos $K>1$, $x = \ell_1 = (1,0,...)$ y

$$x_n = \frac{e_n}{\frac{1}{K^p} - 1} = (0,0,..., \frac{1}{\frac{1}{K^p} - 1}, 0,...).$$

Entonces, $\| x \| = 1$ y $\| x_n \| = K^{1-\frac{1}{p}}$.

Además, se cumple que $\| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = K+1$, pero $(x_n)_1^\infty$ no es subconjunto relativamente compacto en E_1 y así E no posee la propiedad (K-M). ■

Ahora introducimos la siguiente

DEFINICION 4:

El espacio de Banach E se dice que posee la propiedad w(K-M) si para $x \in S_E$ y $(x_n)_1^\infty \subseteq B_E$ tales que

$$\lim_{n_1...n_K\to\infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1,$$

entonces $(x_n)_1^\infty$ tiene una subsucesión debilmente convergente.

TEOREMA 5:

Sea E un espacio de Banach. Entonces, si E^* tiene la propiedad (s) y E tiene la propiedad w(K-M) entonces E satisface la propiedad (K-M).

PRUEBA:

Sean $x \in S_E$ y $(x_n)_1^\infty \subseteq B_E$ tales que

$$\lim_{n_1 \ldots n_K \to \infty} \frac{1}{K+1} \| x + \sum_{i=1}^{K} x_{n_i} \| = 1.$$

Por el teorema de Hanh-Banach existe un $f \in S_{E^*}$ tal que $f(x)=1$, y como E posee la propiedad w(K-M), existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $f(x_{n_k}) \longrightarrow 1$. Como E^* posee la propiedad (s), entonces (x_{n_k}) posee una subsucesión convergente y por tanto E posee la propiedad (K-M). ■

COROLARIO 1:

Sea E un espacio de Banach. Si E posee la propiedad Efimov-Stechkin y E tiene la propiedad (K-M), entonces E satisface la propiedad (K-M). ■

COROLARIO 2:

Sea E un espacio de Banach. Si,

i) E es reflexivo,

ii) E tiene la propiedad (s) y

iii) E^* posee la propiedad w(K-M)

entonces E^* tiene la propiedad (K-M). ■

Nótese que este corolario nos muestra bajo que condiciones se cumple el recíproco del teorema 5.

I. Namioka y R. Pheelps, [16] introdujeron la propiedad siguiente:

Sea (f_α) una red en E^* y $f \in E^*$

** tales que $\| f_\alpha \| \longrightarrow \| f \|$ y $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$

entonces $\| f_\alpha - f \| \longrightarrow 0$.

Esta propiedad cuando tomamos sucesiones en E^* en vez de redes coincide con la propiedad (H) en E^* y algunas veces se denota esta última propiedad como propiedad (H^*). Ahora pasamos a dar la siguiente

DEFINICION 5:

Sea E un espacio de Banach. Decimos que el espacio E^* posee la propiedad (H^*), si para toda sucesión (f_n) en E^* y $f \in E^*$ tales que

$$f_n \xrightarrow{w^*} f \quad y \quad \| f_n \| \longrightarrow \| f \|$$

entonces $\| f_n - f \| \longrightarrow 0$.

Un espacio de Banach E con la propiedad que toda función continua y convexa sobre un subconjunto abierto y convexo de E es Frechet diferenciable sobre un G_δ-subconjunto denso en su dominio es llamado un espacio de Asplund.

Decimos que un espacio E tiene la propiedad de Radon-Nikodym (PRN) con respecto a (Ω, Σ, μ) si para toda medida vectorial μ-continua $F:\Sigma \longrightarrow E$ de variación acotada existe un f en $L^1(E,\mu)$ tal que

$$F(E) = \int_E f \, d\mu \text{ para todo } E \in \Sigma.$$

Para mayor información de la propiedad PRN se recomienda ver la monografía de D.Van Dulst [7].

Namioka y Phelps, mostraron que si E^* posee la propiedad (H^*), entonces E es un espacio de Asplund y por tanto E^* posee la propiedad de Radon-Nikodym.

En la monografía de D.V.Dulst, [7] encontramos la demostración del resultado siguiente:

Sea E un espacio de Banach.
Si E^* posee la propiedad (H^*)
entonces E^* posee la PRN.

Usando esto, obtenemos de inmediato el resultado siguiente,

TEOREMA 6:

Sea E un espacio de Banach. Si E^* posee la propiedad (K-M) entonces E^* posee la PRN. ■

Yu Xin-tai en [27] demostró:

Si E^* es un espacio LKUR
entonces E^* tiene la propiedad (✱✱)
y por tanto E^* tiene la PRN. ■

El resultado siguiente es ampliamente conocido,(ver [6] ó [10]).

Si E^* es LUR entonces

la norma de E es

F-diferenciable en $x \in S_E$.

N. Chao-Xun y W. Jian-Hua [26] generalizaron el resultado anterior en la forma siguiente:

Si E^* es un espacio L-KR

entonces la norma de E es

F-diferenciable en $x \in S_E$.

Teniendo presente el teorema 4 y el hecho que la propiedad (s) es una generalización del siguiente criterio de Smul'yan para la F-diferenciabilidad de la norma:

La norma de E es F-diferenciable

en $x \in S_E$, si para toda $(f_n) \subset S_{E^*}$

tal que $f_n(x) \longrightarrow 1$ implica que

(f_n) es convergente.

Nos podemos plantear el siguiente,

PROBLEMA 1:

Sea E un espacio de Banach tal que E^* posee la propiedad (K-M). ¿ Es la norma de E, F-diferenciable en $x \in S_E$?.

F. Sulli'van en [22] demostró el resultado siguiente:

Si E^{**} es un espacio L2-UR

entonces E es reflexivo.

R. Geremia y F. Sullivan, [11] generalizaron el resultado anterior en la forma siguiente:

Si E^{**} es un espacio LK-UR
entonces E es reflexivo.

N. Chau-Xun y W. J-Hua, [26] mostraron

Si E^{**} es un espacio WL-KR
entonces E es reflexivo.

En el artículo de F. Sullivan [22] encontramos la siguiente definición:

decimos que un espacio de Banach E es suave Hanh-Banach si $f \in E^{**}$ es la única extensión de Hanh-Banach de $f|_E$.

En el mismo artículo señalado anteriormente podemos ver los siguientes resultados:

Si E^{**} posee la propiedad (H^{*})
entonces E es suave Hanh-Banach.

y

Si E^{*} es suave Hanh-Banach
entonces E es reflexivo.

Así, usando lo anterior tenemos que si E^{**} posee la propiedad (K-M) entonces E^{**} tiene la propiedad (H^{*}), por tanto E^{*} es suave Hanh-Banach y E es reflexivo. Así hemos demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 7:

Sea E un espacio de Banach. Si E^{**} posee la propiedad (K-M) entonces E es reflexivo. ■

Ahora dejaremos planteado el siguiente,

PROBLEMA 2:

Sea E un espacio de Banach tal que E^{**} posea la propiedad w(K-M). ¿ Es E reflexivo?.

Para finalizar este trabajo considero que es posible la obtención de nuevos resultados en la teoría de espacios de Banach usando la propiedad (K-M) y en cierta forma estoy trabajando con tal objetivo y espero pronto lograrlo.

R E F E R E N C I A S

1.- BOR-LUH LIN,

"Topics in Banach space theory". University of Iowa-USA.

2.- BOR-LUH LIN Y YU XIN-TAI,

"On the K-uniform rotund and the Fully Convex Banach Spaces." J. Math. Anal. Appl. 110 (1985), 407-410.

3.- BOR-LUH LIN Y PEI-KEE LIN,

"A Fully Convex Banach Space which does not have the Banach saks property" J. Math. Appl. 117 (1986), 273-283.

4.- J.A. CLARKSON,

"Uniformly Convex Spaces", Trans. AM. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

5.- M. M. DAY, Normed linear spaces Springer-Verlag.

6.- J. DIESTEL,

"Geometry of Banach Spaces-Selected Topics". Lecture Notes in Math. Nº 485, Springer-Verlag, (1985).

7.- D. VAN DULST,

"The Geometry of Banach Spaces with the Radon-Nikodym Property". Rendiconti dil Circulo Matemático di Palermo-Su - pplemto A. 1985.

8.- KY FAN Y I. GLICKSBERG,

"Fully convex normed linear spaces". Proc. of the Nat. Acad. of SC., USA. Vol. 41, (1955), 947-953.

9.- KY FAN Y I. GLICKSBERG,

"Some geometric properties of the spheres in a normed linear space". Duke Math. J. 25, (1958), 553-568.

10.- V I. ISTRATESCU,

"Strict convexity and complex strict convexity". Marcel D., INC.

11.- R. GEREMIA Y F. SULLIVAN,

"Multi-dimensional volumes and moduli of convexity in Banach spaces". Ann. Math. para Appl. 127, (1981), 231-251.

12.- W.A. KIRK,

"Non expansive mappings in product spaces, set-valued mappings and K-uniform rotundity". Proc. Symp. Pure Math. Vol. 45, (1986), 51-63.

13.- A.R. LOVAGLIA,

"Locally Uniformly Convex Banach Spaces". Trans. Ann. Math. Soc. 78, (1955), 225-238.

14.- JOSE R. MORALES,

"Sobre los espacios L-KR". Notas de Matemáticas Nº 105 ULA.

15.- JOSE R. MORALES,

"Sobre los espacios (K-M)". Por aparecer.

16.- I. NAMIOKA Y R.R. PHELPS,

"Banach Spaces with are Asplund Spaces", Duke Math. J. 42, (1975), 735-750.

17.- B.B. PANDA Y O.P. KAPPOR,

"A generalization of local uniform convexity of the norm". J. Math. Ann appl. 52 (1975), 300-308.

18.- T. POLAK Y B. SIMS,

"A Banach space which is Fully 2-rotund but not locally uniformly rotund", Can Math. Bull, 26, (1983), 118-120.

19.- M.A. SMITH,

"Some examples concerning rotundity in Banach spaces". Math. Ann. 233, (1978), 155-161.

20.- M.A. SMITH,

"A reflexive Banach space that is LUR and not 2R". Can. Math. Bull, 21, (1978), 251-252.

21.- F. SULLIVAN,

"A generalization of uniformly rotund Banach spaces". Can. J. Math. 31, (1979), 628-636.

22.- F. SULLIVAN,

"Geometrical properties determined by the Migher duals of a Banach space".

23.- JONG SOOK BAE Y M. SOOK PARK,
"On the K-characteristic of convexity", Proc. Math. W., (1984), 159-165.

24.- L.P. VLASOV,
"Chebyshev sets and approximately convex sets". Math. Zam. 2, (1971), 191-200.

25.- L.P. VLASON,
"Approximative properties of sets in normed linear spaces".

26.- NAN CHAO-XUN Y W. JIAN-HUA,
"On the LK-UR and L-KR spaces". Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1988), 164-521.

27.- YU XINTAI,
"On LKUR Spaces". Chin. Ann. of Math. 6 B, 4, (1985), 465 469.