NOTAS DE MATEMATICAS
Nº 148

ACERCA DE LA DEFINICION DE ALGEBRA DE SCHUR

POR

OSWALDO ARAUJO G.

PREPRINT

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA

1994

ACERCA DE LA DEFINICION DE ALGEBRA DE SCHUR

Oswaldo Araujo. G.
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida, Venezuela

Resumen

En este artículo demostramos que para ciertos p-grafos, con $p > 1$, llamados grafos de Schur, el álgebra asociada a ellos es un álgebra de Schur.

Abstract

In this paper we prove that for some p-graphs, with $p > 1$, named Schur's graphs, their associated algebra is an algebra of Schur.

INTRODUCCION

El objetivo de este artículo es mostrar que para ciertos p-grafos, con $p > 1$, el álgebra asociada a ellos es un álgebra de Schur.

Este trabajo consta de tres parágrafos.

En el parágrafo primero introducimos la noción de álgebra de Schur dada en [4] y deducimos algunas consecuencias de este concepto.

En el segundo parágrafo recordamos algunos hechos que garantizan cuándo el álgebra asociada a un p-grafo, con $p > 1$, es asociativa, damos la definición de grafo de Schur y demostramos que el álgebra asociada a un grafo de Schur es un álgebra de Schur.

Finalmente, en el parágrafo tercero presentamos la definición de álgebra de Schur como es dada en [2] o en [3] y verificamos que ella es una generalización de la noción de álgebra de Schur introducida en [4].

Por otro lado, mostramos que el álgebra asociada a un grafo de Schur es isomorfa al álgebra de Schur de los polinomios homogéneos de grado uno. Este isomorfismo permite " visualizar " el álgebra de Schur y enmarcar el álgebra asociada a un p-grafo en un contexto más general del álgebra.

§.1 Algebras de Schur Vía Representación

1.1 Definiciones

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\boldsymbol{C}$ de los números complejos.

Sea G un grupo finito. Una **representación lineal** de G en V es un homomorfismo ρ de G en el grupo $GL(V)$ de automorfismos de V. El espacio vectorial V es llamado **espacio de representación** de ρ y es denotado V_ρ.

Dos representaciones ρ y ρ' de G son **equivalentes** si existe un isomorfismo $\tau : V_\rho \to V_{\rho'}$ tal que

$$\tau\rho(s) = \rho'(s)\tau, \quad \text{para todo} \ \ s \in G$$

Si ρ es una representación de G la suma directa de n representaciones de G, todas equivalentes a ρ, la denotamos $n\rho$

Si ρ y ρ' son dos representaciones de G entonces V_ρ y $V_{\rho'}$ son módulos a la izquierda sobre el álgebra $\boldsymbol{C}[G]$ del grupo G sobre $\boldsymbol{C}$, y $Hom_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho, V_{\rho'})$ es un $\boldsymbol{C}-$ espacio vectorial.

Pongamos $(\rho, \rho') = dim\, Hom_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho, V_{\rho'})$. Entonces el conjunto de todas las representaciones de G es un $\boldsymbol{Z}-$ módulo y (ρ, ρ') es una forma bilineal simétrica con respecto a la suma directa.

Si ρ y ρ' son dos representaciones irreducibles de G se demuestra, usando el lema de Schur, que $(\rho, \rho') = 1$ si $\rho = \rho'$, y $(\rho, \rho') = 0$ si ρ y ρ' no son equivalentes.

Definición. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación. La $\boldsymbol{C}-$ álgebra $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho)$ es llamada* **álgebra de Schur**.

1.2 Algunas consecuencias de la definición de álgebra de Schur

Teorema 1 *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible, entonces las $\boldsymbol{C}$-álgebras $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho})$ y $M_n(\boldsymbol{C})$ son isomorfas.*

En efecto, $(n\rho, n\rho) = dim\, End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho}) = n^2(\rho,\rho) = n^2 = dim\, M_n(\boldsymbol{C})$

Teorema 2 *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación cuya descomposición canónica es $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i\rho_i$, entonces*

$$End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\boldsymbol{C})$$

En efecto,

$$(\rho,\rho) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2(\rho_i,\rho_i) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2 = dim \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\boldsymbol{C}) = dim\, End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho)$$

Colorario 1 *ρ no tiene componentes múltiples si, y sólo si, el álgebra de Schur es conmutativa.*

Demostración. Si ρ no tiene componentes múltiples entonces $n_i = 1$, para todo i. Luego, $M_{n_i}(\boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{C}$ para todo i, y $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\boldsymbol{C}) \simeq \boldsymbol{C} \oplus \overbrace{\cdots}^{r} \oplus \boldsymbol{C}$.
Recíprocamente, si $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho)$ es conmutativa, entonces $\bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\boldsymbol{C})$ es conmutativa; por lo tanto $M_{n_i}(\boldsymbol{C})$ es conmutativa, para cada i, y a fortiori $n_i = 1$, para todo i.

Colorario 2 *Sea G un grupo abeliano de orden n. Si ρ es una representación de G que tiene n componentes no múltiples entonces, el álgebra de Schur es isomorfa a $\boldsymbol{C}[G]$*

En efecto, $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho) \simeq \boldsymbol{C} \oplus \overbrace{\cdots}^{n} \oplus \boldsymbol{C}$. y, por el teorema de Maschke, $\boldsymbol{C}[G] = \boldsymbol{C} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}$. En consecuencia, $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_\rho) \simeq \boldsymbol{C}[G]$.

§.2 Algebras Asociadas a un p- grafo.

2.1 Generalidades sobre p- grafos.

Un p- **grafo** es un par $\mathcal{G} = (S, m)$ donde S es un conjunto y $m : S \times S \to \{0, 1, \ldots, p\}$ es una aplicación de conjuntos, donde p es un entero no negativo.

Se dice que $\mathcal{G} = (S, m)$ es **simétrico** si $m(r, s) = m(s, r)$ cualesquiera que sean $r, s \in S$.

Sean $\mathcal{G} = (S, m)$ un p- grafo y $r, s \in S$. Se dice que r es **equivalente** a s si existe una cadena que une r y s. De esta manera cuando $\mathcal{G}$ es simétrico tenemos una relación de equivalencia definida sobre S y las clases de equivalencia de S módulo esa relación son llamadas **componentes conexas**.

Un p- grafo se dice **conexo** si solamente tiene una sola componente conexa.

Sean $\mathcal{G} = (S, m)$ un p- grafo, K un anillo conmutativo con elemento identidad, $(e_{rs})_{(r,s) \in S \times S}$ la base canónica del K- módulo libre $K^{(S \times S)}$. Definimos una estructura de K- álgebra sobre $K^{(S \times S)}$ poniendo

$$e_{qr}\, e_{st} = \delta_{rs}\, sup\,(m(q, r), m(s, t)) e_{qt}$$

cualesquiera que sean q, r, s, t en S, donde δ_{rs} es la delta de Kronecker.

Se obtiene así una estructura de K- álgebra sobre $K^{(S \times S)}$ denominada **álgebra asociada** al p- grafo $\mathcal{G}$ y denotada $L_K(\mathcal{G}) = K^{(S \times S)}$. Si S es un conjunto finito de n elementos, $L_K(\mathcal{G})$ es una K- álgebra libre de dimensión n^2.

En general, $L_K(\mathcal{G})$ no es asociativa, no es conmutativa y no tiene elemento identidad.

2.2 Grafos de Schur.

A continuación damos tres resultados cuya demostración puede ser consultada en [1]

Proposición 1 *Sea $\mathcal{G} = (S, m)$ un 1- grafo donde S es un conjunto finito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$L_K(\mathcal{G})$ es una K-álgebra con elemento identidad;*

2. *$m(r,r)=1$, para todo $r\in S$;*

Proposición 2 *Sea $\mathcal{G}=(S,m)$ un 1-grafo conexo y simétrico y supongamos que S es un conjunto finito de n elementos, $n\geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *cualesquiera que sean r,s,q en S tales que $m(r,s)=m(s,q)=1$, entonces $m(r,q)=1$;*

2. *$m(r,s)=1$, cualesquiera que sean r,s en S;*

3. *existe un isomorfismo de K-álgebra $L_K(\mathcal{G})\simeq M_n(K)$;*

4. *$L_K(\mathcal{G})$ es una K-álgebra asociativa;*

Proposición 3 *Sea K un anillo que contiene al cuerpo $\boldsymbol{Q}$ de los números racionales como sub-cuerpo. Sea $\mathcal{G}=(S,m)$ un p-grafo conexo y simétrico y supongamos $m(u,u)=\mathcal{V}_u$ $(1\leq\mathcal{V}_u\leq p)$ cualquiera que sea u en S. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *cualesquiera que sean r,s,q en S distintos tales que $m(r,s)=m(s,q)=1$, entonces $m(r,q)=1$;*

2. *$m(r,s)=1$, cualesquiera que sean r,s en S, $r\neq s$;*

3. *existe un isomorfismo de K-álgebra $L_K(\mathcal{G})\simeq M_n(K)$;*

4. *$L_K(\mathcal{G})$ es una K-álgebra asociativa;*

Definición. *Todo p-grafo que satisface las condiciones equivalentes de la proposición 2 ó de la proposición 3 es denominado* **grafo de Schur**

Teorema 1 *Sea $\rho: G\to GL(V)$ una representación irreducible de grado n. Sea $\mathcal{G}$ un grafo de Schur. Entonces existe un isomorfismo de $\boldsymbol{C}$-álgebras*

$$L_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{G})\simeq End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho}).$$

En efecto, por el teorema 1 del §.1 las $\boldsymbol{C}$-álgebras $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho})$ y $M_n(\boldsymbol{C})$ son isomorfas. Por otro lado, $L_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{G})\simeq M_n(\boldsymbol{C})$ (proposición 2 o proposición 3), de donde $L_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{G})\simeq End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho})$.

§.3 Algebras de Schur Vía Funciones de Representación

3.1 Funciones de Representación

Sea Γ un grupo multiplicativo cuyo elemento identidad es 1_Γ y K un cuerpo. El conjunto K^Γ de todas las aplicaciones $f : \Gamma \to K$ es una $K-$álgebra conmutativa con las operaciones definidas punto a punto.

Proposición 1 *El álgebra $K^\Gamma \otimes K^\Gamma$ es un sub-espacio de $K^{\Gamma\times\Gamma}$.*

Demostración: La aplicación $\delta : K^\Gamma \times K^\Gamma \to K^{\Gamma\times\Gamma}$ tal que $\delta(s,t) = f(s)g(t)$ es bilineal. Por la propiedad universal del producto tensorial existe una única aplicación lineal $\alpha : K^\Gamma \otimes K^\Gamma \longrightarrow K^{\Gamma\times\Gamma}$ tal que $\alpha\otimes = \delta$, donde $\otimes : K^\Gamma \times K^\Gamma \to K^\Gamma \otimes K^\Gamma$. Como α es inyectiva podemos identificar $K^\Gamma \otimes K^\Gamma$ con un sub-espacio de $K^{\Gamma\times\Gamma}$.

La estructura de grupo definida sobre Γ permite definir las aplicaciones $\Delta : K^\Gamma \to K^{\Gamma\times\Gamma}$, $\varepsilon : K^\Gamma \to K$ como sigue:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st), \quad \varepsilon(f) = f(1_\Gamma)$$

que son homomorfismos de $K-$álgebras.

Definición. *Se dice que $f \in K^\Gamma$ es una* **función de representación** *si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. *Los $K[\Gamma]-$módulos $K[\Gamma]\cdot f$ y $f \cdot K[\Gamma]$ generados por f son espacios vectoriales de dimensión finita.*
2. *$\Delta(f) \in K^\Gamma \otimes K^\Gamma$, esto es, existen elementos f_h, $f_{h'}$ en K^Γ (donde h percorre un conjunto finito de índices) tales que*

$$\Delta(f) = \sum_h f_h \otimes f_{h'}$$

El conjunto de todas las funciones de representación es denotado por $F = F(K^\Gamma)$.

Se tiene que F es una sub-álgebra de K^Γ. El elemento identidad i de F es la aplicación $i(s) = 1_K$ para todo $s \in \Gamma$.

Proposición 2 *La tripleta (F, Δ, ε) es una co-álgebra sobre K.*

Demostración: Es fácil ver que F es un $K-$espacio vectorial. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & F \otimes F \arrow[d, "1_F \otimes \Delta"] \\ F \otimes F \arrow[r, "\Delta \otimes 1_F"] & F \otimes F \otimes F \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En efecto,

$$\begin{aligned} ((1_F \otimes \Delta)\Delta)(f) &= (1_F \otimes \Delta)(\Delta(f)) = (1_F \otimes \Delta)(\sum_h f_h \otimes f_{h'}) \\ &= \sum f_h \otimes \Delta(f_{h'}) = \sum \Delta(f_{h'}) \otimes f_h \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes 1_F)\Delta)(f) &= (\Delta \otimes 1_F)(\Delta(f)) \ = \ (\Delta \otimes 1_F)(\sum f_h \otimes f_{h'}) \\ &= (\Delta \otimes 1_F)(\sum f_{h'} \otimes f_h) \ = \ \sum \Delta(f_{h'}) \otimes f_h \end{aligned}$$

Finalmente, como $i(s) = 1_K$, para todo s en Γ y $\Delta(i) = i \otimes i$ tenemos: $((1_F \otimes \varepsilon)\Delta)(i) = (1_F \otimes \varepsilon)(i \otimes i) = i \otimes \varepsilon(i) = i \otimes i(1_\Gamma) = i \otimes 1_K = \beta(i)$, donde $\beta(a) = a \otimes 1_K$.

Por otro lado $((\varepsilon \otimes 1_F)\Delta)(i) = \alpha(i)$, donde $\alpha(a) = 1_K \otimes a$. Lo que prueba la conmutatividad del diagrama.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ K \otimes F & F \otimes F \arrow[l, "\varepsilon \otimes 1_F"'] \arrow[r, "1_F \otimes \varepsilon"] & F \otimes K \end{tikzcd}$$

3.2 Algebras de Schur

Sea n un entero positivo, K un cuerpo infinito, y $\Gamma = GL_n(K)$ el grupo de las matrices inversibles $n \times n$ sobre K. Para cada par k, l en $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ sea $c_{kl} \in K^\Gamma$ la función que asocia a cada matriz $g \in \Gamma$ su $(k, l)-$coeficiente g_{kl}. Indiquemos por $A_K(n)$ la $K-$sub-álgebra de K^Γ generada por las funciones c_{kl}; los elementos de $A_K(n)$ son, por definición, las funciones polinomios sobre Γ.

Como K es infinito las c_{kl} son algebraicamente independientes sobre K, por lo tanto $A_K(n)$ puede ser vista como el álgebra de los polinomios en n^2 "indeterminadas" c_{kl} sobre K.

Es fácil ver que $\Delta(c_{kl}) = \sum c_{kt} \otimes c_{tl} \in K^\Gamma \otimes K^\Gamma$. Por consiguiente, $A_K(n)$ es una sub-co-álgebra de la co-álgebra $F(K^\Gamma)$ de todas las funciones de representación de Γ sobre K.

Para cada $r \geq 0$ denotemos por $A_K(n, r)$ el sub-espacio de $A_K(n)$ de los **polinomios homogéneos** de grado r en las n^2 indeterminadas c_{kl}. Entonces el $K-$espacio $A_K(n, r)$ tiene dimensión finita $\binom{n^2+r-1}{r}$, en particular $A_K(n, 0) = K \cdot 1_A$, donde 1_A denota la función constante $1_A(g) = 1_K$, para todo $g \in \Gamma$.

Sea $I(n, r) = \{i : \underline{r} \to \underline{n}\}$, donde $\underline{r} = \{1, 2, \ldots, r\}$ y $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Un elemento de $I(n, r)$ se escribe como un vector o "multi-índice" $i = (i_1, i_2, \ldots i_r)$.

Sean i, j dos elementos de $I(n, r)$, denotamos por $c_{i,j}$ el producto $c_{i_1 j_1} \cdots c_{i_r j_r}$ en $A_K(n, r)$. Como Δ es un homomorfismo de álgebras tenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta(c_{i,j}) &= \Delta(c_{i_1 j_1}) \cdots \Delta(c_{i_r j_r}) \\
&= (\sum_{\lambda_1} c_{i \lambda_1} \otimes c_{\lambda_1 j_1}) \cdots (\sum_{\lambda_r} c_{i_r \lambda_r} \otimes c_{\lambda_r j_r}) \\
&= \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r} c_{i_1 \lambda_1} \cdots c_{i_r \lambda_r} \otimes c_{\lambda_1 j_1} \cdots c_{\lambda_r j_r} \\
&= \sum_{\lambda \in I(n,r)} c_{i,\lambda} \otimes c_{\lambda,j}.
\end{aligned}
$$

De este cálculo concluimos que las funciones $c_{i,j}$ de $A_K(n,r)$, $i,j \in I(n,r)$, son funciones de representación y que $A_K(n,r)$ es una sub–co-álgebra de la co-álgebra $F(K^\Gamma)$.

Sea $i = (i_1, \ldots, i_r) \in I(n,r)$ y G_r el grupo simétrico. Como el grupo simétrico G_r actúa sobre el conjunto $I(n,r)$ la relación $\sim$
$(i,j) \sim (l,k)$ si, y sólo si, existe $\sigma \in G_r$ tal que $(l,k) = (\sigma i, \sigma j)$ define una relación de equivalencia en $I(n,r) \times I(n,r)$.

Observemos que $c_{i,j} = c_{\sigma(i),\sigma(j)}$, para todo σ en G_r y los $c_{i,j}$, con $(i,j) \in I(n,r) \times I(n,r)/\sim$ forman una $K-$base de $A_K(n,r)$. Por otro lado, $A_K(n,r)$ es una co-álgebra con la co-multiplicación inducida por Δ dada por $\Delta(f)(s,t) = f(st)$ y co-unidad por ε, definida por $\varepsilon(f) = f(1_\Gamma)$.

Nótese que

$$\Delta(c_{i,j}) = \sum_{\lambda \in I(n,r)} c_{i,\lambda} \otimes c_{\lambda,j}$$

y

$$\varepsilon(c_{i,j}) = c_{i,j}(1_\Gamma) = \delta_{i,j} = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_r j_r}$$

Proposición 3 *La estructura de co-álgebra de $A_K(n,r)$ induce una estructura de álgebra en su dual $S_K(n,r)$.*

Demostración: Sean ξ, ξ' en $S_K(n,r)$, definimos

$$\xi \cdot \xi' : A_K(n,r) \longrightarrow K$$

por $\xi\xi'(c_{i,j}) = \mu(\xi \otimes \xi'(\Delta c_{i,j}))$, donde $\mu : K \otimes K \to K$ es tal que $\mu(\alpha \otimes \beta)$ $= \alpha\beta$. Así,

$$\xi \cdot \xi'(c_{i,j}) = \sum_{l \in I(n,r)} \xi(c_{i,l}) \cdot \xi'(c_{l,j})$$

Observemos que de la definición de ε se tiene $\varepsilon(c_{i,j}) = c_{i,j}(1_\Gamma) = \delta_{i,j}$, luego ε pertenece a $S_K(n,r)$. Más aún,

$$\xi \cdot \varepsilon(c_{i,j}) = \sum_{l \in I(n,r)} \xi(c_{i,l}) \cdot \varepsilon(c_{l,j}) = \sum_{l \in I(n,r)} \xi(c_{i,l}) \cdot \delta_{l,j} = \xi(c_{i,j}) \cdot 1$$

para todo i,j en $I(n,r)$. Luego, ε es el elemento identidad de $S_K(n,r)$.

Si el conjunto $\{\xi_{i,j} \mid i,j \in I(n,r) \times I(n,r)/\sim\}$ es una base de $S_K(n,r)$, dual de la base $\{c_{i,j} \mid i,j \in I(n,r)\times I(n,r)/\sim\}$ de $A_K(n,r)$, podemos deducir una regla de multiplicación en $S_K(n,r)$ determinando como se multiplican los elementos de esa base. De la definición de producto en $S_K(n,r)$ tenemos

$$\xi_{i,j}\xi_{l,k}(c_{p,q}) = \sum_{t\in I(n,r)} \xi_{i,j}(c_{p,t}) \cdot \xi_{l,k}(c_{t,q})$$

Cada sumando $\xi_{i,j}(c_{p,t})\cdot\xi_{l,k}(c_{t,q})$ es cero o uno, y uno cuando $(i,j) \sim (p,t)$ y $(l,k) \sim (t,q)$. Por consiguiente, si $Z(i,j,l,k,p,q)$ es el cardinal del conjunto $\{t \in I(n,r) | (i,j) \sim (p,t) \;\; y \;\; (l,k) \sim (t,q)\}$, entonces

$$\xi_{i,j}\xi_{l,k}(c_{p,q}) = Z(i,j,l,k,p,q)\cdot 1_K = Z(i,j,l,k,p,q)1_K\xi_{p,q}(c_{p,q})$$

De donde se sigue que

$$\xi_{i,j}\cdot\xi_{l,k} = \sum Z(i,j,l,k,p,q)1_K\cdot\xi_{p,q}$$

donde la suma varía en $I(n,r) \times I(n,r)/\sim$.

Como $A_K(n,r)$ es una co-álgebra su dual, $S_K(n,r)$, es una álgebra asociativa de dimensión $\binom{n^2+r-1}{r}$

Definición. *El álgebra $S_K(n,r)$ es denominada* **álgebra de Schur**

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la multiplicación definida en el álgebra de Schur.

Proposición 4 *Los elementos $\xi_{i,j}$ de la base de $S_K(n,r)$ satisfacen las siguientes relaciones:*

1. $\xi_{i,i}\xi_{j,j} = 0$, *si i no es equivalente a j;*
2. $\xi_{i,i}\xi_{i,j} = \xi_{i,j}$;
3. $\xi_{i,i}^2 = \xi_{i,i}$
4. $\varepsilon = \sum_{i\in I(n,r)/\sim} \xi_{i,i}$

Ejemplo: El álgebra de Schur de los polinomios homogéneos de grado 1.

El álgebra de Schur $S_K(n,1)$ tiene dimensión n^2 y observamos que $Z(i,j,l,k,p,q)$ es igual a uno ya que los elementos de $I(n,1) \times I(n,1)/\sim$ están constituidos por los representantes y éstos no son equivalentes entre sí. Usando las reglas dadas en la proposición 3 podemos construir la tabla de multiplicación del álgebra de Schur de los polinomios homogéneos de grado 1.

	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\cdots$	ξ_{1,n^2}	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\cdots$	ξ_{2,n^2}	$\cdots$	$\xi_{n,1}$	$\xi_{n,2}$	$\cdots$	ξ_{n^2,n^2}
$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\cdots$	ξ_{1,n^2}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\xi_{1,2}$	0	0	$\cdots$	0	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\cdots$	ξ_{1,n^2}	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$													
ξ_{1,n^2}	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\cdots$	ξ_{1,n^2}
$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\cdots$	ξ_{2,n^2}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\xi_{2,2}$	0	0	$\cdots$	0	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\cdots$	ξ_{2,n^2}	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$													
ξ_{2,n^2}	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	$\cdots$	ξ_{2,n^2}
$\vdots$													
$\xi_{n,1}$	$\xi_{n,1}$	$\xi_{n,2}$	$\cdots$	ξ_{n,n^2}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\xi_{n,2}$	0	0	$\cdots$	0	$\xi_{n,1}$	$\xi_{n,2}$	$\cdots$	ξ_{n,n^2}	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$													
ξ_{n^2,n^2}	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\xi_{n^2,1}$	$\xi_{n^2,2}$	$\cdots$	ξ_{n^2,n^2}

Teorema 1 *Sea $\mathcal{G}$ un grafo de Schur. Las $K-$álgebras $L_K(\mathcal{G})$ y $S_K(n,1)$ son isomorfas.*

En efecto, $dimS_K(n,1) = n^2 = dimL_K(\mathcal{G})$ y las tablas de multiplicación de ambas álgebras coinciden al superponerse.

Teorema 2 *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación irreducible de grado n y $\mathcal{G}$ un grafo de Schur. Entonces las $\boldsymbol{C}-$álgebras $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho})$ y $S_{\boldsymbol{C}}(n,1)$ son isomorfas.*

Demostración: Por el resultado anterior $S_{\boldsymbol{C}}(n,1) \simeq L_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{G})$ y como $L_{\boldsymbol{C}}(\mathcal{G}) \simeq End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho})$ (teorema 1, §2) tenemos $End_{\boldsymbol{C}[G]}(V_{n\rho}) \simeq S_{\boldsymbol{C}}(n,1)$.

Los teoremas 1 y 2 nos muestran, respectivamente, que **el álgebra asociada a un grafo de Schur es el álgebra de Schur de los polinomios**

homogéneos de grado uno y que la **definición de álgebra de Schur vía representación es un caso particular de la noción de álgebra de Shur vía funciones de representación.**

Gracias a los isomorfismos

$$S_{\mathbb{C}}(n,1) \simeq L_{\mathbb{C}}(\mathcal{G}) \simeq End_{\mathbb{C}[G]}(V_{n\rho})$$

podemos "visualizar" el álgebra de Schur $S_{\mathbb{C}}(n,1)$. Por ejemplo, $S_{\mathbb{C}}(2,1)$ es el álgebra asociada al grafo de Schur [fig. a] y $S_{\mathbb{C}}(3,1)$ lo es del grafo de Schur [fig. b]

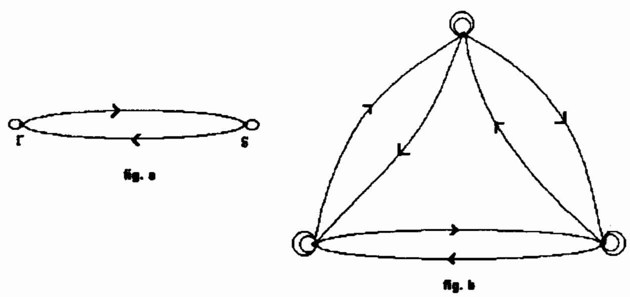

Figura.

Bibliografía

[1] Araujo, O, Sur un Modele Mathematique de la Chimie Constitutionnelle, tesis de doctorado, Montpellier, 1981.

[2] Flores, D, Representación de Grupos, 1ª EVM, Mérida, 1988.

[3] Green, J. A, Polynomial Representations of GL_n, *Lecture Notes in Mathematics*, Nº 830, Springer-Verlag, 1980.

[4] Piatetski-Shapiro, I, Complex Representations of $GL(2, K)$ for finite fields K, Contemporary Mathematics, volume 16, 1982.