NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 131

CARACTERIZACION DEL ESPECTRO DINAMICO PARA SISTEMAS NO AUTONOMOS EN ESPACIOS DE BANACH

POR

HUGO LEIVA

PRE-PRINT

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1993

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matematicas
Merida - Venezuela

Caracterizacion del Espectro Dinamico para Sistemas no Autonomos en Espacios de Banach

Hugo Leiva

Trabajo de Ascenso Presentado como Requisito
para Ascender a la Categoria de :
Profesor Asociado
Dirigido por el Dr. Shui-Nee Chow

Caracterizacion del Espectro Dinamico para Sistemas no Autonomos en Espacios de Banach *

Hugo Leiva †

August 4, 1993

Dirigido por. Shui-Nee Chow

Resumen. En este trabajo primeramente estaremos interesados en en el estudio del Espectro Dinámico para sistemas no-autónomos en espacios de Banach de dimensión infinita. Aquí caracterizamos el Espectro Dinámico, lo cual es una extensión del Teorema de Sacker-Sell al caso de espacios de Banach de dimensión infinita . También definimos los exponentes de Lyapunov, los cuales miden la rata de descaecimiento de las soluciones de una ecuación diferencial lineal . Luego estudiamos la relación entre el Espectro Dinámico, los subfibrados espectrales asociados con los correspondientes intervalos espectrales y los exponentes de Lyapunov. Estos problemas son tratados de manera unificada desde el punto vista de Skew-Product Semiflow Lineal. Finalmente presentamos algunos ejemplos de Skew-Product Semiflow Lineal que aparecen de manera natural en el estudio de ecuaciones diferenciales funcionales y ecuaiones parciales parabólicas que dependen del tiempo.

*Dirigido por Dr. Shui-Nee Chow. Soportado por la U.L.A -Venezuela

†Georgia Tech y U.L.A -Venezuela : e-mail leiva@math.gatech.edu

Contenido

1 Introducción

En este trabajo caracterizaremos el Espectro Dinámico para ecuaciones diferenciales lineales no autónomas en espacios de Banach, en tal sentido usaremos los conceptos de Skew-Product Semiflow [1] y Dicotomía Exponencial para definir el espectro dinámico. Estos conceptos juntos han sido estudiados ampliamente por Sacker–Sell [14] en el caso de Espacios de Banach de dimensión finita.

Para ser más claro en la exposición de este trabajo haremos primeramente un modesto resumen de algunos hechos en el caso de Espacios de Banach de dimensión finita.

1.1 Caso Finito Dimensional

Sea X un espacio de Banach de dimensión finita y Θ un espacio topológico de Hausdorff. Consideremos el fibrado vectorial trivial $(\mathcal{E}, \Theta, \mathcal{P})$ donde $\mathcal{E} = X \times \Theta$ y $\mathcal{P}$ es la proyección natural sobre Θ:

$$\mathcal{P}^{-1}(\theta) = X_\theta = X \times \{\theta\} \qquad \theta \in \Theta \tag{1.1}$$

Definición 1.1 Un flujo π en $\mathcal{E}$ se dice que es un **Skew-product flow** si se puede representar de la manera siguiente:

$$\pi(x, \theta, t) := (\phi(x, \theta, t), \theta.t), \quad x \in X, \quad \theta \in \Theta \qquad t \in I\!R \tag{1.2}$$

[1] Una traducción aproximada al español de este concepto seria: Producto Cruzado de Semiflujos o Producto Diagonal de Semiflujos

donde $\sigma(\theta, t) = \theta.t$ es un flujo en Θ.
π se dice Skew-product flow lineal, si ϕ es lineal en x. Esto significa:

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(x, \theta, t), \theta.t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta.t) \quad x \in X, \quad \theta \in \Theta, \quad t \in I\!R \tag{1.3}$$

donde $\Phi(\theta, t) : X_\theta \to X_{\theta.t}$ es lineal; en este caso escribamos simplemente $\pi = (\Phi, \sigma)$.

Es fácil probar lo siguiente:

(a) $\Phi(\theta, 0) = I-$ la identidad en X

(b) $\Phi(\theta, t)$ es continuo en (θ, t)

(c) $\Phi(\theta, t + s) = \Phi(\theta.t, s)\Phi(\theta, t), \quad \theta \in \Theta, \quad s, t \in I\!R$

Asi pues que:

$$\Phi^{-1}(\theta, t) = \Phi(\theta.t, -t)$$

(d) $dim X_\theta = dim X_{\theta.t}, \quad t \in I\!R$

ver referencia [11], [12], [13].

Los skew -product flows aparecen de manera natural en el estudio de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas en diferentes formas:

Ejemplo 1.1 Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal autónoma.

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in I\!R \tag{1.4}$$

donde A es una matriz constante de dimensión $n \times n$.

Si ponemos $\Theta = \{A\}, \quad \Phi(\theta, t) = e^{At}, \quad X = I\!R^n, \quad \theta.t = A$

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta.t), \quad \theta \in \Theta \quad x \in X, \quad t \in I\!R,$$

entonces π es un Skew-Product Flow Lineal en $\mathcal{E} = X \times \Theta = I\!R^n \times \{A\}$.

Ejemplo 1.2 Consideremos la siguiente ecuación diferencial lineal no autónoma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad t \in I\!R \tag{1.5}$$

donde $A(t)$ es una matriz de dimensión $n \times n$ que depende de t y supongamos que la ecuación (1.5) tiene solución única definida en $I\!R$.

Sea $T(t, s)$ el operador de evolución definido por la ecuación (1.5). Esto significa lo siguiente:

(a) $T(s, s) = I-$ la matriz identidad

(b) $T(t,\tau)T(\tau,s) = T(t,s), \quad t,s \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{\partial T(t,s)}{\partial t} = A(t)T(t,s)$

(d) $T(t,s)$ es continua en (t,s).

Si ponemos $\Theta = \mathbb{R}, \quad \theta.t = \theta + t \quad$ y $\quad \Phi(\theta,t) := T(t+\theta,\theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta$ entonces π, dado por

$$\pi(x,\theta,t) = (\Phi(\theta,t)x, \theta.t) \tag{1.6}$$

es un skew-product flow en $\mathbb{R}^n \times \Theta = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Por otra parte la ecuación (1.5) puede ser transformada en una ecuación autónoma aumentando la dimensión del espacio de fase y escribiendo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R} \\ \dot{t} & = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Mientras esta construcción es ciertamente válida, algunos defectos inherentes son evidentes cuando uno intenta aplicar las Teorías de sistemas dinámicos. Por ejemplo en el sistema dinámico resultante no hay puntos fijos, no hay soluciones periódicas, no hay soluciones acotadas y en efecto todos los conjuntos límites son vacíos.

Es importante apuntar aquí que el eminente profesor Lasalle en (1962) indicó que se necesitaba una construcción menos trivial que la antes mencionada para estudiar ecuaciones diferenciales no autónomas y en general procesos que dependen del tiempo o también llamados sistemas evolucionarios por Sacker-Sell [14]; por supuesto esta nueva técnica es el Skew -product flow.

Pero si nos percatamos que el Skew-product flow definido por (1.6) corresponde con el flujo dado por la ecuación (1.7) estaremos en presencia de un Skew-product flow muy pobre en propiedades. En este caso el espacio base $\Theta = \mathbb{R}$ no es acotado; esto nos indica que debemos adicionar algunas propiedades al espacio base Θ en la Definición 1.1.

De hecho, nosotros asumiremos que Θ **es un espacio topológico de Hausdorff compacto**. En este caso esto equivale a pedirle algunas condiciones extra a la función $A(t)$. Por ejemplo podemos assumir una de las siguientes condiciones:

(a) $A(t)$ es uniformemente continua y acotada.

(b) $A(\cdot) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{N^2}), \quad 0 \leq p < \infty$ y las condiciones (a) y (b) de la Proposición 1.2 valen.

Para ser más claro en esta parte tenemos que hablar acerca del *Hull* de $A(\cdot)$:

Definamos $\mathcal{T}_1 = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^2})$ el espacio de las funciones continuas que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^{n^2}$ con la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}$, la cual es equivalente a la topología dada por la métrica ρ_1 siguiente:

$$\rho_1(A,B) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mathcal{P}_k(A,B)}{1+\mathcal{P}_k(A,B)}$$

donde

$$\mathcal{P}_k(A,B) := \sup\{|A(t)-B(t)| : -k \le t \le k\}$$

Ahora el *Hull* de $A \in \mathcal{T}_1$ se define como sigue:

$$H(A) = Hull(A) := cl\{A_s : s \in I\!R\}$$

donde $A_s(t) := A(t+s)$, para $t, s \in I\!R$, y *cl* denota la clausura de $\{\cdots\}$.

Proposición 1.1 *Sea $A \in \mathcal{T}_1$. Entonces $H(A)$ es compacto si, y sólo si A es acotada y uniformemente continua en $I\!R$. Ver referencia [13]*

Ahora estamos listos para darle un buen Skew-product flow a la ecuación (1.5) .

Si $H(A)$ es compacto en $\mathcal{T}_1$ y ponemos:

$\Theta := H(A)$, $\theta.t = B.t = B_t$, $\theta = B \in \Theta$, y $\Phi(\theta,t) = \Phi(B,t)$ es la matriz fundamental del sistema

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t), \qquad \theta = B \in \Theta$$

entonces

$$\pi(x,\theta,t) = \pi(x,B,t) := (\Phi(B,t)x, B_t) \tag{1.8}$$

es un Skew-product flow en $I\!R^n \times \Theta = I\!R^n \times H(A)$.

Observación 1.1 El Skew-product flow dado por (1.8) goza de las propiedades siguientes:

(1) Tiene soluciones acotadas

(2) Tiene soluciones periódica si $A(\cdot)$ es periódica

(3) Tiene conjuntos límites

Un caso particular del Ejemplo 1.2 es el siguiente

$$\dot{x}(t) = \tan^{-1}(t).x(t) \tag{1.9}$$

Aquí $A(t) = \tan^{-1}(t) \in \mathcal{T}_1$ el espacio de las funciones continuas de $I\!R$ en $I\!R$.

En este caso el *Hull* de $A(\cdot)$ es dado por

$$H(A) = \{-\pi/2, \pi/2, \tan^{-1}(t+\tau) : \tau \in I\!R\}$$

Observación 1.2 En muchos problemas la función $A : I\!R \to I\!R^{n^2}$ no tiene porque ser continua; por ejemplo $A(\cdot)$ puede pertenecer al espacio

$$\mathcal{T}_2 := L^p_{loc}(I\!R, I\!R^{n^2}), \quad 1 \le p < \infty$$

de las funciones medibles segun Lebesgue que van de $I\!R$ a $I\!R^{n^2}$ las cuales pertenecen a $L^p(K, I\!R^{n^2})$ para todo compacto K de $I\!R$, equivalentemente

$$f \in L^p_{loc}(I\!R, I\!R^{n^2}) \iff \int_K |f(t)|^p d\mu(t) < \infty$$

para cada compacto K de $\mathbb{R}$, donde μ es la medida de Lebesgue.

Podemos dotar a $\mathcal{T}_2$ la topología dada por la métrica ρ_2 siguiente:

$$\rho_2(A,B) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\mathcal{P}_k(A,B)}{1+\mathcal{P}_k(A,B)}$$

donde

$$\mathcal{P}_k(A,B) := \{\int_{-k}^{k} |A(t)-B(t)|^p \, d\mu\}^{1/p}$$

Proposición 1.2 *Sea $A \in \mathcal{T}_2$. Entonces $H(A)$ es compacto si, y sólo si*

(a) Existe $\gamma > 0$ tal que

$$\int_0^1 |A(t+\tau)|^p d\mu(\tau) < \gamma$$

para $t \in \mathbb{R}$, y

(b) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^1 |A(\tau+t+h) - A(\tau+t)|^P \, d\mu(\tau) < \epsilon$$

si $|h| \le \delta$ y *$t \in \mathbb{R}$. Ver referencia [13]*

En el caso de la Proposición anterior, también podemos definir un Skew-product flow con el espacio de base $\Theta = H(A)$ compacto e invariante bajo el flujo $\sigma(B,t) = B_t$ para $B \in \Theta$.

Ejemplo 1.3 Este ejemplo es muy importante porque muestra la relación entre una ecuación diferencial no lineal autónoma y su ecuación variacional alrededor de un conjunto invariante Θ; este conjunto Θ puede ser: una órbita periódica, una órbita homoclínica, un atractor, etc.

Consideremos la ecuación diferencial siguiente

$$\dot{\theta}(t) = f(\theta(t)), \quad \theta \in \mathbb{R}^n \tag{1.10}$$

Supongamos que f es lo suficientemente suave de tal manera que la solución de (1.10) sea única. Si Θ es un conjunto compacto invariante bajo la solución de la ecuación (1.10), entonces en Θ podemos definir un flujo $\sigma(\theta,t) = \theta.t$, $\theta \in \Theta$, $t \in \mathbb{R}$, generado por esta ecuación.

Para cada $\theta \in \Theta$, consideremos la ecuación variacional de (1.10) alrededor de la solución $\theta.t$

$$\dot{x}(t) = A(\theta.t)x(t), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

donde $A(\theta.t) := Df(\theta.t)$.

Si $\Phi(\theta,t)$ denota la matriz fundamental de (1.11) con $\Phi(\theta,0) = I$, entonces la aplicación $\pi : \mathbb{R}^n \times \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \Theta$ dada por

$$\pi(x,\theta,t) = (\Phi(\theta,t)x, \theta.t)$$

es un Skew-Product Flow Lineal en el fibrado vectorial trivial $\mathcal{E} = I\!R^n \times \Theta$.

Una vez más consideremos $\pi = (\Phi, \sigma)$ un Skew-Product Flow Lineal en el fibrado vectorial trivial $\mathcal{E} = I\!R^n \times \Theta$ donde Θ es compacto. Para cada número real λ definimos el Skew-Product Flow trasladado π_λ mediante

$$\pi_\lambda = (\Phi_\lambda, \sigma), \quad \Phi_\lambda(\theta,t) = e^{-\lambda t}\Phi(\theta,t)$$

para $t \in I\!R$, $\theta \in \Theta$, y los conjuntos siguientes:

$$\mathcal{S}_\lambda := \{(x,\theta) \in \mathcal{E} : \|\Phi_\lambda(\theta,t)x\| \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty\}$$

$$\mathcal{U}_\lambda := \{(x,\theta) \in \mathcal{E} : \|\Phi_\lambda(\theta,t)x\| \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to -\infty\}$$

Los conjuntos $\mathcal{S}_\lambda$ y $\mathcal{U}_\lambda$ son subconjuntos invariantes bajo π y son llamados las variedades estables e inestables respectivamente. Más aun la fibras $\mathcal{S}_\lambda(\theta)$ y $\mathcal{U}_\lambda(\theta)$ son subespacios lineales de $I\!R^n$ para todo $\theta \in \Theta$. Estaremos interesados en aquellos $\lambda \in I\!R$ tales que $\mathcal{S}_\lambda$ y $\mathcal{U}_\lambda$ son complementarios:

$$\mathcal{S}_\lambda(\theta) \cap \mathcal{U}_\lambda(\theta) = \{0\} \quad \text{y} \quad I\!R^n = \mathcal{S}_\lambda(\theta) + \mathcal{U}_\lambda(\theta) \tag{1.12}$$

para todo $\theta \in \Theta$. Como veremos más adelante la condición (1.12) puede ser expresada en términos de la dicotomía exponencial del Skew-product flow $\pi_\lambda = (\Phi_\lambda, \sigma)$.

El conjunto resolvente de π, es $\rho = \rho(\Theta)$ el cual se define mediante:

$$\rho(\Theta) := \{\lambda \in I\!R : \quad (1.12) \quad \text{vale} \ \}$$

$$= \{\lambda \in I\!R : \pi_\lambda \quad \text{tiene dicotomía exponencial}\}$$

El espectro de π, $\Sigma = \Sigma(\Theta)$ es el complemento de $\rho(\Theta) : \Sigma = I\!R \setminus \rho$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar dos teoremas de Sacker-Sell, los cuales vamos a generalizar a espacios de Banach de dimensión infinita en este trabajo. Para ser más preciso en el enunciado de estos teoremas, escribiremos algunos resultados y notaciones preliminares:

(a) $\Sigma(\Theta)$ es un conjunto compacto y no vacío contenido en $[-a, a]$.

(b) Consideremos $\{\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_m\} \subset \rho(\Theta)$ tal que $\lambda_0 < -a$ y $a < \lambda_m$.

(c) $\Sigma(\Theta) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \neq \phi$

(d) $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i(\Theta) = \mathcal{S}_{\lambda_i}(\Theta) \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}}(\Theta)$
es un subfibrado invariante bajo π de $\mathcal{E}$.

(e) π^i es la restricción de π a $\mathcal{V}_i$ y $\Sigma_i(\Theta)$ es espectro de $(\mathcal{V}_i, \pi^i)$ sobre Θ.

Teorema 1.1 *(Teorema 1 de [14]). Las siguientes proposiciones son válidas:*

(A) $\Sigma_i(\Theta) = \Sigma(\Theta) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m$

(B) $\Sigma(\Theta) = \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i(\Theta)$

(C) $I\!R^n \times \{\theta\} = \mathcal{V}_1(\theta) \oplus \mathcal{V}_2(\theta) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_m(\theta)$ *para todo* $\theta \in \Theta$

donde

$$\Sigma(\theta) \subset [-a, a], \quad \{\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \lambda_m\} \subset \rho(\Theta) \quad \text{con} \quad \lambda_0 < -a, \quad a < \lambda_m$$

y

$$\mathcal{V}_i(\Theta) = \mathcal{S}_{\lambda_i}(\Theta) \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}}(\Theta), \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

son subfibrados vectorial de $\mathcal{E} = I\!R^n \times \Theta$.

De manera de obtener más información acerca del espectro dinámico debemos asumir además que el conjunto base Θ es conexo.

Teorema 1.2 *(Teorema 2 de [14]). Si* Θ *es invariante, conexo y compacto, entonces el espectro* $\Sigma(\Theta)$ *es la unión disjunta de un número finito de intervalos compactos, es decir*

$$\Sigma(\Theta) = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_k, b_k]$$

donde $1 \leq k \leq n$.

Más aun, si $(x, \theta) \in \mathcal{V}_i$*, donde* $\mathcal{V}_i$ *es dado en el Teorema 1.1, entonces*

$$\limsup_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \in [a_i, b_i]$$

y

$$\liminf_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \in [a_i, b_i].$$

Observación 1.3 En el caso del Ejemplo 1.3 el espectro viene dado por:

$$\Sigma = \{\lambda \in I\!R : x' = (A(\theta.t) - \lambda I)x \ \text{ tiene solución no trivial acotada para algún } \ \theta \in \Theta\}$$

Ahora mencionaremos algunos hechos en el caso de espacios de Banach de dimensión infinita.

1.2 Caso Infinito Dimensional

Nuestra meta en este trabajo es, fundamentalmente, generalizar los Teoremas 1.1 y 1.2 al caso de espacios de Banach de dimensión infinita (ecuaciones diferenciales lineales no autónomas en espacios de Banach). Unas de las mayores dificultades que podemos encontrar aquí es que algunas de las soluciones de una ecuación diferencial lineal en dimensión infinita no tienen extensiones definidas para $t \leq 0$, o las extensiones no son necesariamente únicas, por eso debemos tener cuidado en la definición de dicotomía exponencial de tal manera que la variedad inestable quede bien definida . En este caso no tendremos un flujo, sino un Skew-Product Semiflow $\pi : \mathcal{E} \times \mathbb{R}_+ \to \mathcal{E}$, según Definición 2.1, donde $\mathcal{E} = X \times \Theta$, X es un espacio de Banach, Θ es un espacio topológico de Hausdorff compacto y π es dado por:

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta.t), \quad t \geq 0, \quad x \in X, \quad \theta \in \Theta$$

El fibrado vectorial $\mathcal{E} = X \times \Theta$ es usualmente llamado Fibrado Vectorial de Banach.

El siguiente Teorema es una generalización del Teorema 1.1, pero con la severa restricción de que $\Phi(\theta, t)$ sea un operador lineal completamente continuo para $t \geq r > 0$.

Teorema 1.3 *(Teorema 2.6 [9]). Asumamos que Θ es compacto, conexo e invariante, contiene un punto fijo o una orbita cerrada de σ. Si π es completamente continuos para $t \geq r > 0$, entonces el espectro $\Sigma(\Theta)$ tiene una de las siguientes formas*

(A) $\Sigma(\Theta) = \emptyset$

(B) $\Sigma(\Theta) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$, *para algún natural k*

(C) $\Sigma(\Theta) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$

(D) $\Sigma(\Theta) = (-\infty, b_\infty]$

(E) $\Sigma(\Theta) = (-\infty, b_\infty] \cup \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$

para algún natural k, donde los intervalos son no vacíos y disjuntos y $\{a_i\}, \{b_i\}$ son sucesiones finitas de números reales crecientes con $a_i \leq b_i$.

La demostración del siguiente Teorema se reduce al caso de dimensión finita.

Teorema 1.4 *(Teorema 2.8 de [9]). Asumamos que $\pi = (\Phi, \sigma)$ es un flujo y Θ es compacto, conexo e invariante, entonces*

(A) $\Sigma(\Theta)$ es diferente de vacío y compacto, consecuentemente la unión disjunta numerable de intervalos compactos.

(B) si π es completamente continuo, entonces $\Sigma(\Theta)$ es la unión finita de intervalos compactos disjuntos $\Sigma(\Theta) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$.

Observación a los Teoremas 1.3 y 1.4.

En el Teorema 1.3 las hipótesis de compacidad y de que el flujo σ contenga un punto fijo no son necesarias.

La parte (A) del Teorema 1.4 se prueba de la misma manera que en el caso de dimensión finita y la parte (B) se sigue del hecho se que si π es un flujo completamente continuo, entonces la dimensión de X es finita, lo cual nos pone en las condiciones del Teorema 1.2.

Para terminar esta modesta introducción presentaremos algunos ejemplos que dan lugar a la aparición de Skew-Product Semiflow en espacios de Banach de dimensión infinita.

Ejemplo 1.4 Consideremos la ecuación diferencial no autónoma

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t))x \tag{1.13}$$

en el espacio de Banach X, donde A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales en X y $B(t) \in L(X)$ es fuertemente continuo con $\|B(t)\| < M$ para $t \in I\!R$. Por ejemplo, si $\varphi(t)$, $t \in I\!R$, es una solución globalmente definida de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x) \tag{1.14}$$

que toma valores en un subcojunto compacto K de X, donde F es diferenciable según Frechét, entonces $B(t) = DF(\varphi(t))$ es un operador lineal acotado para todo $t \in I\!R$. Procediendo como en el Ejemplo 1.2 podemos ver que la ecuación (1.13) genera un Skew-product semiflow lineal, donde el espacio de base $\Theta = Hull(B)$; ver por ejemplo Sacker-Sell [15], Henry [7] y Pazy [10].

El siguiente ejemplo es más general ya que como es fácil de ver incluye a todos lo ejemplos anteriores.

Ejemplo 1.5 Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(\theta.t))x, \quad \theta \in \Theta, \quad t \geq 0 \tag{1.15}$$

donde $x(t) \in X, \Theta$ es un espacio topológico compacto de Hausdorff el cual es invariante bajo el flujo $\sigma(\theta, t) = \theta.t$, $B(\theta) \in L(X)$ para $\theta \in \Theta$ y para todo $x \in X$ la aplicación $B(\cdot)x$ es continua. En la Sección 4 probaremos que la ecuación (1.15) genera un Skew-Product Semiflow $\pi = (\Phi, \sigma)$ dado por:

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta.t)$$
$$\Phi(\theta, t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x ds$$

donde $T(t)$ es el semigrupo generado por A.

Construcciones similares de Skew-Product Semiflow son posibles en el estudio de ecuaciones parciales, ver Henry [7] , Hale [3], Chen-Hale [1] , para ecuaciones funcionales ver Hale [2] , Magalhães [9] y Lizana [8].

2 Preliminares

En esta sección presentaremos algunas definiciones, notaciones y resultados acerca de Skew–Product Semiflow en espacios de Banach los cuales seran utilizados en las secciones siguientes.

2.1 Skew–Product Semiflow Lineal

Ahora presentaremos lo que a nuestro juicio será la definición central de este trabajo.

Definición 2.1 Consideremos $\mathcal{E} = X \times \Theta$ donde X es un espacio de Banach fijo (el espacio de estados) y Θ un espacio topológico de Hausdorff compacto. Asumamos que $\sigma(\theta, t) = \theta.t$ es un flujo en Θ, equivalentemente, la aplicación $(\theta, t) \to \theta.t$ es continua, $\theta.0 = \theta$, y $\theta.(s+t) = (\theta.s).t$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Entonces llamaremos **Skew–Product Semiflow Lineal** $\pi = (\Phi, \sigma)$ en $\mathcal{E} = X \times \Theta$ a una aplicación $\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta.t)$ para $t \geq 0$, con las siguientes propiedades:

(1) $\Phi(\theta, 0) = I$, el operador identidad en X, para todo $\theta \in \Theta$
(2) $\lim_{t \to 0^+} \Phi(\theta, t)x = x$, uniformemente en θ. Esto significa que para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que $\|\Phi(\theta, t)x - x\| \leq \epsilon$, para todo $\theta \in \Theta$ y $0 \leq t \leq \delta$.
(3) $\Phi(\theta, t)$ es un operador lineal y acotado de X en X que satisface la identidad circular:

$$\Phi(\theta, t+s) = \Phi(\theta.t, s)\Phi(\theta, t) \quad \theta \in \Theta, \quad 0 \leq s, t. \tag{2.1}$$

(4) para todo $t \geq 0$ la aplicación de $\mathcal{E}$ en X dada por

$$(x, \theta) \to \Phi(\theta, t)x$$

es continua.

Las propiedades (2) y (3) implican que para cada $(x, \theta) \in \mathcal{E}$ el operador solución $t \to \Phi(\theta, t)x$ es continuo a la derecha para $t \geq 0$. En efecto :

$$\|\Phi(\theta, t+h)x - \Phi(\theta, t)x\| = \|[\Phi(\theta.t, h) - I]\Phi(\theta, t)x\|$$

lo cual va a 0 cuando h va a 0^+.

Nosotros utilizaremos el funcional α de Kuratowski, el cual es un medida de nocompacidad, para introducir la definición de Skew-Product Semiflow **Uniformemente α - Contractivo.**

Definición 2.2 Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto acotado de X. Entonces definimos

$$\alpha(A) = \inf\{d : A \text{ tiene un cubrimiento finito de conjuntos de diametro } < d\}.$$

El funcional de Kuratowski posee las propiedades siguientes:
(A) $\alpha(A) = 0$ si, y sólo si ClA es compacta.

(B) $\alpha(A \cup B) = max[\alpha(A), \alpha(B)]$.

(C) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

(D) $\alpha(ClA) = \alpha(A)$

(E) $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ siempre que $A \subset B$.

(F) $\alpha(A) \leq diamA$.

(G) Sea A_t una familia de conjuntos acotados no vacíos definida para $t_0 < t < \infty$ con $A_t \subset A_s$ siempre que $s \leq t$. Si $\alpha(A_t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces $\bigcap_{t>t_0} A_t$ es no vacío y compacto.

(H) Si $L : X \to X$ es un operador lineal acotado, entonces $\alpha(LA) \leq \|L\|\alpha(A)$. Ver Hale [3].

Para todo subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ definimos la fibra

$$\mathcal{F}(\theta) := \{x \in X : (x, \theta) \in \mathcal{F}\}, \quad \theta \in \Theta. \tag{2.2}$$

Asi $\mathcal{E}(\theta) = X \times \{\theta\}, \quad \theta \in \Theta$. Si $U \subset \Theta$, entonces definimos

$$\mathcal{F}(U) := \bigcup_{\theta \in U} \mathcal{F}(\theta).$$

También definimos $\mathcal{E}_0 = \{(x, \theta) \in \mathcal{E}; x = 0\}$ y $\mathcal{E}_M = \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : \|x\| \leq M\}$. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}_M$ para algún M positivo, entonces definimos

$$\alpha_\infty(\mathcal{F}) := \sup\{\alpha(\mathcal{F}(\theta)) : \theta \in \Theta\} \tag{2.3}$$

Definición 2.3 Un Skew-Product Semiflow Lineal $\pi = (\Phi, \sigma)$ se dice que es **uniformemente α-contractivo** si para cada conjunto acotado

$$B = B_M = \{x \in X : \|x\| \leq M\}$$

existe una función k con $k(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ tal que

$$\alpha(\Phi(\theta, t)B) \leq k(t)\alpha(B), \quad \theta \in \Theta$$

Si π es uniformemente α-contractivo, entonces se sigue que $\alpha_\infty(\pi(\mathcal{F}, t)) \leq k(t)\alpha_\infty(\mathcal{F})$, donde α_∞ esta definida por (2.3).

Observación 2.1 Ejemplos de Skew-Product Semiflow uniformemente α-contractivos pueden ser encontrados en [3]. Una situación típica es cuando $\Phi(\theta, t)$ manda conjuntos acotados en conjuntos compactos para $t > T \geq 0$. Otros ejemplos ocurren cuando $\Phi = \Phi_c + \Phi_s$ donde Φ_c manda conjuntos acotados en conjuntos compactos para $t > T$ y $\|\Phi_s(\theta, t)\| \leq ke^{-\beta t}$ para $t \geq 0$ donde $\beta > 0$ y $k \geq 1$ son independientes de θ.
La teoría que presentamos aquí se extiende fácilmente a fibrados vectoriales más generales los cuales son localmente el producto de espacios. Un **Fibrado Vectorial de Banach** $\mathcal{E}$ con fibra X sobre un espacio base Θ y proyección p es denotado por $(\mathcal{E}, X, \Theta, p)$, o simplemente $\mathcal{E}$, y se define como sigue:

(1) X es un espacio de Banach y Θ es un espacio de Hausdorff compacto.

(2) La aplicación $p : \mathcal{E} \to \Theta$ es continua.

(3) Para todo $\theta \in \Theta$, $p^{-1}(\theta) = \mathcal{E}(\theta)$ es un espacio de Banach, al cual nos referimos como la fibra sobre θ.

(4) Para todo $\theta \in \Theta$, existe un entorno abierto U de θ en Θ y un homeomorfismo $\tau : p^{-1}(U) \to X \times U$ tal que para todo $\eta \in U$, p^{-1} es enviado sobre $X \times \{\eta\}$ y $\tau : p^{-1}(\eta) \to X \times \{\eta\}$ es un isomorfismo lineal.

(5) La norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\theta$ en la fibra $p^{-1}(\theta)$ varia continuamente en θ. Podemos usar la notación de coordenada local (x, θ) para denotar un punto típico en $\mathcal{E}$. Esto es una manera abreviada de referirse a la propiedad (4) anterior.

2.2 Proyectores y Subfibrados

Una aplicación $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ se dice que es un proyector, si $\mathbf{P}$ es continua y tiene la forma $\mathbf{P}(x, \theta) = (p(\theta)x, \theta)$, donde $p(\theta)$ es una proyección lineal y continua en la fibra $\mathcal{E}(\theta)$.
Para cada proyector $\mathbf{P}$ definimos los espacios rango y nulo respectivamente mediante

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{P}) = \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : p(\theta)x = x\}$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \{(x, \theta) \in E : p(\theta)x = 0\}$$

La continuidad de $\mathbf{P}$ implica que las fibras $\mathcal{R}(\theta)$ y $\mathcal{N}(\theta)$ varian continuamente con θ. Esto también significa que $p(\theta)$ varia continuamente en la topología uniforme del espacio de operadores lineales y continuos $L(X)$. El siguiente resultado es elemental y puede encontrarse en Sacker-Sell [15].

Lema 2.1 *Si $\mathbf{P}$ es un proyector en $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{R}$ y $\mathcal{N}$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{E}$ con las siguientes propiedades*

$$\mathcal{R}(\theta) \cap \mathcal{N} = \{0\}, \ \mathcal{R}(\theta) + \mathcal{N}(\theta) = \mathcal{E}(\theta) \quad \textit{para todo} \quad \theta \in \Theta.$$

$\mathcal{B}_u^+ := \{(x,\theta) \in \mathcal{M} : (x,\theta)$ tiene una única continuación negativa acotada $\phi\}$

$\mathcal{B}^- := \{(x,\theta) \in \mathcal{M}$: alguna continuación negativa ϕ de (x,θ) satisface $\sup_{t\leq 0} \|\phi^x(t)\| < \infty\}$

$\mathcal{S} := \{(x,\theta) \in \mathcal{E} : \|\Phi(\theta,t)x\| \to 0$ cuando $t \to \infty\}$

$\mathcal{B} := \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$

El conjunto $\mathcal{U}$ es el **conjunto inestable**, $\mathcal{S}$ es el **conjunto estable** y $\mathcal{B}$ es el **conjunto acotado.**

Observación 2.2 La teoría descrita aquí, permite considerar el caso cuando el operador lineal $\Phi(\theta,t)$ no es inyectivo para algún $t \leq 0$, equivalentemente, $\Phi(\theta,t)$ puede tener el espacio nulo no trivial. Esto implica que un punto $(x,\theta) \in \mathcal{E}$ puede tener más de un continuación negativa. Es fácil ver que si $\Phi(\theta,t)$ es inyectivo para todo $t > 0$, entonces toda continuación negativa es única. El conocimiento de las continuaciones negativas es un problema importante en el estudio de ecuaciones deferenciales parciales; ver por ejemplo, Temam [19].

Para $(x,\theta) \in \mathcal{B}_u^+$ denotaremos por $\Phi(\theta,t)x$, $t \leq 0$ a la única continuación negativa y acotada correspondiente; esto define un extensión de la aplicación Φ. Es claro que para todo $\theta \in \Theta$ la fibra $\mathcal{B}_u^+(\theta)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{E}(\theta)$, y $\Phi(\theta,t).x$ es lineal en x para cada $t \geq 0$, equivalentemente, $\Phi(\theta,t)$ es un aplicación lineal de $\mathcal{B}_u^+(\theta)$ en $\mathcal{B}_u^+(\theta.t)$ para $t \geq 0$.

Más aun, la identidad circular

$$\Phi(\theta,t+s) = \Phi(\theta.t,s)\Phi(\theta,t) \qquad s,t \in I\!R$$

es válida para todo $(x,\theta) \in \mathcal{B}_u^+$.

Un Skew–Product Semiflow $\pi(x,\theta,t) = (\Phi(\theta,t)x, \theta.t)$ se dice que es **Debilmente Hiperbólico** en $\mathcal{E} = X \times \Theta$, si π es uniformemente α -contractivo y el conjunto acotado $\mathcal{B}$ es trivial, eq., $\mathcal{B} = \mathcal{E}_0$.

2.4 Dicotomía Exponencial para Skew-Product Semiflow

Un proyector **P** en $\mathcal{E}$ se dice que es **invariante** si satisface la siguiente propiedad de conmutatividad

$$p(\theta.t)\Phi(\theta,t) = \Phi(\theta,t)p(\theta) \qquad t \geq 0, \;\; \theta \in \Theta \tag{2.4}$$

Diremos que un Skew-Product Semiflow π en $\mathcal{E}$ tiene una **dicotomía exponencial sobre un conjunto invariante** $\hat{\Theta}$, donde $\hat{\Theta} \subset \Theta$, si existen constantes $k \geq 1$, $\beta > 0$, $dimRango(I - p(\theta)) < \infty$ y $Rango(I - p(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$ para cada $\theta \in \hat{\Theta}$, y valen las siguiente desigualdades :

$$\|\Phi(\theta,t)p(\theta)\| \leq ke^{-\beta t} \quad t \geq 0, \ \ \theta \in \hat{\Theta}$$

$$\|\Phi(\theta,t)(I-p(\theta)\| \leq ke^{\beta t} \quad t \leq 0, \ \ \theta \in \hat{\Theta}$$

Proposición 2.1 *Si π es un Skew-Product Semiflow Lineal en $\mathcal{E} = X \times \Theta$ el cual admite una dicotomía exponencial sobre Θ, entonces se tiene que $\mathcal{B} = \mathcal{E}_0$ y π es debilmente hiperbólico. ver [15]*

Observación 2.3 En el caso de espacios de Banach de dimensión finita, los sistemas no autónomos son reversibles en t y también el Skew-Product Semiflow Lineal π. Entonces se tiene la siguiente identidad $p(\theta.t) = \Phi(\theta,t)p(\theta)\Phi^{-1}(\theta,t)$. En este caso la dicotomía exponencial puede ser expresada en la forma siguiente :

$$\|\Phi(\theta,t)p(\theta)\Phi^{-1}(\theta,s)\| \leq ke^{-\beta(t-s)} \quad t \geq s \ \ \theta \in \Theta$$

$$\|\Phi(\theta,t)[I-p(\theta)]\Phi^{-1}(\theta,s)\| \leq ke^{\beta(t-s)} \quad t \leq s \ \ \theta \in \Theta$$

3 El Espectro Dinámico

Consideremos $\pi = (\Phi, \sigma)$ un Skew-Product Semiflow en $\mathcal{E}$. Entonces para cada $\lambda \in I\!R$ definiremos el semiflujo trasladado como sigue :

$$\pi_\lambda = (\Phi_\lambda, \sigma), \quad \Phi_\lambda(\theta, t) = e^{-\lambda t}\Phi(\theta, t) \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta$$

Claramente, si π es uniformemente α - contractivo, entonces π_λ es uniformemente α - contractivo para $\lambda \geq 0$.

Proposición 3.1 *Los conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{S}$ son positivamente invariante bajo π y los conjuntos $\mathcal{U}$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$, y $\mathcal{U}$ son invariante bajo π. Más aun, estos conjuntos son subfibrados vectoriales de $\mathcal{E}$ con las fibras:*

$$\mathcal{U}(\theta), \quad \mathcal{S}(\theta), \quad \text{y} \quad \mathcal{M}(\theta) \quad \text{son subespacios de} \quad \mathcal{E}(\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in \Theta$$

De la proposición anterior se tiene lo siguiente: existen proyectores $\mathbf{P}_\mathcal{S}$, $\mathbf{P}_\mathcal{U}$, y $\mathbf{P}_\mathcal{M}$ tales que

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_\mathcal{S}) = \mathcal{S}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{P}_\mathcal{U}) = \mathcal{U}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{P}_\mathcal{M}) = \mathcal{M}$$

Más aun

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}(\mathbf{P}_\mathcal{S}) + \mathcal{N}(\mathbf{P}_\mathcal{S}) = \mathcal{R}(\mathbf{P}_\mathcal{U}) + \mathcal{N}(\mathbf{P}_\mathcal{U}) = \mathcal{R}(\mathbf{P}_\mathcal{M}) + \mathcal{N}(\mathbf{P}_\mathcal{M})$$

como la suma de Whitney de dos subfibrados.

Observación 3.1 Siempre que π admita una dicotomía exponencial sobre $\hat{\Theta}$ tendremos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \{(x, \theta) \in \mathcal{E}(\hat{\Theta}) : p(\theta)x = 0\} \\
\mathcal{S}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{R}(\mathbf{P}) = \{(x, \theta) \in \mathcal{E}(\hat{\Theta}) : p(\theta)x = x\} \\
\mathcal{E}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{U}(\hat{\Theta}) + \mathcal{S}(\hat{\Theta}) \\
\mathcal{B}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{B}^+(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{B}^-(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})
\end{aligned}$$

Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto invariante de Θ bajo el flujo σ. El **resolvente** $\rho(\hat{\Theta})$ de $\hat{\Theta}$ bajo el Skew-Product Semiflow π se define como sigue:

$$\rho(\hat{\Theta}) = \{\lambda \in I\!R : \pi_\lambda \ \text{admite una dicotomía sobre} \ \hat{\Theta}\}$$

y el **espectro dinámico** o simplemente el espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ de $\hat{\Theta}$ bajo π como sigue $\Sigma(\hat{\Theta}) = I\!R \setminus \rho(\hat{\Theta})$.

El siguiente Lema será la clave en la demostración del Teorema que caracteriza el espectro dinámico

Lema 3.1 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto, conexo e invariante de Θ. Si $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, entonces existe un número entero no negativo k tal que*

(1) $dim\mathcal{U}_\lambda(\theta) = k, \quad \theta \in \hat{\Theta}$

(2) $\mathcal{B}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$

(3) π_λ *es* α- *contractivo uniformemente en* $\hat{\Theta}$

(4) $codim\mathcal{S}_\lambda(\theta) = k, \quad \theta \in \hat{\Theta}$

(5) $\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{S}_\lambda(\theta) + \mathcal{U}_\lambda(\theta), \quad \theta \in \hat{\Theta}$

(6) $\mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{B}_u^-(\hat{\Theta})$.

donde $\mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$, $\mathcal{S}_\lambda$, $\mathcal{B}_\lambda$ *y* $\mathcal{B}_u^-$ *son definidos como en 2.3 con respecto de* π_λ

Demostración
Se deduce directamente de los Teoremas B y C de [15] □

Lema 3.2 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto invariante de Θ y $\lambda \in I\!R$. La siguiente afirmación es válida:*

Si $\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| \to 0$ *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $\theta \in \hat{\Theta}$, *entonces* $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, $\Sigma(\hat{\Theta}) \subseteq (-\infty, \lambda)$, *y* $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ *para todo* $\mu \geq \lambda$.

Demostración
Para cada $\theta \in \hat{\Theta}$, existe $T(\theta) > 0$ tal que $\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| < \frac{1}{2}$, $t \geq T(\theta)$. Consideremos x con $\|x\| = 1$. Por la continuidad de $\Phi_\lambda(\theta, t)x$ con respecto a θ existe un entorno $N_x(\theta)$ de θ tal que

$$\|\Phi_\lambda(\hat{\theta}, T(\theta)x\| < \frac{1}{2}, \quad \hat{\theta} \in \hat{\Theta}.$$

De la compacidad de $\hat{\Theta}$ se sigue :

$$\hat{\Theta} \subset \bigcup_{i=1}^{m} N_x(\theta_i), \quad T(\theta_1) \leq T(\theta_2) \leq \cdots \leq T(\theta_m).$$

Pondremos $T_j = T(\theta_j)$, $j = 1, 2, \cdots m$.
Usando en Teorema de la acotación uniforme de Banach-Steinhaus obtenemos que

$$k = \sup\{\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| : \theta \in \hat{\Theta}, \quad 0 \leq t \leq T_m\} < \infty$$

Ahora fijemos $T \geq 0$ y consideremos $\theta \in \hat{\Theta}$. Entonces $\theta \in N_x(\theta_{j_1})$ para algún j_1 y $\|\Phi_\lambda(\theta, T_{j_1})x\| < \frac{1}{2}$. De la misma manera $\theta.T_{j_1} \in N_x(\theta_{j_2})$ para algún j_2, y

$$\|\Phi_\lambda(\theta, T_{j_1} + T_{j_2})x\| = \|\Phi_\lambda(\theta.T_{j_1}, T_{j_2})\Phi_\lambda(\theta, T_{j_1})x\| < (\frac{1}{2})^2$$

Se continúa con este proceso hasta obtener :

$$\tau = T_{j_1} + \cdots + T_{j_l} \leq \tau + T_{j(l+1)}, \quad \|\Phi_\lambda(\theta,\tau)x\| \leq (\frac{1}{2})^l$$

Dado que $lT_1 \leq \tau \leq t$ y $0 \leq t - \tau \leq T_m$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_\lambda(\theta,t)x\| &= \|\Phi_\lambda(\theta.\tau, t-\tau)\Phi_\lambda(\theta,\tau)x\| \leq k(\frac{1}{2})^l \\ &\leq k(\frac{1}{2})^{t/T_1} = ke^{-\alpha t} \end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{-1}{T_1}\ln(\frac{1}{2}) > 0$. Por lo tanto, hemos obtenido lo siguiente

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)x\| \leq ke^{-\alpha t}, \quad \theta \in \hat{\Theta}, \quad t \geq 0$$

dado que k y α no dependen de x, obtenemos que

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)\| \leq ke^{-\alpha t}, \quad \theta \in \hat{\Theta}, \quad t \geq 0$$

Desde este punto la demostración se sigue exactamente de la misma manera que la del Lema 4 en [14] (en el caso de espacios de Banach de dimensión finita). $\square$

Lema 3.3 *Sea* $\hat{\Theta}$ *un subconjunto compacto e invariante de* Θ. *Entonces el resolvente* $\rho(\hat{\Theta})$ *es abierto.*

Más aun,

$$\text{si} \quad \lambda \in \rho(\hat{\Theta}), \quad \text{entonces} \quad \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_\mu(\hat{\Theta}) \;\; \text{y} \;\; \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_\mu(\hat{\Theta})$$

para todo μ *en un entorno de* λ.

Demostración

Fijemos $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$. Por la definición de $\rho(\hat{\Theta})$, se tiene que π_λ admite una dicotomía exponencial sobre $\hat{\Theta}$. Por lo tanto, existe un proyector $\mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \to \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ y constantes positivas k y β tales que $dimRango(I - p(\theta)) < \infty$, $Rango(I - p(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$ para todo $\theta \in \hat{\Theta}$, y las siguiente desigualdades son válidas

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)p(\theta)\| \leq ke^{-\beta t}, \qquad t \geq 0, \quad \theta \in \hat{\Theta}$$

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)(I - p(\theta))\| \leq ke^{\beta t}, \qquad t \leq 0, \quad \theta \in \hat{\Theta}$$

Afirmación. Si $|\lambda - \mu| < \alpha$ y $\alpha = \beta/2$, entonces

(a) $\|\Phi_\mu(\theta,t)p(\theta)\| \leq ke^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0$

(b) $\|\Phi_\mu(\theta,t)(I - p(\theta))\| \leq ke^{\alpha t}, \qquad t \leq 0$

En efecto, (a) puede ser probado de la misma manera que en el caso de espacios de Banach de dimensión finita, ver Lema 5 en [14]. Para demostrar (b) debemos observar los siguientes hechos:

ϕ^x es una continuación negativa de (x,θ) con respecto a π si, y sólo si $e^{-\lambda t}\phi^x$ es una continuación negativa de (x,θ) con respecto a π_λ.

$\mathcal{M}_\lambda = \{(x,\theta) \in \mathcal{E} : (x,\theta)$ tiene una continuación negativa $e^{-\lambda t}\phi^x(t)\} = \mathcal{M}$

$\mathcal{B}^-_{u,\lambda} = \{(x,\theta) \in \mathcal{M} : (x,\theta)$ tiene una única continuación negativa acotada ϕ c.r.de $\pi_\lambda\}$

$= \{(x,\theta) \in \mathcal{M} : (x,\theta)$ tiene una única continuación negativa acotada de la forma $e^{-\lambda t}\Phi(\theta,t)x\}$.

Dado que $Rango(I - p(\theta)) \subset \mathcal{B}^-_u$ se sigue que

$$\Phi_\mu(\theta,t)(I-p(\theta)) = e^{-\mu t}\Phi(\theta,t)(I-p(\theta))$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\|\Phi_\mu(\theta,t)(I-p(\theta))\| \leq e^{(\lambda-\mu+\beta)t} \leq ke^{\alpha t}, \qquad t \leq 0$$

para cada $\theta \in \hat{\Theta}$. Por lo tanto $\mu \in \rho(\hat{\Theta})$; equivalentemente, $\rho(\hat{\Theta})$ es un conjunto abierto de $I\!R$. Más aun la dicotomía exponencial de π_λ y π_μ tienen el mismo proyector $\mathbf{P}$. Entonces de la Observación 3.1 obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{S}_\mu(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) \text{ y } \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{U}_\mu(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$$

para todo μ tal que $|\mu - \lambda| < \alpha$. □

Lema 3.4 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto e invariante de Θ. Entonces el espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ es un subconjunto cerrado de $I\!R$ y existe $a > 0$ tal que, si $\lambda > a$, entonces $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$ y $\mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$.*

Demostración
Por el Lema anterior ya sabemos que $\Sigma(\hat{\Theta})$ es cerrado.
Afirmación. Existe $h > 0$ tal que

$$k = \sup\{\|\Phi(\theta,t)\| : \quad \theta \in \hat{\Theta}, \quad 0 \leq t \leq h\} < \infty$$

En efecto, para un propósito de contradicción, asumiremos que este no es el caso. Entonces existen sucesiones $\theta_n \in \hat{\Theta}$, $t_n > 0$ con $t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\|\Phi(\theta_n, t_n)\| > n$. El Teorema de la acotación uniforme implica que existe $x \in X$ tal que $\|\Phi(\theta_n,t_n)x\|$ es no acotada. Pero esto contradice el hecho de que $\lim_{t\to 0^+}\Phi(\theta,t)x = x$ uniformemente en $\theta \in \Theta$. Por lo tanto, $k < \infty$. Dado que $\Phi(\theta,0) = I$, entonces $k \geq 1$.

Definamos
$$a := \frac{1}{h}\ln k$$
Todo $t \geq 0$ puede ser escrito como $t = nh + \tau$ para algún entero $n \geq 0$ y $0 \leq \tau \leq h$. La identidad circular (2.1) implica que

$$\|\Phi(\theta,t)\| \leq ke^{at}, \qquad t \geq 0, \;\; \theta \in \hat{\Theta}$$

Si $\lambda > a$, entonces

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)\| \leq ke^{(a-\lambda)t} \to 0 \quad \text{ cuando } \quad t \to +\infty$$

para cada $\theta \in \hat{\Theta}$. Entonces por el Lema 3.2 tenemos que $(a,\infty) \subset \rho(\hat{\Theta})$, lo cual es equivalente a $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset (-\infty, a]$ y $\mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta}), \quad \lambda > a$. □

Lema 3.5 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto e invariante de Θ. Consideremos $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ con $\lambda_1 < \lambda_2$.*

$$Si \qquad \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \quad y \quad \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$$

entonces
$$[\lambda_1, \lambda_2] \subset \rho(\hat{\Theta}) \quad y \quad \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}), \;\; \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})$$
para todo $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Demostración
Como $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$, entonces existen proyectores $\mathbf{P}_{\lambda_1}, \mathbf{P}_{\lambda_2}$ y constantes positivas k y β tales que:
$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)p_\lambda(\theta)\| \leq ke^{-\beta t}, \qquad t \geq 0$$
$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)(I - p_\lambda(\theta))\| \leq ke^{\beta t}, \qquad t \leq 0$$
para cada $\theta \in \hat{\Theta}$, con $\lambda = \lambda_1$, o λ_2, y $dimRango(I - p_\lambda(\theta)) < \infty$ y $Rango(I - p_\lambda(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$ para todo $\theta \in \hat{\Theta}$. Esto con el Lema 3.3 implican que

$$\Phi_\lambda(\theta,t)(I - p_\lambda(\theta)) = e^{-\lambda}\Phi_\lambda(\theta,t)(I - p_\lambda(\theta))$$

De aquí el resto de la demostración se sigue como en el caso de espacios de Banach de dimensión finita,ver [14]. □

Proposición 3.2 *Sean A, B y C subespacios de X. Si $C \subseteq A$, entonces*

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

Proposición 3.3 *Si λ_1, $\lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ y $\lambda_1 < \lambda_2$,entonces*

$$\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \tag{3.1}$$

Demostración
Por simplicidad usaremos la siguiente notación $\mathcal{S}_\lambda := \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta})$ y $\mathcal{U}_\lambda := \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$.
Es fácil demostrar la siguiente propiedad :

$$Si \;\; \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \mathcal{S}_{\lambda_1} \subseteq \mathcal{S}_{\lambda_2} \;\; \text{y} \;\; \mathcal{U}_{\lambda_2} \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_1} \tag{3.2}$$

de la Observación 3.1 sabemos que

$$\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_i} + \mathcal{S}_{\lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$

Por lo tanto, de la proposición anterior se sigue que

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap (\mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_2}) = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}$$

y

$$\mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap (\mathcal{S}_{\lambda_1} + \mathcal{U}_{\lambda_1}) = \mathcal{S}_{\lambda_1} + \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}$$

Entonces

$$\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_1} + \mathcal{S}_{\lambda_1} = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_1} + \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}$$

□

El siguiente Lema es el análogo al Lema 9 para el caso de espacios de Banach de dimensión finita demostrado por Sacker-Sell en [14]. En la prueba de Lema 9 de [14] se usa el hecho de que las dimensiones de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{S}$ son finitas. Como estamos trabajando en espacios de Banach de dimensión infinita $\mathcal{U}$ y $\mathcal{S}$ pueden tener dimensiones infinitas. Pero el Lema 2.3 nos permite trabajar con la codimensión de $\mathcal{S}$ en lugar de su dimensión.

Lema 3.6 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto, conexo e invariante de Θ. Consideremos $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ con $\lambda_1 < \lambda_2$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

(A) existe $\mu \in (\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta})$

(B) $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \neq \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$

(C) $codim \mathcal{S}_{\lambda_2} < codim \mathcal{S}_{\lambda_1}$

(D) $\dim \mathcal{U}_{\lambda_2} < \dim \mathcal{U}_{\lambda_1}$

Más aun, $\mathcal{F} := \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}$ *es un subfibrado invariante de* $\mathcal{E}$.

Demostración
(C) $\Leftrightarrow$ (D). Como $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$, entonces por el Lema 3.1 existen enteros k_1, k_2 tales que $\dim \mathcal{U}_{\lambda_i} = k_i, \;\; i = 1, 2$; y $codim \mathcal{S}_{\lambda_i} = k_i$ para todo $\theta \in \hat{\Theta}$. Por lo tanto, la equivalencia de las desigualdades (C) y (D) se sigue inmediatamente.

(A) $\Rightarrow$ (C) y (D). Si existe $\mu \in (\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta})$, entonces por el Lema 3.5 $\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \neq \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ o $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \neq \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$. Asi los enunciados (C) y (D) se siguen de la monotonía de $\mathcal{S}_\lambda$ y $\mathcal{U}_\lambda$, ver (3.2).

(C) y (D) $\Rightarrow$ (B). De la Proposición 3.3 tenemos

$$\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\theta) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\theta) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\theta) + \mathcal{S}_{\lambda_1}(\theta), \qquad \theta \in \hat{\Theta}.$$

Esto implica que

$$\mathcal{U}_{\lambda_1}(\theta) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\theta) \neq \{0\}, \qquad \theta \in \hat{\Theta}.$$

(B) $\Rightarrow$ (A). Definimos

$$\mu := \inf\{\lambda \in \rho(\hat{\Theta}) : \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})\}.$$

Afirmación. Si $\lambda < \lambda_1$, entonces $\mathcal{S}_\lambda \neq \mathcal{S}_{\lambda_2}$. En efecto, para un propósito de contradicción, asumiremos que $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_2}$. Por otra parte se tiene que $\mathcal{U}_{\lambda_1} \subseteq \mathcal{U}_\lambda$. Luego

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} \subseteq \mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{E}_0$$

lo cual es una contradicción. Así $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$.
Ahora asumiremos que $\mu \in \rho(\hat{\Theta})$. Entonces tendriamos los dos casos siguientes:

(a) $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_{\lambda_2}$

(b) $\mathcal{S}_\mu \neq \mathcal{S}_{\lambda_2}$

Para el caso (a), el Lema 3.3 implica que $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_{\lambda_2}$ para todo λ en un entorno de μ, lo cual contradice la definición de μ.
Para el caso (b), el Lema 3.3 implica que $\mathcal{S}_\lambda \neq \mathcal{S}_{\lambda_2}$ para todo $\lambda \in (\mu, \mu + \rho)$ donde ρ es un número positivo suficientemente pequeño, lo cual también contradice la definición de μ. Por lo tanto hemos probado que $\mu \in \Sigma(\hat{\Theta})$ y $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$.
Finalmente, dado que $\mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$ y $\mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ son subfibrados invariantes de $\mathcal{E}(\hat{\Theta})$ se sigue que

$$\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$$

es también un subfibrado invariante de $\mathcal{E}(\hat{\Theta})$. $\square$

El siguiente Lema es una generalización del Lema 10 en [14], pero la prueba es diferente debido a que estamos trabajando en espacios de Banach en dimensión infinita. Para esto haremos uso del siguiente hecho: si π_λ tiene una dicotomía exponencial de acuerdo a nuestra definición, entonces existe un proyector $\mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \to \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ tal que *dimRango*$(I - p(\theta)) < \infty$ y *Rango*$(I - p(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$ para todo $\theta \in \hat{\Theta}$ lo cual implica según Lema 3.3 que

$$\Phi_\lambda(\theta, t)(I - p(\theta)) = e^{-\lambda t}\Phi(\theta, t)(I - p(\theta)), \qquad t \leq 0$$

Lema 3.7 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto, conexo e invariante de Θ. Consideremos λ_1, λ_2 de tal manera que $\lambda_1 < \lambda_2$; λ_1, $\lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ y $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta}) \neq \emptyset$.*
Consideremos $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$, $\hat{\pi}$ la restricción de π a $\mathcal{F}$ y $\hat{\Sigma}(\hat{\Theta}) := \Sigma(\mathcal{F})$ denota el espectro de $(\mathcal{F}, \hat{\pi})$ sobre $\hat{\Theta}$. Entonces

$$\hat{\Sigma}(\hat{\Theta}) = \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_1, \lambda_2).$$

Demostración
La demostración la haremos mediante tres afirmaciones.

Afirmación 1. Consideremos $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$ y definamos

$$\mathcal{F}_s(\lambda) := \mathcal{F} \cap \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) \ \text{ y } \ \mathcal{F}_u(\lambda) := \mathcal{F} \cap \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta}).$$

Entonces $\mathcal{F}_s(\lambda)$ y $\mathcal{F}_u(\lambda)$ son subfibrados invariantes y

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s(\lambda) + \mathcal{F}_u(\lambda)$$

En efecto, supongamos que $\lambda < \lambda_1$. Entonces

$$\mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) \subset \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \ \text{ y } \ \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \subset \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$$

De aquí en adelante omitiremos el argumento $\hat{\Theta}$ para simplificar los cálculos. Así

$$\mathcal{F}_s(\lambda) = \mathcal{F} \cap \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{F}_0$$

y

$$\mathcal{F}_u(\lambda) = \mathcal{F} \cap \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{F}$$

Luego $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s(\lambda) + \mathcal{F}_u(\lambda)$.
Análogamente, si $\lambda > \lambda_2$, entonces

$$\mathcal{F}_s(\lambda) = \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_u(\lambda) = \mathcal{F}_0$$

Para $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ haremos uso de la Proposición 3.2 y el hecho de que $\mathcal{E} = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{U}_{\lambda_1} + \mathcal{S}_{\lambda_1}$. Por lo tanto obtenemos lo siguiente :

$$\begin{array}{rcccl}
\mathcal{U}_{\lambda_1} & = & \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap (\mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_2}) & = & \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F} \\
\mathcal{U}_{\lambda_1} & = & \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap (\mathcal{U}_{\lambda} + \mathcal{S}_{\lambda}) & = & \mathcal{U}_{\lambda} + \mathcal{F}_s(\lambda) \\
\mathcal{U}_{\lambda} & = & \mathcal{U}_{\lambda} \cap (\mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_2}) & = & \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F}_u(\lambda)
\end{array}$$

Consecuentemente

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F}_u(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda)$$

Dado que $\mathcal{F}_u(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda) \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_u(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda)$

Afirmación 2. $\rho(\hat{\Theta}) \subseteq \hat{\rho}(\hat{\Theta}) = I\!R \setminus \hat{\Sigma}(\hat{\Theta})$. En efecto, si $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, existe un proyector $\mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \to \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ y constantes positivas k y β tales que

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}), \qquad \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$$

y

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)p(\theta)x\| \leq k\|x\|e^{-\beta t}, \qquad t \geq 0, \ \ \theta \in \hat{\Theta}$$

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)(I-p(\theta))x\| \leq k\|x\|e^{\beta t}, \qquad t\leq 0, \quad \theta\in\hat{\Theta}$$

Más aun

$$dim Rango(I-p(\theta)) < \infty \qquad \text{y} \qquad Rango(I-p(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$$

Si $\hat{\mathbf{P}}$ es la restricción de $\mathbf{P}$ a $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathcal{R}(\hat{\mathbf{P}}) = \mathcal{F}_s(\lambda), \qquad \mathcal{N}(\hat{\mathbf{P}}) = \mathcal{F}_u(\lambda), \qquad \mathcal{F} = \mathcal{R}(\hat{\mathbf{P}}) + \mathcal{N}(\hat{\mathbf{P}}).$$

Por lo tanto, si restringimos las desigualdades anteriores para todo $(x,\theta)\in\mathcal{F}$ uno obtiene que

$$\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta,t)\hat{p}(\theta)x\| \leq k\|x\|e^{-\beta t}, \qquad t\geq 0$$

$$\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta,t)(I-\hat{p}(\theta))x\| \leq k\|x\|e^{\beta t}, \qquad t\leq 0$$

Así $\hat{\pi}_\lambda$ admite una dicotomía exponencial sobre $\hat{\Theta}$, lo cual es equivalente a $\lambda\in\hat{\rho}(\hat{\Theta})$. Así $\rho(\hat{\Theta})\subset\hat{\rho}(\hat{\Theta})$ y por lo tanto $\hat{\Sigma}(\hat{\Theta})\subset\Sigma(\hat{\Theta})$. Esto completa la demostración de la afirmación 2.

Dado que $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$, entonces

$$\|\hat{\Phi}_{\lambda_2}(\theta,t)x\| \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad t\to\infty$$

para todo $(x,\theta)\in\mathcal{F}$ uniformemente en x. Luego aplicando el Lema 3.2 obtenemos que $\hat{\Sigma}(\hat{\Theta})\subseteq(-\infty,\lambda_2)$ y $\mathcal{F}_s(\lambda)=\mathcal{F}, \quad \lambda\geq\lambda_2$. De la misma misma manera obtenemos $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})$.
Luego

$$\mathcal{F}(\theta)\subset Rango(I-p(\theta))\subset\mathcal{B}_u^-(\theta), \qquad \theta\in\hat{\Theta}$$

Esto implica que

$$\|\hat{\Phi}_{\lambda_1}(\theta,t)\| \to 0, \qquad \text{cuando } \ t\to-\infty$$

Usando la misma idea que en la demostración del Lema 3.2 obtenemos que $\hat{\Sigma}(\hat{\Theta})\subseteq(\lambda_1,\infty)$ y $\mathcal{F}_u=\mathcal{F}$. Entonces

$$\hat{\Sigma}(\hat{\Theta})\subseteq(\lambda_1,\lambda_2)\cap\Sigma(\hat{\Theta})$$

Para demostrar la inclusión opuesta, es suficiente mostrar que : Si $\lambda\in\hat{\rho}(\hat{\Theta})\cap(\lambda_1,\lambda_2)$, entonces $\lambda\in\rho(\hat{\Theta})$. En efecto, supongamos que

$$\hat{\rho}(\hat{\Theta})\cap(\lambda_1,\lambda_2)\subset\rho(\hat{\Theta})$$

lo cual es equivalente a :

$$\rho^c(\hat{\Theta})\subset(\hat{\rho}(\hat{\Theta}))^c\cup(-\infty,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\infty)\Leftrightarrow\Sigma(\hat{\Theta})\subset\hat{\Sigma}(\hat{\Theta})\cup(-\infty,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\infty).$$

Por otra parte ya sabemos que $\hat{\Sigma}(\hat{\Theta})\subset(\lambda_1,\lambda_2)$. Por lo tanto

$$\Sigma(\hat{\Theta})\cap(\lambda_1,\lambda_2)\subset\hat{\Sigma}(\hat{\Theta}).$$

Afirmación 3. $\hat{\rho}(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_1, \lambda_2) \subset \rho(\hat{\Theta})$. En efecto, si $\lambda \in \hat{\rho}(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_1, \lambda_2)$, entonces existe un proyector $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ y constantes positivas k y β tales que

$$\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta, t) q(\theta) x\| \leq k\|x\| e^{-\beta t}, \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta, t)(I - q(\theta)) x\| \leq k\|x\| e^{\beta t}, \quad t \leq 0 \tag{3.4}$$

y para todo $\theta \in \hat{\Theta}$

$$dim Rango(I - q(\theta)) < \infty \ \text{ y } \ Rango(I - q(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$$

Consideremos los proyectores siguientes :

$$\mathbf{P}_1, \mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \to \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{R}(\mathbf{P}_1) = \mathcal{S}_{\lambda_1}, \ \ \mathcal{N}(\mathbf{P}_1) = \mathcal{U}_{\lambda_1}$$

y

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}, \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_1}.$$

De la Proposición 3.3 tenemos

$$\mathcal{E} = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_1} + \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{R}(\mathbf{P}) + \mathcal{N}(\mathbf{P})$$

$\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_1 + \mathbf{QP}$ es un proyector en $\mathcal{E}$ tal que

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_\lambda) = \mathcal{S}_{\lambda_1} + \hat{\mathcal{S}}_\lambda, \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}_\lambda) = \hat{\mathcal{U}}_\lambda + \mathcal{U}_{\lambda_2}$$

donde $\hat{\mathcal{S}}_\lambda = \mathcal{R}(\mathbf{Q})$ y $\hat{\mathcal{U}}_\lambda = \mathcal{N}(\mathbf{Q})$.

Usando (3.3), (3.4) y el hecho que $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, λ_1, $\lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ se tienen que existen constantes positivas l y α tales que

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t) p_\lambda(\theta)\| \leq l e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \ \ \theta \in \hat{\Theta}$$

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)(I - p_\lambda(\theta))\| \leq l e^{\alpha t}, \quad t \leq 0, \ \ \theta \in \hat{\Theta}$$

Es fácil probar que

$$Rango(I - p_\lambda(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta) \ \text{ y } \ dim Rango(I - p_\lambda(\theta)) < \infty$$

para todo $\theta \in \hat{\Theta}$, lo cual implica que $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$.

□

Observación 3.2 Hasta ahora tenemos lo siguiente:

(1) $\hat{\Theta}$ es un subconjunto compacto, conexo e invariante de Θ

(2) puede ser que $\Sigma(\hat{\Theta}) = \emptyset$

(3) Si $\Sigma(\hat{\Theta}) \neq \emptyset$ y $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset (-\infty, a]$, entonces para todo conjunto

$$\{\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m\} \subset \rho(\hat{\Theta}), \quad a < \lambda_m. \tag{3.5}$$

tal que $\Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \neq \emptyset$; se tiene que $\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}} \neq \mathcal{E}_0$.
Más aun

$$\mathcal{V}_i := \mathcal{V}_i(\hat{\Theta}) := \mathcal{S}_{\lambda_i} \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

son subfibrados invariantes de $\mathcal{E}(\hat{\Theta})$.

(4) Sea π^i la restricción de π a $\mathcal{V}_i$ y $\Sigma_i(\hat{\Theta})$ el espectro de $(\mathcal{V}_i, \pi^i)$ sobre $\hat{\Theta}$. Entonces tenemos lo siguiente

$$\Sigma_i(\hat{\Theta}) = \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.6}$$

(5) También consideraremos

$$\Sigma_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) := \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (-\infty, \lambda_0). \tag{3.7}$$

Teorema 3.1 *Si $\Sigma(\hat{\Theta}) \neq \emptyset$ y λ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ son elegidos como en (3.5), entonces las siguientes declaraciones son válidas:*

(A) $\Sigma_i(\hat{\Theta}) = \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

(B) $\Sigma(\hat{\Theta}) = \Sigma_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) \cap \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i(\hat{\Theta})$

(C) $1 \leq \dim \mathcal{V}_i < \infty$

(D) $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta}), \quad i \neq j$

(E) $\mathcal{E} = \mathcal{S}_{\lambda_o} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *(Suma de Whitney)*

(F) $\mathcal{U}_{\lambda_0} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$ *y* $m \leq \dim \mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) = k(\lambda_0) < \infty, \quad \theta \in \hat{\Theta}$.

Demostración
La declaración (A) se sigue del Lema 3.7.
Para demostrar (B), ya sabemos que $\Sigma(\hat{\Theta}) \cap (-\infty, a]$. Luego tenemos

$$\begin{aligned}
\Sigma(\hat{\Theta}) &= \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (-\infty, \lambda_0) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i)) \\
&= \Sigma_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i(\hat{\Theta}))
\end{aligned}$$

De los Lemas 3.1 y 3.6 se sigue (C).
Para probar (D), consideremos $i+1 \leq j$. Entonces

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}} \cap \mathcal{S}_{\lambda_i}, \qquad \mathcal{V}_j = \mathcal{U}_{\lambda_{j-1}} \cap \mathcal{S}_{\lambda_j}, \qquad \mathcal{V}_i \subset \mathcal{S}_{\lambda_i}, \qquad \mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_{\lambda_j}$$

esto implica que $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$.
Para probar (E) haremos uso del Lema 3.4 de la siguiente manera:
Si $\lambda > a$, entonces $\lambda \in \rho(\hat{\Theta}), \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ y $\mathcal{U}_\lambda = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$. Por lo tanto $\mathcal{S}_{\lambda_m} = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$. consecuentemente

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{S}_{\lambda_m} = \mathcal{S}_{\lambda_m} \cap (\mathcal{S}_{\lambda_{m-1}} + \mathcal{U}_{\lambda_{m-1}}) \\
&= \mathcal{S}_{\lambda_{m-1}} + \mathcal{S}_{\lambda_m} \cap \mathcal{U}_{\lambda_{m-1}} = \mathcal{S}_{\lambda_{m-1}} + \mathcal{V}_m \\
&= \mathcal{S}_{\lambda_{m-1}} \cap (\mathcal{S}_{\lambda_{m-2}} + \mathcal{U}_{\lambda_{m-2}}) + \mathcal{V}_m \\
&= \mathcal{S}_{\lambda_{m-2}} + \mathcal{S}_{\lambda_{m-1}} \cap \mathcal{U}_{\lambda_{m-2}} + \mathcal{V}_m \\
&= \mathcal{S}_{\lambda_{m-2}} + \mathcal{V}_{m-1} + \mathcal{V}_m \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= \mathcal{S}_{\lambda_0} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots \mathcal{V}_m.
\end{aligned}$$

Para probar (F) usamos el Lema 3.1 y el hecho de que

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_{\lambda_0} + \mathcal{U}_{\lambda_0} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots \mathcal{V}_m \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_0}$$

Así, obtenemos que

$$\mathcal{U}_{\lambda_0} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots \mathcal{V}_m \quad \text{y} \quad m \leq dim\mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) = k(\lambda_0), \quad \theta \in \hat{\Theta}$$

□

Teorema 3.2 *Sea $\hat{\Theta}$ un subconjunto compacto, conexo e invariante de Θ. Si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son elegidos como en la Observación 3.2, entonces*

$$\Sigma(\hat{\Theta}) = \Sigma_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) \cup [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots [a_m, b_m]$$

donde

$$m = m(\lambda_0) \leq \dim \mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) = k(\lambda_0), \quad \theta \in \hat{\Theta}$$

y

$$\lambda_0 < a_1 \leq b_1 < \lambda_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots \leq b_{m-1} < \lambda_{m-1} < b_m < \lambda_m$$

Para todo $1 \leq i \leq m$ $\quad \mathcal{V}_i = \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}} \cap \mathcal{S}_{\lambda_i}$ es un subfibrado invariante de $\Sigma(\hat{\Theta})$ con $\dim \mathcal{V}_i(\theta) = n_i$ *para todo $\theta \in \hat{\Theta}$, donde*

$$n_i \geq 1 \quad \text{y} \quad n_1 + n_2 + \cdots n_m = k(\lambda_0)$$

Más aun

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \mathcal{E}_0, \quad i \neq j \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_{\lambda_0} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$$

Finalmente, el espectro $\Sigma_i(\hat{\Theta})$ *de* $(\mathcal{V}_i, \pi_i)$*, donde* π^i *denota la restricción de* π *a* $\mathcal{V}_i$ *y* $\Sigma_i(\hat{\Theta}) = [a_i, b_i]$.

Demostración
Del Lema 3.1, para todo $\theta \in \hat{\Theta}$ se tiene lo siguiente

$$\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{S}_{\lambda_0}(\theta) + \mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) = k(\lambda_0) < \infty$$

Denotemos por π^{λ_0} la restricción de π a $\mathcal{U}_{\lambda_0}$ y por $\Sigma^{\lambda_0}(\hat{\Theta})$ el espectro de $(\mathcal{U}_{\lambda_0}, \pi^{\lambda_0})$ sobre $\hat{\Theta}$. Dado que $dim\mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) = k(\lambda_0) < \infty$, estamos en el caso de espacios de Banach de dimensión finita y π^{λ_0} es un skew-product flow en $\mathcal{U}_{\lambda_0}$. Entonces obtenemos que

$$\Sigma^{\lambda_0}(\hat{\Theta}) = \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma_i(\hat{\Theta})$$

y

$$\mathcal{U}_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) = \mathcal{V}_1(\hat{\Theta}) + \mathcal{V}_2(\hat{\Theta}) + \mathcal{V}_m(\hat{\Theta}).$$

Entonces procediendo como en la demostración de Teorema 2 de [14] obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Observación 3.3 Los dos Teoremas anteriores nos aseguran lo siguiente: el espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ es uno de los siguientes conjuntos

(1) $\Sigma(\hat{\Theta}) = \emptyset$

(2) $(-\infty, \alpha_\infty]$

(3) $\Sigma(\hat{\Theta}) = (-\infty, \alpha_\infty] \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ para algún entero m

(4) $\Sigma(\hat{\Theta}) = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ para algún entero m

(5) $\Sigma(\hat{\Theta}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$

donde α_∞ es un número real y los intervalos espectrales $[a_i, b_i]$ no son vacíos y disjuntos.

4 Exponentes de Lyapunov

En esta sección investigaremos la relación entre el Espectro Dinámico y los Exponentes de Lyapunov, o como son llamados algunas veces Números del Tipo Lyapunov. Para esto consideraremos el Skew-Product Semiflow Lineal $\pi = (\Phi, \sigma)$ en el fibrado vectorial de Banach $\mathcal{E}$. Asumiremos todo el tiempo que Θ es un espacio topológico compacto de Hausdorff, el cual es conexo e invariante bajo el flujo σ.

Consideremos

$$\{\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m\} \subset \rho(\Theta), \qquad a < \lambda_m$$

tal que

$$\Sigma(\Theta) \subset (-\infty, a] \quad \text{y} \quad \Sigma(\Theta) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \neq \emptyset$$

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i(\Theta) = \mathcal{S}_{\lambda_i}(\Theta) \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}}(\Theta), \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

De los Teoremas 3.1 y 3.2 tenemos lo siguiente :

$$\Sigma(\Theta) = \Sigma_{\lambda_0}(\Theta) \cup [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_m, b_m] \tag{4.1}$$

$$\mathcal{E}(\Theta) = \mathcal{S}_{\lambda_0} + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m \tag{4.2}$$

Donde $m = m(\lambda_0) \leq \dim \mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) = k(\lambda_0)$ para todo $\theta \in \Theta$ y los intervalos espectrales $[a_i, b_i]$ han sido ordenado de manera que $b_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Sea $\mathbf{P}_i : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un proyector tal que $\mathcal{R}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{V}_i$ y el espacio nulo es la suma de los restantes $\mathcal{V}_j$ y $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ para $j \neq i$. Si $\mathbf{P}_{\lambda_0} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ es un proyector en $\mathcal{E}$ tal que:

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_{\lambda_0}) = \mathcal{S}_{\lambda_0} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}_{\lambda_0}) = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_m$$

entonces

$$I = \mathbf{P}_{\lambda_0} + \mathbf{P}_{\lambda_1} + \mathbf{P}_{\lambda_2} + \cdots + \mathbf{P}_{\lambda_m} \tag{4.3}$$

Dado un punto $(x, \theta) \in \mathcal{E}$, $x \neq 0$, entonces definiremos los cuatro exponentes de Lyapunov asociados con el punto (x, θ) como sigue:

$$\lambda_s^+(x, \theta) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \tag{4.4}$$

$$\lambda_i^+(x, \theta) = \liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \tag{4.5}$$

Si $(x, \theta) \in \mathcal{B}_u^-$, entonces definimos los otros dos exponentes de Lyapunov como sigue:

$$\lambda_s^-(x, \theta) = \limsup_{t \to -\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \tag{4.6}$$

$$\lambda_i^-(x, \theta) = \liminf_{t \to -\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \tag{4.7}$$

Teorema 4.1 *(A) Sea $(x,\theta) \in \mathcal{V}_i$, donde $\mathcal{V}_i$ es el subfibrado vectorial asociado con $\lambda_0 \in \rho(\Theta)$ y $[a_i, b_i]$, $x \neq 0$. Entonces los cuatro exponentes de Lyapunov (4.4) - (4.7) están bien definidos y yacen en $[a_i, b_i]$. En particular; si $a_i = b_i$, entonces para todo $(x,\theta) \in \mathcal{V}_i$, $x \neq 0$, los cuatro exponentes de Lyapunov coinciden y los límites*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta,t)x\| = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta,t)x\|$$

existen y coinciden con a_i.

(B) Si $(x,\theta) \in \mathcal{S}_{\lambda_0}$, entonces los dos exponentes de Lyapunov (4.4) y (4.6) coinciden y los límites

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta,t)x\| = \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta,t)x\| = \lambda_0$$

Demostración

Dado que $\lambda_0 \in \rho(\Theta)$, entonces existe un proyector $\mathbf{P}_{\lambda_0} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{U}_{\lambda_0} = Rango(I - \mathbf{P}_{\lambda_0}) \subset \mathcal{B}_u^-$. Por lo tanto, para todo $(x,\theta) \in \mathcal{V}_i \subset \mathcal{U}_{\lambda_0}$ los cuatro exponentes de Lyapunov están bien definidos.

Ahora nosotros necesitamos probar lo siguiente: Si $(x,\theta) \in \mathcal{V}_i$, $x \neq 0$, entonces $\lambda_s^+(x,\theta) \leq b_i$ y $a_i \leq \lambda_i^+(x,\theta)$. Dado que $\lambda_i^+(x,\theta) \leq \lambda_s^+(x,\theta)$, entonces $\lambda_s^+(x,\theta)$ y $\lambda_i^+(x,\theta)$ yacen en $[a_i, b_i]$. Con un argumento similar se puede probar que $\lambda_s^-(x,\theta)$ y $\lambda_i^-(x,\theta)$ yacen en $[a_i, b_i]$.

En efecto consideremos $\lambda \in (b_i, a_{i+1})$ - el espacio entre los intevalos $[a_i, b_i]$ y $[a_{i+1}, b_{i+1}]$. Entonces $\lambda \in \rho(\Theta)$ y existe un proyector $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, y constantes positivas $k > 1$, β tales que

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)p(\theta)x\| \leq ke^{-\beta t}, \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta \tag{4.8}$$

Si $(x,\theta) \in \mathcal{V}_i$, entonces $(x,\theta) \in \mathcal{S}_\lambda$. Por lo tanto $p(\theta)x = x$. De (4.8) obtenemos que

$$\|\Phi(\theta,t)x\| \leq ke^{(\lambda-\beta)t}, \quad t \geq 0$$

Así

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta,t)x\| &\leq \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(k)e^{(\lambda-\beta)t} \\ &= \lambda - \beta + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln(k) = \lambda - \beta\end{aligned}$$

Entonces

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta,t)x\| \leq \lambda, \quad \lambda \in (b_i, a_{i+1})$$

Luego

$$\lambda_s^+(x,\theta) \leq b_i$$

Ahora, consideremos $\lambda \in (b_{i-1}, a_i)$. Entonces $\lambda \in \rho(\Theta)$ y existe un proyector $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ y constantes positivas $k > 1, \beta$ tales que

$$\|\Phi_\lambda(\theta,t)(I - p(\theta))\| \leq ke^{\beta t}, \quad t \leq 0, \quad \theta \in \Theta \tag{4.9}$$

y para todo $\theta \in \Theta$ tenemos

$$dimRango(I - p(\theta)) < \infty, \qquad Rango(I - p(\theta)) \subset \mathcal{B}_u^-(\theta)$$

Si $(x, \theta) \in \mathcal{V}_i$, entonces $(x, \theta) \in \mathcal{U}_\lambda$. Por lo tanto $(I - p(\theta))x = x$. Luego usando (2.4) y (2.5), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= \Phi_\lambda(\theta.t, -t)\Phi_\lambda(\theta, t)x \\ &= \Phi_\lambda(\theta.t, -t)\Phi_\lambda(\theta, t)(I - p(\theta))x \\ &= \Phi_\lambda(\theta.t, -t)[\Phi_\lambda(\theta, t) - \Phi_\lambda(\theta, t)p(\theta)]x \\ &= \Phi_\lambda(\theta.t, -t)[\Phi_\lambda(\theta, t) - p(\theta.t)\Phi_\lambda(\theta, t)]x \\ &= \Phi_\lambda(\theta.t, -t)[I - p(\theta.t)]\Phi_\lambda(\theta, t)x \end{aligned}$$

Entonces, de (4.9) obtenemos lo siguiente

$$\|x\| \leq ke^{-\beta t}\|\Phi_\lambda(\theta, t)x\|, \qquad t \geq 0$$

Por lo tanto

$$\|\Phi(\theta, t)x\| \geq \frac{1}{k}\|x\|e^{(\lambda+\beta)t}, \qquad t \geq 0$$

Luego

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \geq \lambda + \beta > \lambda$$

para todo $\lambda \in (b_{i-1}, a_i)$. Así $\lambda_i^+(x, \theta) \geq a_i$.
Para probar (B) consideremos $(x, \theta) \in \mathcal{S}_{\lambda_0}$. Entonces tenemos

$$\lim_{t \to +\infty} \|\Phi_{\lambda_0}(\theta, t)x\| = \lim_{t \to +\infty} \|e^{-\lambda_0 t}\Phi(\theta, t)x\| = 0.$$

Por lo tanto, existe una constante positiva M tal que para t suficientemente grande tenemos:

$$\ln \|e^{-\lambda_0 t}\Phi(\theta, t)x\| \leq M$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{-\lambda_0 t}\Phi(\theta, t)x\| \\ &= \lim_{t \to +\infty} [-\lambda_0 + \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\|]. \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| = \lambda_0.$$

□

Definición 4.1 Para cada $\theta \in \Theta$ definimos el Exponente de Lyapunov Superior $\lambda_s^+(\theta)$ mediante:

$$\lambda_s^+(\theta) := sup\{\lambda_s^+(x, \theta) : \quad x \in X, \quad x \neq 0\}$$

Teorema 4.2 *El Exponente de Lyapunov Superior $\lambda_s^+(\theta)$ correspondiente a $\theta \in \Theta$ viene dado por:*

$$\lambda_s^+(\theta) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)\| \tag{4.10}$$

Demostración

Denotemos por $\gamma(\theta)$ el lado derecho de (4.10). Tenemos que

$$\frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \leq \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)\| + \frac{1}{t} \ln \|x\|$$

lo cual implica que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)\|$$

Por lo tanto $\lambda_s^+(x, \theta) \leq \gamma(\theta)$, para todo $x \in X$, $x \neq 0$; luego $\lambda_s^+(\theta) \leq \gamma(\theta)$.
Para demostrar la desigualdad contraria usaremos el hecho de que: Para todo $\epsilon > 0$ y $x \in X$ existe $N_{\epsilon,x} > 0$ tal que

$$\|\Phi(\theta, t)x\| \leq N_{\epsilon,x} e^{(\lambda_s^+(\theta)+\epsilon)t}, \qquad t \geq 0$$

La desigualdad anterior puede ser escrita como sigue

$$\|\Phi(\theta, t)x e^{-(\lambda_s^+(\theta)+\epsilon)t}\| \leq N_{\epsilon,x}$$

Entonces la familia de operadores

$$\left\{ \Phi(\theta, t)e^{-(\lambda_s^+(\theta)+\epsilon)t} : \qquad t \geq 0 \right\}$$

es acotada par cada $x \in X$. Se sigue de Teorema del Banach-Steinhaus que existe $N_\epsilon > 0$ tal que

$$\|\Phi(\theta, t)e^{-(\lambda_s^+(\theta)+\epsilon)t}\| \leq N_\epsilon, \qquad t \geq 0$$

Luego

$$\|\Phi(\theta, t)\| \leq N_\epsilon e^{(\lambda_s^+(\theta)+\epsilon)t}, \qquad t \geq 0$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \leq \frac{1}{t} \ln(N_\epsilon) + (\lambda_s^+(\theta) + \epsilon)$$

Así

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(\theta, t)x\| \leq \lambda_s^+(\theta) + \epsilon$$

Luego

$$\gamma(\theta) \leq \lambda_s^+(\theta).$$

□

5 Ejemplos

En esta sección presentaremos varios ejemplos en los cuales podemos localizar el espectro dinámico.

Ejemplo 5.1 Para este ejemplo consideraremos una ecuación lineal no autónoma la cual genera un Skew-Product Semiflow en el fibrado vectorial trivial $\mathcal{E} = X \times \Theta$ donde X es un espacio de Banach y Θ es un espacio topológico de Hausdorff.

Más precisamente, estudiaremos el siguiente sistema lineal no autónomo

$$\dot{x}(t) = A(\theta.t)x(t), \quad t > 0 \tag{5.1}$$

donde $A(\theta.t) = A + B(\theta.t)$, A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$; $\sigma(\theta, t) = \theta.t$ es un flujo en Θ y $B(\theta) \in L(X)$, $t \in I\!R$.

Lema 5.1 *Si $B(\cdot) : \Theta \to L(X)$ es fuertemente continuo, entonces el conjunto $\{\|B(\theta)\| : \theta \in \Theta\}$ es acotado.*

Demostración
Consideremos los conjuntos siguientes

$$H = \{\|B(\theta)\| : \theta \in \Theta\}, \qquad H(x) = \{\|B(\theta)x\| : \theta \in \Theta\}$$

Dado que $\theta \to B(\theta)x$ es continua y Θ es compacto, entonces, para todo $x \in X$ resulta que $H(x)$ es acotado. luego, por el Teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que H es acotado. □

Lema 5.2 *Si $B(\cdot) : \Theta \to L(X)$ es fuertemente continuo y $x(\cdot) : I\!R \to X$ es una función continua, entonces para cada $\theta \in \Theta$ la aplicación $t \to B(\theta.t)x(t)$ es continua.*

Demostración
Fijemos $t \in I\!R$. Entonces

$$\begin{aligned} &\|B(\theta(t+h))x(t+h) - B(\theta.t)x(t)\| \\ &= \|B(\theta(t+h))[x(t+h) - x(t)] - [B(\theta.(t+h)) - B(\theta.t)]x(t)\| \\ &\leq L\|x(t+h) - x(t)\| + \|[B(\theta.(t+h)) - B(\theta.t)]x(t)\| \end{aligned}$$

donde $L = \sup\{\|B(\theta)\| : \theta \in \Theta\}$ y $\theta.t \in \Theta$ para $t \in I\!R$.
Por lo tanto

$$\|B(\theta(t+h))x(t+h) - B(\theta.t)x(t)\| \to 0, \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

□

Para precisar en que sentido la ecuación (5.1) genera un Skew-Product Semiflow, debemos considerar la familia de ecuaciones integrales siguiente:

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B(\theta.s)x(s)\,ds. \ \ t \geq 0 \ \ \theta \in \Theta. \tag{5.2}$$

Definición 5.1 (Solución moderada). A la solución $x(t) = x(t, \theta)$ de la ecuación (5.2) la llamaremos **Solucion moderada** [2] de (5.1).

Teorema 5.1 *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo en X y $B(\cdot) : \Theta \to L(X)$ también fuertemente continuo. Entonces para cada $\theta \in \Theta$ y $x_0 \in X$ el problema*

$$\dot{x}(t) = A(\theta.t)x = (A + B(\theta.t))x(t); \quad x(0) = x_0 \tag{5.3}$$

tiene una única solución moderada $\Phi(\theta, t)x_0$ dada por

$$\Phi(\theta, t)x_0 = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0 ds. \tag{5.4}$$

Si

$$\|T(t)\| \leq Me^{Wt}, \quad t \geq 0,$$

entonces

$$\|\Phi(\theta, t)\| \leq Me^{(W+LM)t}, \quad t \geq 0 \tag{5.5}$$

donde

$$L = \sup\{\|B(\theta)\| : \theta \in \Theta\}$$

Más aun, la aplicación $\pi : \mathcal{E} \times I\!R_+ \to \mathcal{E}$ dada por

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta.t) \tag{5.6}$$

es un Skew-Product Semiflow en $\mathcal{E} = X \times \Theta$, tal vez sin la condición (4) de la definición 2.1.

Demostración
Buscaremos la solución de (5.2) mediante el método siguiente:

$$\Phi(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\theta, t) \tag{5.7}$$

donde

$$\Phi_n(\theta, t)x_0 := \int_0^t T(t-s)B(\theta.s)\Phi_{n-1}(\theta, s)x_0 ds \tag{5.8}$$

y

$$\Phi_0(\theta, t) = T(t)$$

[2] Es una traducción aproximada de Mild Solution

Es fácil obtener usando inducción matemática la siguiente estimación

$$\|\Phi_n(\theta,t)\| \leq M^{n+1}L^n e^{Wt}\frac{t^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots$$

Así, la serie

$$\Phi(\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\theta,t)$$

es mayorada por

$$Me^{Wt}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{(MLt)^n}{n!} = Me^{(W+ML)t}$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\theta,t)$ es absolutamente convergente en la topología uniforme de $L(X)$ en intervalos compactos .

Más aun

$$\begin{aligned}\Phi(\theta,t)x_0 &= \Phi_0(\theta,t)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(\theta,t)x_0\\ &= T(t)x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t T(t-s)B(\theta.s)\Phi_{n-1}(\theta,s)x_0 ds\\ &= T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B(\theta.s)\Phi(\theta,s)x_0 ds.\end{aligned}$$

De tal manera que nuestra construcción nos conduce a la solución de (5.2) cumpliendo la condición $\Phi(\theta,0)=I$, para todo $\theta\in\Theta$.

Para probar la unicidad, asumiremos que $\Psi(\theta,t)$ es otra solución de (5.2). Entonces restando las ecuaciones para $\Phi(\theta,t)$ y $\Psi(\theta,t)$ obtenemos

$$(\Phi(\theta,t)-\Psi(\theta,t))x_0 = \int_0^t T(t-s)B(\theta.s)[\Phi(\theta,s)-\Psi(\theta,s)]x_0 ds$$

luego

$$\|[\Phi(\theta,t)-\Psi(\theta,t)]x_0\| \leq \int_0^t Me^{W(t-s)}L\|\Phi(\theta,s)-\Psi(\theta,s)]x_0\|ds$$

Poniendo

$$g(t) = e^{-Wt}\|[\Phi(\theta,t)-\Psi(\theta,t)]x_0\|$$

obtenemos

$$g(t) \leq ML\int_0^t g(s)ds$$

Así, usando el lema de Gronwall conseguimos que $g(t) = 0$, lo que es equivalente a decir que

$$\Phi(\theta, t)x_0 = \Psi(\theta, t)x_0$$

Ahora probaremos que la aplicación π definida por (5.6) es un Skew-Product Semiflow en $\mathcal{E}$ de acuerdo a la Definición 2.1
En efecto.

(1) Claramente $\Phi(\theta, t) \in L(X), \quad \theta \in \Theta$

(2) Claramente $\Phi(\theta, 0) = I, \quad \theta \in \Theta$

(3) $\Phi(\theta, t)$ fuertemente continuo uniformemente en θ. En verdad: sea $t \geq 0, \quad h > 0$ y consideremos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\theta, t+h) - \Phi(\theta, t)x_0\| \quad &\leq \quad \|T(t+h)x_0 - T(t)x_0\| \\
&+ \quad \int_0^t \|(T(t+h-s) - T(t-s))B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0\| ds \\
&+ \quad \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0\| ds.
\end{aligned}$$

Luego usando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la continuidad fuerte de $T(t)$ y la acotación de $T(t)$, $\Phi(\theta, t)$ y $B(\theta)$, obtenemos que $\Phi(\theta, t)x_0$ es continuo a la derecha uniformemente en θ. Para probar la continuidad a la izquierda, supondremos que $t > 0$ y $h > 0$ de manera que $t - h > 0$. Entonces tenemos lo siguiente

$$\|\Phi(\theta, t-h)x_0 - \Phi(\theta, t)x_0\| \leq \|T(t-h)x_0 - T(t)x_0\| +$$

$$\| \int_0^{t-h} T(t-h-s)B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0 ds - \int T(t-s)B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0 ds\| =$$

$$\|T(t-h)x_0 - T(t)x_0\| + \| \int_0^{t-h} T(t-h-s)B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0 ds -$$

$$\int_{-h}^{t-h} T(t-h-s)B(\theta.(s+h))\Phi(\theta, s+h)x_0 ds\| \leq \|T(t-h)x_0 - T(t)x_0\| +$$

$$\| \int_0^{t-h} T(t-h-s)[B(\theta.s)\Phi(\theta, s)x_0 - B(\theta.(s+h)\Phi(\theta, s+h)x_0] ds\| +$$

$$+ \int_{-h}^{0} (t-h-s)B(\theta.(s+h))\Phi(\theta, s+h)x_0\| ds$$

Luego usando la continuidad a la derecha de $\Phi(\theta, t)$, la continuidad fuerte de $T(t)$, la acotación de $T(t)$, $\Phi(\theta, t)$, $\|B(\theta)\|$ y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, vemos que $\Phi(\theta, t)x_0$ es continua a la izquierda.

Ahora veremos que para todo $\theta \in \Theta$ y $s, t \in I\!R_+$ se tiene:

$$\Phi(\theta, s+t) = \Phi(\theta.t, s)\Phi(\theta, t)$$

Para probar esto usaremos (5.4) de la siguiente manera:

$$\Phi(\theta, t+s)x_0 - \Phi(\theta.s, t)\Phi(\theta, s)x_0 = T(t+s)x_0 + \int_0^{t+s} T(t+s-\alpha)B(\theta.\alpha)\Phi(\theta, \alpha)x_0 d\alpha -$$

$$(T(t) + \int_0^t T(t-\alpha)B(\theta.(s+\alpha))\Phi(\theta.s, \alpha)d\alpha)(T(s)x_0 + \int_0^s T(s-\beta)B(\theta.\beta)\Phi(\theta, \beta)x_0 d\beta)$$

$$= \int_0^{t+s} T(t+s-\alpha)B(\theta.\alpha)\Phi(\theta, \alpha)x_0 d\alpha - \int_0^s T(t+s-\beta)\Phi(\theta, \beta)x_0 d\beta$$

$$- \int_0^t T(t-\alpha)B(\theta.(s+\alpha)\Phi(\theta.s, \alpha)\Phi(\theta, s)x_0 d\alpha$$

$$= \int_s^{t+s} T(t+s-\alpha)B(\theta.\alpha)\Phi(\theta, \alpha)x_0 d\alpha - \int_0^t T(t-\alpha)B(\theta(s+\alpha))\Phi(\theta.s, \alpha)\Phi(\theta, s)x_0 d\alpha$$

Cambiando de variables en la primera integral, obtenemos:

$$\Phi(\theta, t+s)x_0 - \Phi(\theta.s, t)\Phi(\theta, s)x_0 = \int_0^t T(t-\alpha)B(\theta.(s+\alpha))[\Phi(\theta, \alpha+s) - \Phi(\theta.s, \alpha)\Phi(\theta, s)]x_0 d\alpha$$

Por lo tanto

$$\|\Phi(\theta, t+s)x_0 - \Phi(\theta.s, t)\Phi(\theta, s)x_0\| \leq$$
$$ML \int_0^t e^{W(t-\alpha)} \|\Phi(\theta, \alpha+s)x_0 - \Phi(\theta.s, \alpha)\Phi(\theta, s)x_0\| d\alpha$$

Así, aplicando el lema de Gronwall resulta

$$\Phi(\theta, t+s) = \Phi(\theta.s, t)\Phi(\theta, s)$$

□

La siguiente Proposición corresponde a la parte (4) de la Definición 2.1

Proposición 5.1 *Si el flujo $\sigma(\theta, t) = \theta.t$ depende continuamente en θ sobre intervalos compactos, entonces para todo $t \geq 0$ fijo, la aplicación que va de $\mathcal{E}$ en X dada por $(x, \theta) \to \Phi(\theta, t)x$ es continua .*

Proposición 5.2 *Sea $\pi = (\Phi, \sigma)$ el Skew-Product Semiflow definido por (5.6). Entonces*

$$\Sigma(\hat{\Theta}) \subset (-\infty, W + LM)$$

donde

$$L = \sup\{\|B(\theta)\| : \theta \in \Theta\}, \qquad \|T(t)\| \leq Me^{Wt}, \quad t \geq 0.$$

Los siguientes ejemplos pueden ser encontrados en [9].

Ejemplo 5.2 Consideremos la ecuación diferencial lineal escalar con retardo, de la forma siguiente

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t-1) \tag{5.9}$$

donde la función b pertenece al espacio X de las funciones $a : I\!R \to I\!R$ que son continuas y acotadas, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos de $I\!R$. Para el espacio de estados tomaremos $C = C([-1,0], I\!R)$ y para cada $a \in X$ y $\tau \in I\!R$ definimos la τ - traslación de a, como la función $a_\tau \in X$ dada por $a_\tau(t) = a(t+\tau)$. A la ecuación (5.9) le asociamos el conjunto

$$\Theta = cl\{b_\tau : \tau \in I\!R\}$$

donde cl denota la clausura en la topología de X. El conjunto Θ es compacto en X según la Proposición 1.1. Podemos definir en Θ el flujo $\sigma(t,a) = a_t = \theta.t, \quad \theta = a$ y asociar a la ecuación (5.9) el Skew-Product Semiflow siguiente

$$\pi : C \times \Theta \times I\!R_+ \to \Theta \times C, \qquad \pi(x,a,t) = (\Phi(a,t)x, a_t)$$

donde $\Phi(a,t)$ denota el operador de evolución asociado con la ecuación (5.9) cuando cambiamos a por b. Para este Skew-Product Semiflow se tienen los siguientes casos :

(1) $\Sigma(\Theta) = \emptyset$ si

$$b(t) = \begin{cases} -2\sin^2(\pi t) & t \in [2n, 2n+1] \\ 0 & t \in (2n-1, 2n), \text{para todo entero } n \end{cases}$$

(2) $\Sigma(\Theta) = (-\infty, 0]$ si

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -t & 0 < t < 1 \\ -1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(3) $\Sigma(\Theta) = (-\infty, \gamma] \cup [0, \beta]$, si $\gamma < 0 < \beta$ y

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

(4) $\Sigma(\Theta)$ es la union infinita numerable de intervalos compactos no degenerados, acumulados en $-\infty$, si

$$b(t) = \begin{cases} 1-\epsilon & t \leq 0 \\ t + (1-\epsilon) & 0 < t < \epsilon \\ 1 & t \geq \epsilon \end{cases}$$

con $0 < \epsilon < 1$.

Ejemplo 5.3 Consideremos el problema de frontera para ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico de la forma siguiente

$$\begin{aligned} u_t &= -b(t)u + u_{xx}, \qquad x \in (0,1) \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

con

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

Consideremos la solución de este problema en el espacio de Sobolev $H_0^1 = H_0^1(0,1)$ y denotemos

$$\Theta = cl\{b_\tau : \tau \in I\!R\}$$

donde, como anteriormente b_τ denota la τ - traslación de b y cl la clausura en la topología de la convergencia uniforme. En Θ definimos el flujo $\sigma(t,a) = a_t = \theta.t, \quad a = \theta \in \Theta$ y le asociamos al problema (5.10) el Skew-Product Semiflow

$$\pi : H_0^1 \times \Theta \times I\!R_+ \to H_0^1 \times \Theta, \qquad \pi(x,a,t) = (\Phi(a,t), \sigma(t,a))$$

donde $\Phi(a,t), \quad t \geq 0$ denota el operador de evolución asociado con la ecuación (5.10) cuando reemplazamos a por b.
En este caso se puede demostrar que

$$\Sigma(\Theta) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [-\pi^2(i^2+1), -\pi^2 i^2].$$

References

[1] M.Chen, X-Y.Chen and J.K.Hale, "Structural stability for time-periodic one-dimensional parabolic equations", CDSNS . 91-70.

[2] J.K.Hale (1977), "Theory of functional differential equations", Appl.Math.Sci., Springer Verlag, New York.

[3] J.K.Hale (1988), "Asymtotic Behavior of dissipative systems", Math.Surveys and Monographs, Vol.25, Amer.Soc., Providence, R.I.

[4] J.K.Hale and G.Raugel (1988), "Upper semicontinuity of the attractor for a singularly pertubed hyperbolic equation", J.Differential Equations, 73, pp. 197-214.

[5] A.Haraux (1984), "Two remarks on dissipative hyperbolic systems", in College de France Seminaire, Pitman, Boston.

[6] A.Haraux (1988), "Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear partial differential equations", Comm. in PDE, 13, pp. 1383-1414.

[7] D.Henry (1981), "Geometric theory of semilinear parabolic equations",Springer, New York.

[8] M.L.Peña (1992), "Exponential dichotomy singularly perturbed linear functional differential equations with small delays", Applicable Analysis, vol.47, pp. 213-225.

[9] L.T.Magalhães (1987), "The sprectrum of invariant sets for dissipative semiflows, in dynamics of infinite dimensional systems", NATO ASI series, No.F-37, Springer Verlag, New York.

[10] A.Pazy (1983), "Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations", Applied Mathematical Sciences, vol.44, Springer Verlag, New York.

[11] R.J.Sacker and G.R.Sell (1974), "Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I" J.Differential Equations, 15, pp. 429-458.

[12] R.J.Sacker and G.R.Sell (1976 A), "Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems II", J.Differential Equations, 22, pp.478-496.

[13] R.J.Sacker and G.R.Sell (1976 B), "Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems III", J.Differential Equations, 22, pp. 497-52.

[14] R.J.Sacker and G.R.Sell (1978), "A spectral theory for linear differential systems", J. Differential Equations, 27, pp. 320-358.

[15] R.J.Sacker and G.R.Sell, "Dichotomies for linear evolutionary equations in Banach spaces", to appear.

[16] R.J.Sacker and G.R.Sell (1980), "The spectrum of an invariant submanifold", J.Differential Equations, 38, pp. 135-160.

[17] G.R.Sell (1980), "The structure of a flow in the vicinity of an almost periodic motion", J.Differential Equations, 27, pp. 359-393.

[18] G.R.Sell (1985), "Smooth linearization near a fixed point", Amer.J.Math.,107, pp. 1035-1091.]

[19] R.Temam (1988), "Infinite dimensional dynamical systems in Mechanics and Physics", Springer Verlag, New York.

[20] Y.Yi (1990), "Bifurcation of higher dimensional tory under generic conditions", Ph.D Thesis.

[21] Y.Yi (1992), "Generalized integral manifold theorem", J. Diff. Eqns. (to appear).

[22] Y.Yi (1992), "Stability of integral manifold and orbital attraction of quasi-periodic motion", J. Diff. Eqns.(to appear).