NOTAS DE MATEMATICA

133

ANILLOS DE CADENA

POR

J. PASCUAL GARCIA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA

1993

ANILLOS DE CADENA

J. PASCUAL GARCIA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Los Andes,
Mérida, Venezuela

Sea R un anillo conmutativo con identidad con anillo total de fracciones T(R). Un elemento distinto de cero de R es **regular** si no es un divisor de cero. El conjunto de divisores de cero es denotado por Z(R).

Un anillo R es un **anillo de cadena** si el conjunto de sus ideales está totalmente ordenado con respecto a la relación de inclusión.

Es bien conocido que si R es un **anillo de cadena** y R_1 un ***sobreanillo*** de R , ésto es, $R \subset R_1 \subset T(R)$, entonces R_1 es un **anillo de cadena** y $R_1 = R_P$ para algún ideal primo de R .

El siguiente Teorema es una consecuencia de la definición de **anillo de cadena**.

TEOREMA 1 . Para un anillo conmutativo R las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) R tiene un sobreanillo que es un **anillo de cadena**

(2) T(R) es un **anillo de cadena**

(3) Z(R) = P , donde P es un anillo primo de R y $T(R) = R_P$

La imagen homomórfica de un **anillo de cadena** es un **anillo de**

cadena y éstos son anillos de valuación. Por lo tanto, la imagen homomórfica de domínios de valuación son **anillos de cadena**.

La pregunta de Kaplansky sobre si todo **anillo de cadena** es la imagen homomórfica de un domínio de valuación, L. Fuchs y S. Shelah (Proc. AMS 1989) dieron una respuesta negativa. Sin embargo, Froeschl ha demostrado que si R es un **anillo de cadena** con T(R) notheriano, entonces R es la imagen homomórfica de un dominio de valuación.

Aquí estudiaremos la clausura entera o integral de R , y la denotaremos por $\bar{R}$ y veremos cuando $\bar{R}$ es la intersección de **anillos de cadena**. En este sentido tenemos el siguiente Teorema.

TEOREMA . Para un anillo conmutativo R , las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $\bar{R} = \bigcap_{\alpha} V_{\alpha}$, donde V_{α} es un **anillo de cadena** para todo α

(2) Para todo **sobreanillo** R_1 de R , $\bar{R}_1$ es la intersección de **anillos de cadena**

(3) T(R) es un **anillo de cadena** y $Z(R) = P$, $P \subset Rt$, para todo elemento regular t de $\bar{R}$

(4) T(R) es un **anillo de cadena** $Z(R) = P$ y $P \subset Q$ para todo ideal regular Q de R .

Demostración : (1) $\Rightarrow$ (2) . Supongamos $\bar{R}= \bigcap_{\alpha} V_{\alpha}$, donde cada V_{α} es un **sobreanillo de cadena** de R . Luego por tener R un **sobreanillo de cadena** debemos tener que $Z(R) = P$ y $T(R) = R_P$ es un **anillo de cadena**. Sea R_1 un **sobreanillo** de R . Si $R \leq R_1 \leq \bar{R}$ entonces $\bar{R} = \bar{R}_1$ y por hipótesis $\bar{R}$ es intersección de **anillos de cadena**, por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $R = \bigcap_{\alpha} V_\alpha$ con V_α **anillo de cadena** para α , y R íntegramente cerrado. $\bar{R}_1$ es la intersección de anillos de s-valuación V_β , esto es, $T(R) - V_\beta$ es multiplicativamente cerrado. Digamos

$$\bar{R}_1 = \bigcap_{\beta} V_\beta .$$

puesto que R tiene pocos divisores de cero (R es Marot) cada V_β es un anillo de valuación. Froeschl ha demostrado que un anillo V_β de valuación es de cadena si y sólo si $Z(T(R)) \subset V_\beta$.

Por hipótesis tenemos que $R = \bigcap_{\alpha} V_\alpha$ con cada V_α **anillo de cadena**, luego $Z(T(R)) \subseteq V_\alpha$ y por lo tanto $Z(T(R)) \subseteq R$. Consecuentemente

$$Z(T(R)) \subseteq R_1 = \bigcap_{\beta} V_\beta$$

esto es

$$Z(T(R)) \subseteq V_\beta$$

Luego hemos demostrado que cada V_β es un **anillo de cadena**.

(2) $\Rightarrow$ (1) . Si cada **sobreanillo** R_1 , $R \subseteq R_1 \subset T(R)$ tenemos que $R_1 = \bigcap_{\alpha} V_\alpha$, con cada V_α **anillo de cadena** entonces debemos tener, en particular, $\bar{R} = \bigcap V_\alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (3) . Sea $\bar{R} = \bigcap_{\alpha} V_\alpha$, con V_α **anillos de cadena** para todo α . Entonces $Z(R) = P$ y $T(R) = R_P$ es un **anillo de cadena**. Sea $t \in \bar{R}$ un elemento regular, tenemos $PV_\alpha \subseteq P_P \cap V_\alpha = Z(V_\alpha)$.

Puesto que V_α es **anillo de cadena**, tV_α es un ideal regular, luego

$$PV_\alpha \subset tV_\alpha$$

$$P\bar{R} = P\left(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha} PV_\alpha \subset \bigcap_{\alpha} tV_\alpha = t\bar{R}$$

Por lo tanto $P \subset t\bar{R}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) . Inmediato.

(4) $\Rightarrow$ (1) . Por Samuel [Teorema 8], tenemos que $\bar{R} = \bigcap_{\alpha} V_\alpha$, donde los V_α son anillos de s-valuación. Puesto que R es un anillo de

Marot, tenemos que los V_α son anillos de s-valuación. Sean P_α los correspondientes ideales primos de V_α tal que (V_α, P_α) es un par de valuación. Para demostrar que V_α es un **anillo de cadena** será suficiente por Froeschl [2] demostrar que $Z(T(R)) \subseteq V_\alpha$.

Sea $x/y \in Z(T(V_\alpha))$ y supongamos que $x/y \in (T(V_\alpha) - V_\alpha)$. Luego $x \in Z(R)$ y x es regular. Puesto que V_α es un anillo de valuación existe $p \in P_\alpha$ tal que $p(x/y) \in V_\alpha - P_\alpha)$. ya que V_α es **anillo de cadena**, V_α es casi-local y Prüfer, luego $p(x/y) = t$ es una unidad de V_α por lo tanto $px = yt$ es un elemento regular, lo cual es una contradicción. En consecuencia

$$Z(T(V_\alpha)) \subset V_\alpha$$

y V_α es un **anillo de cadena**.

R E F E R E N C I A S

1) J.A. HUCKABA. *On valuations rings that contains zero divisors*. Proc. AMS, **40** (1973) 9-15.

2) P.A.FROESCHL. *Cained rings*. Pac. Soc. of Math. **65** (1976) 47-53.

3) L. FUCHS and S. SHELAH. *Kaplansky's problems on valuation rings*. Proc. AMS **105** (1989) 25-30.

4) P. SAMUEL. *La notion de place dans un anneau*. Bull. Soc. Math. France. **85** (1957) 123-133.