NOTAS SOBRE
LA PROPIEDAD DE RADON–NIKODYM
EN ESPACIOS DE BANACH

por

Diómedes Bárcenas

Mérida, 1995

La mayor parte del contenido de estas notas se encuentra en las excelentes monografías de Diestel-Uhl [15] y van Dulst [17], a excepción quizás de las secciones 3 y 7 donde se presentan resultados mas recientes; hecho que podría ser la mayor justificación para su escritura; la cual fue sustancialmente influenciada en su presentación por las conversaciones sobre el tema con los profesores Wilman Brito, Dick van Dulst, Ventura Echandía, Ferenc Schipp y Wilfredo Urbina. A todos ellos mi agradecimiento.

Diómedes Bárcenas.

Contenido

1 Integral de Bochner

A través de estas notas supondremos que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, siendo μ una medida completa.

Definición 1.1 *Dados un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y un espacio de Banach X, decimos que una función $f: \Omega \to X$* **es una función simple**, *si f admite una representación de la forma:*

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{X}_{E_i}(w);$$

donde $x_i \in X$; $E_i \in \Sigma \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$; y $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Definición 1.2 *Una función $f: \Omega \to X$ se llama* **μ-medible** o **fuertemente μ-medible** *si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ y un conjunto $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$ y $f(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(w) \quad \forall w \in \Omega \backslash N$.*

El siguiente resultado, conocido como criterio de μ-medibilidad de Pettis, será de gran utilidad en este trabajo.

Teorema 1.3 *Una función $f: \Omega \to X$ es fuertemente μ-medible si y sólo si, f satisface las siguientes condiciones:*

i) $x^* f$ es μ-medible para cada $x^* \in X^*$ (f es débilmente μ-medible).

ii) El rango de f es **esencialmente separable**; *es decir, existe $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ y $\overline{f(\Omega \backslash N)}$ es separable.*

Demostración. Si f es fuertemente μ-medible, existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tal que f_n converge a f μ-casi siempre; por lo tanto, si

$x^* \in X^*$, vemos que $\{x^* f_n\}$ es una sucesión de funciones simples que converge a $x^* f$ μ-casi siempre y así vemos que se satisface la condición (i).

Sea $Z_n = \text{Rang} f_n(X)$, Z_n es finito y por lo tanto $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ es numerable; ello implica que el subespacio cerrado Y de X generado por Z es separable. Además si $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$ y $\{f_n(w)\}$ converge a $f(w)$ para cada $w \in \Omega \backslash N$, vemos $f(w) \in Y \quad \forall w \in \Omega \backslash N$; es decir, f es esencialmente separablemente valuada.

Supongamos que se satisfacen las hipótesis:

i) f es débilmente μ-medible.

ii) f es esencialmente separablemente valuada.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el rango de f está contenido en un subespacio separable Y de X; sea $\{y_n\}$ una sucesión densa en Y. Por el Teorema de Hahn Banach, existe una sucesión $\{y_n^*\}$ contenida en Y^* tal que $||y_n^*|| = 1$ y $|y_n^*(y_n)| = ||y_n||$. Esto implica que $||f(w)|| = \sup_n |y_n^* f(w)|$, y por lo tanto $||f(\cdot)||$ es μ-medible. El mismo argumento demuestra que la función

$$g_n(\cdot) = ||f(\cdot) - y_n|| \text{ es } \mu\text{-medible.}$$

Sea $\varepsilon/n > 0$ y $E_n = \{w \in \Omega : g_n(w) < \varepsilon\}$. $E_n \in \Sigma$ por ser μ una medida completa.

Definamos $g: \Omega \to X$ mediante

$$g(w) = \begin{cases} y_n \quad si \quad w \in E_n \setminus \bigcup\limits_{m<n} E_n \\ \\ 0 \textit{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Por la construcción de los conjuntos E_n, tenemos que $||g(w) - f(w)|| < \varepsilon$ μ-casi siempre. Si hacemos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \in N$, construimos una sucesión de funciones $\{h_n\}$ tal que para cada $n \in N$, $||f(\cdot) - h_n(\cdot)|| < \frac{1}{n}$ y

$$h_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m} \mathcal{X}_{E_{n,m}}$$

con $E_{n,i} \bigcap E_{n,j} = \emptyset$; $\quad \forall i \neq j$ y $E_{n,m} \in \Sigma$.

No es difícil ver que $\{h_n\}$ determina una sucesión de funciones simples que converge μ-casi siempre a f. ∎

Del criterio de μ-medibilidad de Pettis y su demostración se obtiene cada uno de los siguientes corolarios:

Corolario 1.4 *Una función $f: \Omega \to X$ es μ-medible si y sólo si f es el límite casi uniforme de una sucesión de funciones numerablemente valuadas.*

Corolario 1.5 *Si X es un espacio de Banach separable entonces los conceptos de medibilidad fuerte y débil coinciden.*

Un poco más general es el siguiente

Corolario 1.6 *Una función $f: \Omega \to X$ esencialmente separablemente valuada es fuertemente μ-medible si y sólo si existe un conjunto numerable $\Gamma \subset X^*$ tal que $x^* f$ es μ-medible para cada $x^* \in \Gamma$ y existe $N \in \Sigma$ tal que $\mu(N) = 0$ y para cada $w \in \Omega \backslash N$,*

$$||f(w)|| = \sup\{|x^* f(w)|;\ x^* \in \Gamma\}$$

Corolario 1.7 *Si f es μ-medible entonces $||f(\cdot)||$ es μ-medible.*

Ejemplo 1.8 *Sea* $\{e_t : t \in [0,1]\}$ *una base ortonormal del espacio de Hilbert* $\ell_2[0,1]$ *y definamos* $f:[0,1] \to \ell_2[0,1]$ *mediante* $f(t) = e_t$.

Si $x^* \in \ell_2[0,1]^*$ *entonces, por el Teorema de Representación de Riez, existe* $(\alpha_t) \in \ell_2[0,1]$ *tal que* $x^* = (\alpha_t)$*; y* $\sum_{t\in[0,1]} |\alpha_t|^2 < 1 \;\Rightarrow x^* f = 0$ *casi siempre respecto a la medida de Lebesgue en* $[0,1]$. *Esto implica que* f *es débilmente* μ*-medible.*

Por otra parte, si $E \subset [0,1]$ *con* $\mu(E) = 0$ *y* $f([0,1]\backslash E)$ *es separable, entonces* $[0,1]\backslash E$ *es numerable y por lo tanto* $\mu[0,1] = 0$*; lo cual es una contradicción. Esto implica que* f *no es fuertemente* μ*-medible.*

Como $||f(t)|| = 1 \ \forall t \in [0,1]$, *tenemos que* $||f(\cdot)||$ *es* μ*-medible.*

Pasemos ahora al concepto de integral de Bochner.

Definición 1.9 *La* **integral sobre un conjunto medible** E *de una función simple de la forma*

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{X}_{A_i}$$

se define mediante la fórmula

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E \cap A_i).$$

Una función fuertemente medible f se llama **Bochner integrable**, si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||(f_n - f)(\cdot)|| d\mu = 0$$

En este caso la integral de Bochner de f, sobre un conjunto medible E se define como

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Es fácil demostrar que la integral de una función Bochner integrable existe y no depende de la sucesión de funciones simples $\{f_n\}$.

El siguiente Teorema caracteriza las funciones Bochner integrables.

Teorema 1.10 *Una función $f\colon\Omega \to X$ fuertemente medible es Bochner integrable $\Leftrightarrow$ $||f(\cdot)||$ es Lebesgue integrable.*

Demostración. Si f es Bochner integrable y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones simples tal que $\int_\Omega ||(f_n - f)(\cdot)||d\mu = 0$; entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que

$$\int_\Omega ||f(\cdot)||d\mu \leq \int_\Omega ||f_{n_o}(\cdot)||d\mu + \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $||f(\cdot)||$ Lebesgue integrable.

Inversamente, supongamos que f es μ-medible. Luego $||f(\cdot)||$ es μ-medible y por el Corolario 1.4, existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones numerablemente valuadas tal que $||(f_n - f)(w)|| < \frac{1}{n}$ para casi todo $w \in \Omega$. Si $||f(\cdot)||$ es Lebesgue integrable se tiene que

$$\int_\Omega ||f_n(\cdot)||d\mu \leq \int_\Omega ||f(\cdot)||d\mu + \frac{\mu(\Omega)}{n} < \infty$$

puesto que $\mu(\Omega)$ es finita.

Para cada entero positivo escribamos

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m}\mathcal{X}_{E_{n,m}}$$

donde $E_{n_i} \cap E_{n_j} = \emptyset$ para $\forall i \neq j$, $E_{n,m} \in \Sigma$, $x_{n,m} \in X$. Para cada $n \in N$, escojamos $p(n)$ de forma que

$$\int_{\bigcup_{m=p(n)+1}^{\infty} E_{n,m}} ||f(\cdot)||d\mu < \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Pongamos

$$g_n = \sum_{m=1}^{p(n)} x_{nm}\mathcal{X}_{E_{nm}}.$$

Cada g_n es una función simple y además

$$\int_\Omega ||(f-g_n)(\cdot)||d\mu \leq \int_\Omega ||(f-f_n)(\cdot)||d\mu + \int_\Omega ||(f_n-g_n)(\cdot)||d\mu \leq \frac{2\mu(\Omega)}{n};$$

lo cual implica que f es Bochner integrable. ■

El Teorema de la convergencia dominada para la integral de Bochner es un simple ejercicio:

Teorema 1.11 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones Bochner integrables tal que f_n converge casi siempre a f y existe $g \in L_1(\mu)$ tal que $||f_n(w)|| \leq g(w)$ para casi todo w en Ω, entonces f es Bochner integrable y para cada $E \in \Sigma$ se tiene que*

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f d\mu.$$

Para estudiar una serie de propiedades de la integral de Bochner, necesarias para el desarrollo de este trabajo es menester una breve introducción a las medidas vectoriales.

Definición 1.12 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de sub-conjuntos de Ω y X un espacio de Banach. Una función $\boldsymbol{\nu}: \mathcal{A} \to X$ es llamada una* **medida vectorial** *si $\boldsymbol{\nu}(A \bigcup B) = \boldsymbol{\nu}(A) + \boldsymbol{\nu}(B)$ siempre que $A \cap B = \emptyset$; $A, B \in \mathcal{A}$. Si $\boldsymbol{\nu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\nu}(E_i)$ en la topología de la norma de X siempre que $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$ y $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, decimos que $\boldsymbol{\nu}$* **es una medida vectorial numerablemente aditiva**.

En su debida oportunidad veremos que la integral de Bochner de una función Bochner integrable es numerablemente aditiva; pero que en el caso de la integral de Gel'fand la aditividad numerable puede fallar.

A continuación introducimos un concepto de gran importancia en el estudio de las medidas vectoriales.

Definición 1.13 *Sea $\boldsymbol{\nu}: \mathcal{A} \to X$ una medida vectorial. La variación de $\boldsymbol{\nu}$ se define como la función de conjuntos*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\nu}|: \mathcal{A} &\to [0, +\infty] \\ E &\to \sup_{\Pi} \sum_{A \in \Pi} ||\boldsymbol{\nu}(A)||, \end{aligned}$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas de Π de E mediante miembros de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos. Si $|\boldsymbol{\nu}|(\Omega) < \infty$, decimos que $|\boldsymbol{\nu}|$ es una medida vectorial de **variación acotada**.

Ejemplos de medidas vectoriales de variación acotada son suministrados por la integral de Bochner; mientras que un ejemplo de medida vectorial de variación no acotada es el siguiente:

Ejemplo 1.14 *Sea Σ el σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue en $[0,1]$ y definamos*

$$\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to L_\infty[0,1]$$

mediante $\boldsymbol{\nu}(E) = \mathcal{X}_E$.

Claramente, $\boldsymbol{\nu}$ es una medida vectorial. Si denotamos por λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y Π_n denota la partición $\{[0, \frac{1}{n}), [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \ldots, (\frac{n-1}{n}, 1]\}$ vemos que

$$\sum_{A \in \Pi_n} ||\boldsymbol{\nu}(A)|| = n;$$

lo cual implica que $\boldsymbol{\nu}$ no es de variación acotada.

En el futuro usaremos el siguiente Teorema.

Teorema 1.15 *Una medida vectorial de variación acotada es numerablemente aditiva si y sólo si lo es su variación.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω, $\boldsymbol{\nu}$ una medida vectorial de variación acotada $|\boldsymbol{\nu}|$ numerablemente aditiva y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Como $||\boldsymbol{\nu}(E)|| \leq |\boldsymbol{\nu}|(E)$ para cada $E \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{\nu}(E) - \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\nu}(E_i)\right\| &= ||\boldsymbol{\nu}(E\setminus \textstyle\bigcup_{i=1}^{n}(E_i)|| \\ &= ||\boldsymbol{\nu}(\textstyle\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i)|| \leq \displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} |\boldsymbol{\nu}|(E_i).\end{aligned}$$

Este último término converge a cero por ser $|\boldsymbol{\nu}|$ acotada y numerablemente aditiva.

Inversamente, sea $\boldsymbol{\nu}: \mathcal{A} \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y de variación acotada. Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$, cuya unión $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$; y Π una partición de E. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\Pi}||\boldsymbol{\nu}(A)|| &= \sum_{A\in\Pi}||\boldsymbol{\nu}(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)|| \\ &= \sum_{A\in\Pi}||\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\nu}(A\cap E_n)|| \leq \sum_{A\in\Pi}\sum_{n=1}^{\infty}||\boldsymbol{\nu}(A\cap E_n)|| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{A\in\Pi}||\boldsymbol{\nu}(A\cap E_n)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\boldsymbol{\nu}|(E_n).\end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier partición Π se concluye que

$$|\boldsymbol{\nu}|(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\boldsymbol{\nu}|(E_n).$$

Si consideramos $E_1 \bigcup E_2$; $\varepsilon > 0$ y Π_1, Π_2 particiones respectivas de E_1 y E_2 tales que

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\nu}|(E_1) &\leq \sum_{A \in \Pi_1} \|\boldsymbol{\nu}(A)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ |\boldsymbol{\nu}|(E_2) &\leq \sum_{B \in \Pi_2} \|\boldsymbol{\nu}(B)\| + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

vemos que

$$|\boldsymbol{\nu}|(E_1) + |\boldsymbol{\nu}|(E_2) \leq |\boldsymbol{\nu}|(E_1 \cup E_2).$$

Puesto que $\Pi_1 \bigcup \Pi_2$ es una partición de $E_1 \bigcup E_2$; y aplicando inducción vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\nu}|(E_i) = |\boldsymbol{\nu}|\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big).$$

Por otra parte, es fácil ver que si A y B son miembros de $\mathcal{A}$ con $A \subset B$, entonces

$$|\boldsymbol{\nu}|(A) \leq |\boldsymbol{\nu}|(B);$$

esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\nu}|(E_i) \leq |\boldsymbol{\nu}|(E);$$

y por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\boldsymbol{\nu}|(E_i) \leq |\boldsymbol{\nu}|(E).$$

Esto termina la demostración. ■

Definición 1.16 *Sean* $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to X$ *una medida vectorial y* $\mu: \Sigma \to [0, +\infty)$ *una medida numerablemente aditiva. Se dice que* $\boldsymbol{\nu}$ *es* **absolutamente continua con respecto a** μ *(en notación* $\boldsymbol{\nu} \ll \mu$*), si* $\lim_{\mu(E)\to 0} \boldsymbol{\nu}(E) = 0$.

La demostración de la siguiente proposición es sencilla y por eso la omitimos.

Proposición 1.17 (Pettis) *Sea* Σ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω, $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to X$ *una medida vectorial numerablemente aditiva y de variación acotada y* $\mu: \Sigma \to [0, +\infty)$ *numerablemente aditiva. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) $\boldsymbol{\nu} \ll \mu$.

ii) $\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nu}(E) = 0$

Es tiempo de retornar a la integral de Bochner.

Teorema 1.18 *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita y* $f: \Omega \to X$ *una función Bochner integrable. Entonces la función* $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to X$ *definida mediante* $\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E f d\mu$ *no es una medida vectorial numerablemente aditiva, absolutamente continua con respecto a* μ *y de variación acotada. Además para cada* $E \in \Sigma$,

$$|\boldsymbol{\nu}|(E) = \int_E ||f(\cdot)|| d\mu.$$

Demostración. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos. Claramente, $\boldsymbol{\nu}$ es finitamente aditiva. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_{E_n} f d\mu \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} ||f(\cdot)|| d\mu,$$

se tiene que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$ es absolutamente convergente. Para chequear el valor del límite observemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^{m} \int_{E_n} f d\mu \right\| &= \left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\| \leq \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} ||f(\cdot)|| d\mu \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_{E_n} ||f(\cdot)|| d\mu;
\end{aligned}$$

que converge a cero si $m \to \infty$. Esto demuestra la aditividad numerable de $\boldsymbol{\nu}$.

La continuidad absoluta es consecuencia de la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue.

Si Π es una partición de un conjunto $E \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\Pi} ||\boldsymbol{\nu}(A)|| &= \sum_{A\in\Pi} || \int_A f d\mu || \\
&\leq \sum_{A\in\Pi} \int_A ||f(\cdot)|| d\mu = \int_{E_n} ||f(\cdot)|| d\mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nu}(E) \leq \int_{E_n} ||f(\cdot)|| d\mu \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nu} \text{ de variación acotada.}$$

Para demostrar el inverso, tomemos $\varepsilon > 0$ y una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||(f - f_n)(\cdot)|| d\mu = 0$$

Fijemos n_0 de forma que $\int_\Omega ||(f - f_{n_0})(\cdot)|| d\mu < \varepsilon$ y seleccionemos una partición Π' de E tal que

$$\sum_{A\in\Pi'} \left\| \int_A f_{n_0} d\mu \right\| = \int_E ||f_{n_0}(\cdot)|| d\mu.$$

Seleccionaremos ahora una partición de Π de E, más fina que Π' tal que

$$|\boldsymbol{\nu}|(E) - \sum_{B\in\Pi}\left\|\int_B f d\mu\right\| < \varepsilon;$$

para esta partición sigue siendo válido que

$$\int_E ||f_{n_0}(\cdot)||d\mu = \sum_{B\in\Pi}\left\|\int_B f_{n_0} d\mu\right\|.$$

Además,

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\Pi}\left|\left\|\int_B f d\mu\right\| - \left\|\int_B f_{n_0} d\mu\right\|\right| & \\ &\leq \sum_{B\in\Pi}\left\|\int_B f d\mu - \int_B f_{n_0} d\mu\right\| \\ &\leq \int_E ||(f - f_{n_0})(\cdot)||d\mu < \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego

$$\left||\boldsymbol{\nu}|(E) - \int_E ||f_{n_0}(\cdot)||d\mu\right| < 2\varepsilon;$$

de donde

$$|\boldsymbol{\nu}|(E) = \lim_{n\to\infty}\int_E ||f_n(\cdot)||d\mu = \int_E ||f(\cdot)||d\mu.$$

■

Corolario 1.19 *Si f y g son funciones Bochner integrables y $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu \ \ \forall E \in \Sigma$, entonces $f = g \ \ \mu.c.s.$*

Demostración. Definamos $\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E (f - g)d\mu$.

Luego,

$$\boldsymbol{\nu}(E) = 0 \quad \forall E \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{\nu}|(E) = 0 \quad \forall E \in \Sigma.$$

$$\Rightarrow \quad \int_E ||(f - g)(\cdot)||d\mu = 0 \quad \forall E \in \Sigma \quad \Rightarrow f = g \ \mu.c.s.$$

■

Teorema 1.20 (Hille) *Sea $f: \Omega \to X$ una función Bochner integrable y $T: X \to Y$ un operador lineal y continuo. Entonces Tf es Bochner integrable y $T(\int_E f d\mu) = \int_E Tf d\mu$, $\forall E \in \Sigma$.*

Demostración. Supongamos que f es una función simple de la forma

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{X}_{A_i}(w).$$

Luego,

$$Tf(w) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\mathcal{X}_{A_i}(w);$$

y por lo tanto Tf es una función simple. Además,

$$T\left(\int_E f d\mu\right) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\mu(E \cap A_i) = \int_E T(f) d\mu;$$

y el resultado es válido para funciones simples.

Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples que converge casi puntualmente a f y $\int_\Omega ||f_n - f|| d\mu$ converge a cero, entonces Tf_n es una sucesión de funciones simples que converge casi puntualmente a Tf y

$$\int_E ||T(f_n - f)(\cdot)|| d\mu \leq \int_E ||T|| \cdot ||(f_n - f)(\cdot)|| d\mu.$$

Como el miembro derecho de la desigualdad precedente converge a cero, tenemos que Tf es Bochner integrable.

Además,

$$\begin{aligned} \int_E T(f) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E T(f_n) d\mu &= \lim_{n\to\infty} T\Big(\int_E f_n d\mu\Big) \\ &= T\Big(\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu\Big) &= T\Big(\int_E f_n d\mu\Big). \end{aligned}$$

■

Corolario 1.21 *Sean f y g funciones μ-medibles con valores en X. Si para cada $x^* \in X^*$, $x^*f = x^*g$ μ.c.s, entonces $f = g$ μ.c.s.*

Demostración. Sea $h(w) = \max\{||g(w)||, ||f(w)||\}$ y pongamos $E_n = \{w: h(w) \leq n\}$. Cada E_n es medible, $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ y sobre cada E_n las funciones f y g son acotadas y por tanto Bochner integrables sobre E_n.

Sea $x^* \in X^*$. Por hipótesis, $x^*f = x^*g$ $\mu.c.s.$ Si E es un conjunto medible contenido en E_n, entonces

$$\int_E x^* f d\mu = \int_E x^* g d\mu.$$

$$\Rightarrow \quad \int_E x^*(f-g)d\mu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^*\Big(\int_E (f-g)d\mu\Big) = 0$$

Como esto es válido para conjunto medible E contenido en E_n y cada $x^* \in X^*$ se tiene que $\int_E (f-g)d\mu = 0$ para cada conjunto medible E contenido en E_n. De esto se deduce que sobre cada E_n, la variación $|\boldsymbol{\nu}|$ de la medida vectorial $\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E (f-g)d\mu$ es identicamente 0; lo cual es posible sólo sí $f - g = 0$ casi siempre sobre E_n. Esto nos permite concluir que $f - g = 0$ casi siempre sobre Ω. ■

Corolario 1.22 *Sea f una función Bochner integrable con respecto a μ. Entonces para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, tenemos que*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in \overline{c_0}(f(E));$$

donde $\overline{c_0}(A)$ denota la clausura de la cápsula convexa de A.

Demostración. Procediendo por contradicción, tenemos que si existe $E \in \Sigma$ tal que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \notin \overline{c_0}(f(E)),$$

entonces, por el Teorema de Hahn-Banach, existen $x^* \in X^*$ y $\alpha \in R$ tales que

$$x^* \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \right) \leq \alpha < x^* f(w) \quad \forall w \in E.$$

Integrando sobre E se obtiene

$$\int_E x^* f d\mu \leq \alpha \mu(E) < \int_E x^* f d\mu,$$

lo cual es una contradicción. ■

El Teorema de diferenciación bajo el signo de la integral es válido para la integral de Bochner.

Teorema 1.23 *Sea f Bochner integrable en $[a,b]$ con respecto a la medida de Lebesgue. Entonces para casi todo $s \in [a,b]$ se tiene que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(t) - f(s)|| dt = 0.$$

En consecuencia, para casi todo $s \in [a,b]$ se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) dt = f(s).$$

Demostración. Sea $N \in \Sigma$ tal que $\overline{f([a,b] \backslash N)}$ es separable y escojamos una sucesión $\{x_n\}$ densa en $\overline{f([a,b] \backslash N)}$. Por el Teorema de diferenciación de Lebesgue, para cada $n \in N$ existe $N_n \in \Sigma$ tal que $\mu(N_n) = 0$ y

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(t) - x_n|| dt = ||f(s) - x_n|| \quad \forall s \in [a,b] \backslash N \bigcup N_n.$$

Sea $N' = N \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n)$. Claramente $\mu(N') = 0$ y si $s \in [a,b] \backslash N'$, entonces

$$\begin{aligned} \limsup_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(t) - f(s)|| dt \quad &\leq \\ \limsup_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(t) - x_n|| dt + ||x_n - f(s)|| \right) \\ = \quad 2||f(s) - x_n|| \qquad \forall n \in N. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y escojamos n de forma que $||f(s) - x_n|| < \frac{\varepsilon}{2}$ para obtener que

$$\limsup_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(t) - f(s)|| dt = 0;$$

lo cual implica que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(s) - f(t)|| dt = 0;$$

lo que demuestra la primera afirmación. La segunda afirmación sigue de la desigualdad

$$\left\| \frac{1}{h} \int_s^{s+h} f(t) dt - f(s) \right\| \leq \frac{1}{h} \int_s^{s+h} ||f(t) - f(s)|| dt.$$

Observación 1.24 Los espacios $L_p(\mu; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ se introducen de la siguiente forma:

Para $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\mu; X)$ si y sólo si f es fuertemente μ-medible y $||f(\cdot)||^p \in L_1(\mu)$. $L_\infty(\mu; X)$ se definen como el conjunto de todos las funciones μ-medible y esencialmente acotados. En cada uno de estos casos $L_p(\mu; X)$ es un espacio vectorial en el que se puede introducir la norma $|| \cdot ||_p$ en forma análoga al caso de funciones escalares. Con esta norma $L_p(\mu; X)$ es un espacio de Banach y su demostración es similar al caso de funciones escalares.

Notas. El material de esta sección es clásico y se encuentra bien estudiado a excepción del punto 1.24, el cual está detallado en Dinculeanu [16], se encuentra en Diestel-Uhl [15] donde se demuestra el Teorema 1.20 en la siguiente forma más general:

Si $T: X \to Y$ es un operador cerrado donde X e Y son espacios de Banach y $f: \Omega \to X$ es una función tal que f y Tf son Bochner integrables con respecto a μ, entonces

$$T\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E T f d\mu \quad \forall E \in \Sigma.$$

El Teorema 1.18 es una simplificación, adaptada a nuestros propósitos, del Teorema I.2.1 de Diestel-Uhl.

2 La Propiedad de Radon-Nikodym.

Definición 2.1 *Se dice que en un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de Radon-Nikodym** *con respecto a una medida finita μ, si toda medida vectorial $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to X$ absolutamente continua con respecto a μ, numerablemente aditiva y de variación acotada, admite una expresión de la forma*

$$\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E g d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$ y alguna función $g \in L_1(\mu; X)$. Un espacio de Banach tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** *si tiene dicha propiedad con respecto a cualquier medida finita y positiva.*

Ejemplo 2.2 c_0 *no posee la propiedad de Radon-Nikodym.*

En efecto, sea $\lambda_n: [0,1] \to R$ definida mediante

$$\lambda_n(E) = \int_E \sin 2^n \pi t dt.$$

Para cada conjunto medible Lebesgue E en $[0,1]$. Por el lema de Rienman Lebesgue se tiene que para cada E medible $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) = 0$; por lo tanto, si Σ denota el σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$, la función de conjuntos $\boldsymbol{\nu}(E) = (\lambda_n(E))_{n=1}^{\infty}$ toma valores en c_0. Claramente $\boldsymbol{\nu}$ es una medida vectorial definida sobre Σ. Además,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\nu}(E)\|_{c_0} &= \sup_n |\textstyle\int_E \sin 2^n \pi t dt| \\ &\leq \sup_n \textstyle\int_E |sen 2^n \pi t| dt \leq \mu(E); \quad \forall E \in \Sigma \end{aligned}$$

donde μ denota medida de Lebesgue en $[0,1]$.

De la expresión $\|\boldsymbol{\nu}(E)\|_{c_0} \leq \mu(E)$ *para cada* $E \in \Sigma$ *se deduce que* $\boldsymbol{\nu} \ll \mu$, *numerablemente aditiva y de variación acotada. Si* c_0 *tiene la propiedad de Radon-Nikodym, existe una función Bochner integrable* $f: [0,1] \to c_0$ *tal que*

$$\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E f d\mu \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Sea $T_n: c_0 \to R$ *definida mediante* $T_n(\alpha) = \alpha_n$, *la n-ésima coordenada en* c_0 *de* $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$. T_n *es lineal y continua y por el Teorema 1.20 se tiene que*

$$\begin{aligned} \lambda_n(E) &= T_n\boldsymbol{\nu}(E) &&= T_n(\textstyle\int_E f d\mu) \\ &= \textstyle\int_E T_n f d\mu &&= \textstyle\int_E f_n d\mu \qquad \forall E \in \Sigma. \end{aligned}$$

lo cual implica que $f_n(t) = sen 2^n \pi t \ \mu - c.s$; *de donde se sigue que* $f(t) \notin c_0 \ \mu - c.s$ *puesto que para cada* $n \in I\!N$,

$$\mu\left(\left\{t: |f_n(t)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right) \leq \frac{3}{4}.$$

Proposición 2.3 *a) La propiedad de Radon-Nikodym es invariante bajo isomorfismo.*

b) Si X *tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces todo subespacio cerrado de* X *tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Demostraremos solamente (b) ya que (a) no presenta grandes dificultades.

Sea Y un subespacio cerrado de X y $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to Y$ una medida vectorial de variación acotada numerablemente aditiva y absolutamente continua con respecto a μ. Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym existe $g \in L_1(\mu; X)$ tal que

$$\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E g d\mu$$

para cada conjunto medible E.

Para cada partición finita Π de Ω mediante conjuntos medibles, disjuntos dos a dos y de medida μ positiva definamos

$$E_\Pi(f) = \sum_{A\in\Pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A; \qquad f \in L_1(\mu; X).$$

$E_\Pi(f)$ es Bochner integrable y además,

$$\begin{aligned} \|E_\Pi(f)\|_1 &= \left\| \sum_{A\in\Pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A \right\|_1 \\ &= \int_\Omega \Big\| \sum_{A\in\Pi} \frac{\int_A f(\cdot) d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A(\cdot) \Big\| d\mu \\ &\leq \int_\Omega \sum_{A\in\Pi} \frac{\| \int_A f(\cdot) d\mu \|}{\mu(A)} \mathcal{X}_A(\cdot) d\mu \\ &\leq \sum_{A\in\Pi} \frac{\int_A \|f(\cdot)\| d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A(\cdot) d\mu \\ &= \int_\Omega \|f(\cdot)\| d\mu \;=\; \|f\|_1. \end{aligned}$$

Además, si el conjunto $P = \{\Pi\}$ de todas las particiones finitas de Ω es dirigido por refinamiento se obtiene que si f es una función simple la red $\{E_\Pi(f)\}$ es eventualmente constante y $E_\Pi(f)$ converge a f en el subespacio denso de las funciones simples y como $\|E_\Pi\| \leq 1$, se sigue que $E_\Pi(f)$ converge a f en $L_1(\mu; X)$. Por lo tanto, existe una sucesión de particiones $\{\Pi_n\}$ tal que $E_{\Pi_n}(g)$ converge a g en $L_1(\mu; X)$.

Pero para cada $n \in I\!N$, tenemos que

$$E_{\Pi_n}(g) = \sum_{A\in\Pi_n} \frac{\int_A g d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A = \sum_{A\in\Pi_n} \frac{\nu(A)}{\mu(A)}.$$

Pero para cada $n \in I\!N$, tenemos que

$$E_{\Pi_n}(g) = \sum_{A \in \Pi_n} \frac{\int_A g d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A = \sum_{A \in \Pi_n} \frac{\boldsymbol{\nu}(A)}{\mu(A)}.$$

En consecuencia, $E_{\Pi_n}(g)(w) \in Y$ $\forall w \in \Omega$; lo cual implica que $g(s) \in Y$ μ.c.s. y por lo tanto Y tiene la propiedad de Radon-Nikodym. ■

De inmediato establecemos un corolario de la proposición precedente:

Corolario 2.4 *Ni ℓ_∞ ni $C_{[0,1]}$ tienen la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Tanto ℓ_∞ como $C_{[0,1]}$ contienen copias isomórficas de c_0. ■

Hasta aquí hemos dado ejemplos de espacios de Banach que no tienen la propiedad de Radon-Nikodym; en lo que resta de esta sección nos dedicaremos a allanar el camino para demostrar un resultado de Dunford y Pettis que afirma que todo espacio de Banach dual separable tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Definición 2.5 *Un operador $T: L_1(\mu) \to X$, lineal y continuo se llama* **representable** *si existe una función $g \in L_\infty(\mu; X)$ tal que*

$$T(f) = \int_\Omega f g d\mu \qquad \forall f \in L_1(\mu).$$

Lema 2.6 *Sea $T: L_1(\mu) \to X$ un operador lineal y acotado y para cada $E \in \Sigma$ definamos $\boldsymbol{\nu}(E) = T(\mathcal{X}_E)$. Entonces T es representable si y sólo si existe $g \in L_1(\mu; X)$ tal que $\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E g d\mu \quad \forall E \in \Sigma$.*

En este caso, la función g pertenece a $L_\infty(\mu; X)$ y $T(f) = \int_\Omega f g d\mu$ $\forall f \in L_1(\mu)$. Además, $||T|| = ||g||_\infty$.

Así,

$$\boldsymbol{\nu}(E) = T(\mathcal{X}_E) = \int_\Omega \mathcal{X}_E g d\mu = \int_E g d\mu \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Esto demuestra la necesidad.

Para demostrar el inverso, sea $\boldsymbol{\nu}(E) = T(\mathcal{X}_E) = \int_E g d\mu$ para alguna $g \in L_1(\mu; X)$ y para todo $E \in \Sigma$. Claramente $\boldsymbol{\nu}$ es medida vectorial numerablemente aditiva y de variación acotada.

Además, para cada $E \in \Sigma$ tenemos

$$\|\boldsymbol{\nu}(E)\| = \|T(\mathcal{X}_E)\| \leq \|T\| \|\mathcal{X}_E\|_1 = \|T\| \mu(E),$$

lo cual implica que la variación $|\boldsymbol{\nu}|$ de $\boldsymbol{\nu}$ satisface la desigualdad

$$|\boldsymbol{\nu}|(E) \leq \|T\| \mu(E) \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Como para cada $E \in \Sigma$,

$$|\boldsymbol{\nu}|(E) = \int_E \|g(\cdot)\| d\mu,$$

podemos concluir que $\|g\|_\infty \leq \|T\|$; y por lo tanto $g \in L_\infty(\mu; X)$.

Por otra parte, si $f \in L_1(\mu)$, entonces

$$\|Tf\| = \| \int_\Omega f g d\mu \| \leq \int_\Omega \|f(\cdot)\| \|g(\cdot)\| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Luego $\|T\| \leq \|g\|_\infty$ y de ello se deduce que $\|T\| = \|g\|_\infty$. ■

Teorema 2.7 *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si todo operador lineal y acotado $T\colon L_1(\mu) \to X$ es representable.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym y sea $T: L_1(\mu) \to X$ un operador lineal y acotado. Definamos $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to X$ mediante $\boldsymbol{\nu}(E) = T(\mathcal{X}_E)$. Como $\|\boldsymbol{\nu}(E)\| \leq \|T\|\mu(E)$, se sigue que $\boldsymbol{\nu}$ es numerablemente aditiva, de variación acotada y absolutamente continua con respecto a μ. Como X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, existe $g \in L_1(\mu; X)$ tal que $\boldsymbol{\nu}(E) = \int_E g d\mu \ \forall E \in \Sigma$ y el lema precedente demuestra la necesidad.

Supongamos ahora que todo operador lineal y acotado $T: L_1(\mu) \to X$ es representable y sea $\boldsymbol{\nu}: \Sigma \to X$ una medida vectorial absolutamente continua con respecto a μ, numerablemente aditiva y de variación acotada; luego la variación $|\boldsymbol{\nu}|$ de $\boldsymbol{\nu}$ tambien es numerablemente aditiva y absolutamente continua con respecto a μ y por el Teorema de Radon-Nikodym para medidas escalares, se tiene que existe $h \in L_1(\mu)$ tal que $|\boldsymbol{\nu}|(E) = \int_E h d\mu \ \ \forall E \in \Sigma$.

Pongamos

$$E_n = \{w \in \Omega: n-1 \leq h(w) < n; \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

La sucesión $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en Σ, sus elementos son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$; y para cada función simple $f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$ definamos el operador

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{\nu}(E_n \cap A_i).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|T_n(f)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{\nu}(E_n \cap A_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| |\boldsymbol{\nu}|(E_n \cap A_i) \ \leq \ \sum_{i=1}^{p} n|\alpha_i| \mu(E_n \cap A_i) \leq n\|f\|_1. \end{aligned}$$

Esto implica que T_n es un operador lineal y continuo sobre el espacio de las funciones simples y por densidad se extiende a un operador lineal y continuo en $L_1(\mu)$. Como por hipótesis este operador es representable, existe $g_n \in L_\infty(\mu; X)$ tal que $T_n(f) = \int_\Omega f g_n d\mu$. Además, si $E \in \Sigma$ entonces

$$\boldsymbol{\nu}(E \cap E_n) = T(\mathcal{X}_E) = \int_E g_n d\mu.$$

Haciendo n recorrer N, obtenemos una sucesión $\{g_n\}$ en $L_\infty(\mu; X)$ tal que

$$\boldsymbol{\nu}(E \cap E_n) = \int_E g_n d\mu \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Definamos $g: \Omega \to X$ mediante $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(w)\mathcal{X}_{E_n}(w)$. Como $\boldsymbol{\nu}$ es numerablemente aditiva y de variación acotada se tiene que

$$\boldsymbol{\nu}(E) = \lim_{m\to\infty} \int_{(E \cap \cup_{n=1}^m E_n)} g d\mu.$$

Ya que

$$\int_{(E \cap \cup_{n=1}^m E_n)} \|g\| d\mu \leq \boldsymbol{\nu}(E)$$

para cada $m \in n \in I\!N$, se sigue por el Teorema de la convergencia monótona que $\|g\| \in L^1(\mu)$; y por el Teorema 1.11

$$\lim_{m\to\infty} \int_{(E \cap \cup_{n=1}^m E_n)} g d\mu = \int_E g d\mu$$

∎

Corolario 2.8 *Sea $X = R$ y μ una medida finita. Entonces el Teorema de Radon-Nikodym y el Teorema de la Representación de Riez que afirma que el dual de $L_1(\mu)$ es $L_\infty(\mu)$ son equivalentes.*

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Dunford-Pettis:

Teorema 2.9 *Todo espacio de Banach dual separable tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach con dual separable X^*; y $T: L_1(\mu) \to X^*$ un operador lineal y continuo. Para cada partición finita Π de Ω, definamos la función

$$g_\Pi(t) = \sum_{A\in\Pi} \frac{T(\mathcal{X}_A)}{\mu(A)}\mathcal{X}_A(t);$$

ya que

$$\|g_\Pi(t)\| \leq \sum_{A\in\Pi} \frac{\|T(\mathcal{X}_A)\|}{\mu(A)}\mathcal{X}_A(t) \leq \|T\|$$

Luego

$$\Rightarrow g_\Pi \in L_\infty(\mu; X^*).$$

Como X^* es separable también lo es X y por lo tanto existe una sucesión $\{x_n\}$ densa en $S(X) = \{X : \|X\| = 1\}$. Para tal sucesión escojamos $g_n \in L_\infty(\mu)$ tal que

$$\langle x_n, T(f)\rangle = \int_\Omega f g_n d\mu.$$

Note que $\forall f \in L^1(\mu; X)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle f x_n, g_\Pi\rangle d\mu &= \int_\Omega f x_n \left(\sum_{A\in\Pi} \frac{T(\mathcal{X}_A)}{\mu(A)}\mathcal{X}_A\right) d\mu \\
&= \int_\Omega f \sum_{A\in\Pi} \frac{x_n T(\mathcal{X}_A)}{\mu(A)}\mathcal{X}_A d\mu \\
&= \int_\Omega f \sum_{A\in\Pi} \frac{\int_A g_n d\mu}{\mu(A)}\mathcal{X}_A d\mu \\
&= \int_\Omega f E_\Pi(g_n) d\mu;
\end{aligned}$$

lo cual implica que $x_n g_\Pi = E_\Pi(g_n)$ para cada partición Π y todo $n \in I\!N$. Como $g_n \in L_\infty(\mu)$ $\forall\, n \in I\!N$, se tiene que $E_\Pi(g_n) \in L_\infty(\mu)$ y si las particiones Π son ordenadas por refinamiento, entonces

$$\lim_{\Pi} \|E_\Pi(g_n) - g_n\|_{L_\infty(\mu)} = 0.$$

Por lo tanto una sucesión $\{\Pi_m\}$ de particiones y un conjunto nulo P tal que para cada $n \in I\!N$,

$$\lim_{m\to\infty} x_n g_{\Pi_m}(w) = g_n(w) \text{ uniformemente en } \quad w \in \Omega \backslash P.$$

Pero $\|g_\Pi(w)\| \leq \|T\|$. Por lo tanto $\{g_{\Pi_m}(w)\}$ es relativamente compacto en X^* con la topología débil *. Definamos $g(w)$ cualquier punto límite de $g_{\Pi_m}(w)$.

Como para cada $n \in I\!N$, $\lim_{m\to\infty} x_n g_{\Pi_m}(w) = g_n$ uniformemente en $w \in \Omega \backslash P$; se tiene que $\lim_{m\to\infty} x_n g_{\Pi_m}(w) = x_n g$ y por lo tanto $x_n g$ es medible.

Obviamente g es separablemente valuada y como $\|g(w)\| = \sup_n |x_n g(w)|$ el corolario 1.6 implica que g fuertemente medible y por ser acotada, g es Bochner integrable y

$$\langle x_n, T(f)\rangle = \int_\Omega f g_n d\mu = \int_\Omega f x_n g d\mu = x_n \int_\Omega f g d\mu \quad n \in I\!N;$$

y de la densidad de $\{x_n\}$ en $S(X)$ se sigue por el teorema 1.20 que $T(f) = \int_\Omega f g d\mu$. Por lo tanto X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym. ■

Corolario 2.10 *Los espacios reflexivos y separables tienen la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Todo espacio reflexivo es isomorfo a su doble dual. ■

Observación 2.11 *En virtud del Teorema 2.9 y su corolario estamos en condiciones de dar algunos ejemplos concretos de espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym:* ℓ_1 *y* $H^p(1 \leq p < \infty)$ *por ser éstos espacios duales separables (para el caso de* H^p *ver ejemplo [21]).*

Notas. En esta segunda sección sigue patente nuestra deuda con la monografía de Diestel-Uhl([15]), donde se da la demostración original del Teorema de Dunford-Pettis [18] y se sugiere la dada por nosostros.

El corolario 2.8 se encuentra demostrado en Kelley [28] y [40], usando una técnica completamente diferente; y los familiarizados con el capítulo IV de la mencionada monografía de Diestel y Uhl, no tendrán problemas en convencerse de la validez de este corolario en el caso en que el espacio de Banach X es auto-dual.

Por su parte el corolario 2.10 es meramente provisional ya que luego veremos (sección 4) que todo espacio de Banach reflexivo tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

3 Integral de Gel'fand y una aplicación a la Teoría de Semigrupos.

En esta sección hacemos un breve estudio de la integral de Gel'fand e ilustramos una aplicación de esta integral en la Teoría de semigrupos de operadores lineales, hecho que amplía rango de aplicabilidad de la Teoría de Medidas Vectoriales; en particular de la Integral de Gel'fand y la propiedad de Radon-Nikodym.

Definición 3.1 *Sea X un espacio de Banach con dual X^*. Una función $f\colon\Omega \to X^*$ se llama* **Gel'fand integrable** *si para cada $x \in X$, la función $g_x\colon\Omega \to \mathbb{C}$ definida mediante $g_x(s) = \langle f(s), x\rangle$, es Lebesgue integrable.*

La existencia de la integral de Gel'fand se establece mediante el siguiente resultado.

Teorema 3.2 (Dunford) *Si $f\colon\Omega \to X^*$ es Gel'fand integrable, entonces dado $E \in \Sigma$, existe $x_E^* \in X^*$ tal que para cada $x \in X$,*

$$x_E^*(x) = \int_E \langle f(s), x\rangle d\mu(s).$$

Demostración. Dado $E \in \Sigma$, definamos el operador $T_E\colon X \to L_1(\mu)$ mediante $T_E(x) = \langle f(s), x\rangle$. Obviamente T_E es un operador lineal. Si $x_n \to x$ y $\lim_{n\to\infty} T_E(x_n) = g \in L_1(\mu)$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $T_E(x_{n_j})$ converge a g μ-casi siempre; y por lo tanto $\langle f(\cdot), x\rangle \mathcal{X}_E = g$ μ-casi siempre; y por el Teorema del Gráfico Cerrado se tiene que T_E es continuo. Por lo tanto, la aplicación $x \to \int_\Omega T_E(x) d\mu$ define un funcional lineal y continuo $x_E^* \in X^*$.

Definición 3.3 *Si $f: \Omega \to X^*$ es Gel'fand integrable y $E \in \Sigma$, el funcional $x_E^* \in X^*$ obtenido mediante el Teorema precedente se llama, por definición,* **la integral de Gel'fand de f** *sobre E y se denota por*

$$x_E^* = G - \int_E f d\mu.$$

Claramente, la integral de Gel'fand como función de conjuntos definida sobre Σ es una medida vectorial finitamente aditiva en la topología de la norma de X^* y numerablemente aditiva en la topología débil* de X^*; sin embargo, esta integral no es en general numerablemente aditiva en la topología de la norma de X^* como lo muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.4 *Sean $\Omega = [0,1], \Sigma$ el σ-álgebra de Borel $[0,1]$ y μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$.*

Definamos $f: [0,1] \to \ell_\infty = \ell_1^*$ mediante la fórmula

$$f(w) = \{\mathcal{X}_{(0,1]}(w), 2\mathcal{X}_{(0,1/2]}(w), \ldots, n\mathcal{X}_{(0,1/n]}(w)\}.$$

Para cada $x = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_1$, la función

$$\langle f(w), x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \mathcal{X}_{(0,1/n]}(w)$$

es Lebesgue integrable y

$$\int_{(0,1]} \langle f(w), x\rangle d\mu = \int_{(0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \mathcal{X}_{(0,1/n]}(w) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n;$$

lo cual implica que f es Gel'fand integrable. Si

$$x_m^* = G \int_{(0,1/m]} f d\mu,$$

entonces

$$\begin{aligned}\langle x_m^*, x\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mu\Big(0,\frac{1}{n}\Big]\cap\Big(0,\frac{1}{m}\Big]\alpha_n.\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{m}\alpha_n+\sum_{n=m}^{\infty}\alpha_n.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$G-\int_{(0,1/m]} f d\mu=\Big(\frac{1}{m},\frac{2}{m},\ldots,\frac{m-1}{m},1,1,\ldots,1,\ldots\Big)$$

lo cual implica que para cada $m\in I\!N$,

$$\Big\|G-\int_{(0,1/m]} f d\mu\Big\|_{\infty}=1.$$

Este hecho es incompatible con la aditividad numerable de la integral en consideración ya que no es difícil demostrar que si ν es una medida vectorial numerablemente aditiva y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles decreciente a Φ, entonces $\nu(E_n)$ converge a cero.

Hasta aquí es suficiente el estudio de la integral de Gel'fand en su propio contexto. La justificación para incluirla en estas exposiciones es ilustrar su aplicación en la Teoría de semigrupos de operadores; pero para ello necesitamos como hecho preliminar, un par de definiciones.

Definición 3.5 *Dados un espacio de Banach X y una familia $\{T_t\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales y acotados en X, la familia $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es llamada un* **semigrupo de operadores en X** *si se satisfacen cada una de las siguientes condiciones:*

i) $T_0x=I(x)\quad\forall x\in X$ (*I denota la identidad en X*)

ii) $T_{s+t}=T_s\circ T_t=T_{tos}\quad\forall s,t\geq 0.$

Definición 3.6 *Si X es un espacio de Banach con dual X^* y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores en X^*, $\{T_t\}$ es llamado* **$\mathbf{w}^*$ continuo en $\mathbf{t_0}$** *si dado $x \in X$, para cada $x^* \in X^*$ se cumple que*

$$\lim_{t\to t_0}\langle T_t x^*, x\rangle = \langle T_{t_0} x^*, x\rangle$$

El siguiente Teorema muestra que en algunos casos la integral de Gel'fand puede ser numerablemente aditiva en la topología de la norma; y en las notas de esta sección pretendemos justificar la inclusión de este resultado.

Teorema 3.7 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores en X^*. Si X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces para cada intervalo compacto $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ y cada $x^* \in X^*$, la función $g_{x^*}\colon [\alpha,\beta] \to X^*$ definida mediante $g_{x^*}(t) = T_t x^*$ es Bochner integrable.*

Demostración. Sean $x^* \in X^*$ y $0 < \alpha < \beta < \infty$. Para cada $x \in X$ la función $\langle g_{x^*}(t), x\rangle = \langle T_t x^*, x\rangle$ es continua en $[\alpha,\beta]$; lo cual implica que para cada $x \in X$ existe una constante M_x tal que $\sup_{t\in[\alpha,\beta]}\langle g_{x^*}(t), x\rangle \leq M_x$; y por el Principio de Acotación Uniforme se tiene que $\sup_{\substack{t\in[\alpha,\beta]\\ x\in X}} \|\langle g_{x^*}(t), x\rangle\| \leq M$ para alguna constante positiva M.

Así, para cada $x \in X, \langle g_{x^*}(\cdot), x\rangle$ es Lebesgue integrable y en consecuencia g_{x^*} es Gel'fand integrable.

Sea $S\colon L_1[\alpha,\beta] \to X^*$ definida mediante

$$Sf = G - \int_\alpha^\beta f(t) g_{x^*}(t)dt.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|Sf\| &= \sup_{\|x\|=1} \left\langle G - \int_\alpha^\beta f(t) g_{x^*}(t) dt, x \right\rangle \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \int_\alpha^\beta |f(t)| |\langle g_{x^*}(t), x\rangle| dt \\
&\leq M \|f\|_1;
\end{aligned}$$

lo cual implica que S es un operador lineal y acotado(entre paréntesis, la linealidad de S es trivial). Como X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym, el Teorema 2.7 implica la existencia de $h \in L^\infty([\alpha, \beta]; X^*)$ tal que

$$S(f) = \int_\alpha^\beta f(t) h(t) dt \qquad \forall f \in L_1[\alpha, \beta].$$

Sean $t \in (\alpha, \beta)$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de forma que $t + \varepsilon \in (\alpha, \beta)$. Pongamos

$$E = [t, t+\varepsilon]; \quad f(s) = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{X}_E.$$

Luego

$$G - \int_\alpha^\beta \frac{1}{\varepsilon} g_{x^*}(s) ds = \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} h(s) ds.$$

Por el Teorema de diferenciación de Lebesgue(Teorema 1.23) se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} h(s) ds = h(t) \;\; \mu - casi\ siempre.$$

Esto implica que para cada $x \in X$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} G - \int_\alpha^\beta \frac{1}{\varepsilon} g_{x^*}(s) ds = h(t) \;\; \mu.c.s;$$

y esto a su vez implica que para cada $x \in X$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \langle g_{x^*}(t), x \rangle ds = \langle h(t), x \rangle \;\; \mu.c.s.$$

Pero $\langle g_{x^*}(\cdot), x\rangle$ es una función continua!. Por lo tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle g_{x^*}(s), x\rangle = \langle g_{x^*}(t), x\rangle$ para todo s en $[t, t+\varepsilon)$ y casi todo t en $[\alpha, \beta]$. Esto implica que $h(t) = g_{x^*}(t)$ μ-casi siempre y por lo tanto g_{x^*} es Bochner integrable en $[\alpha, \beta]$.

■

Corolario 3.8 *Si X es un espacio de Banach tal que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores fuertemente continuos definidos sobre X entonces el semigrupo adjunto $\{T_t^*\}_{t\geq 0}$ es Bochner integrable.*

Demostración. No es difícil percatarse de que $\{T_t^*\}$ es débil* continuo en $(0, +\infty)$. El resto es consecuencia del Teorema 3.7. ■

Notas. Un teorema que se atribuye a Hille afirma que un semigrupo de operadores es fuertemente continuo en $(0, +\infty)$ si y sólo si es Bochner integrable sobre cada intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ contenido en $(0, +\infty)$. En este contexto el Teorema 3.7 junto con el Corolario 3.8, descubierto por Van Neerven en 1990([32]), afirman que si X es tal que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces todo semigrupo fuertemente continuo en X tiene semigrupo adjunto fuertemente continuo en $(0, +\infty)$

Consideramos pertinente mencionar que Bárcenas-Diestel [4], observaron que el Teorema de van Neerven sigue siendo válido para semigrupos de operadores de Asplund; es decir, semigrupos de operadores que se factorizan a través de espacio de Banach cuyo dual tiene la propiedad de Radon-Nikodym; demostrando además la utilidad de tales operadores en la Teoría de Control de Sistemas Lineales.

Pecaríamos de omisión si no recomendaramos el volumen 1529 de LNM escrito por van Neerven [33], donde se hace un estudio bastante amplio.

El ejemplo 3.4 es tomado de Hashimoto-Oharu [23] y constituye el ejemplo mas sencillo de su especie debido al siguiente resultado de Diestel-Faires: de las relaciones entre la Teoría de semigrupos y la Teoría de espacios de Banach.

Si X^* es un espacio dual que no contiene copia de ℓ_∞ entonces toda medida vectorial con valores en X^* y débil*- numerablemente aditiva sobre un σ-álgebra es numerablemente aditiva en la topología de la norma de X^*.

4 Equivalencia entre la propiedad de Radon-Nikodym y convergencia de Martingalas

En esta sección nos disponemos a hacer un breve estudio de la Teoría de Martingalas en espacios de Banach y las relaciones entre la propiedad de Radon-Nikodym y los Teoremas clásicos de convergencia de Martingala. Como habría de esperarse, debemos comenzar con el concepto de esperanza condicional.

Definición 4.1 *Sean* (Ω, Σ, μ) *un espacio de probabilidad,* Σ_1 *un sub-álgebra de* Σ *y* $f \in L_1(\mu; X)$. *Una función* $g \in L_1(\mu; X)$ *se llama la* **esperanza condicional de f dado Σ_1**, *si* g *es* Σ_1*-medible y* $\int_E g d\mu = \int_E f d\mu \;\; \forall E \in \Sigma_1$. *En este caso la función* g *se denota por* $E(f|\Sigma_1)$.

Si $X = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la esperanza condicional satisface cada una de las propiedades que se enumeran a continuación:

Teorema 4.2 *Sea* $E(\cdot, \Sigma_1): L_1(\mu) \to L_1(\mu)$

$$f \to E(f, \Sigma_1).$$

Entonces,

i) $f \geq 0 \;\Rightarrow\; E(f|\Sigma_1) \geq 0$

ii) $E(c, \Sigma_1) = c$ *para toda constante* c.

iii) $E(E(f|\Sigma_1)|\Sigma_1) = E(f|\Sigma_1) \quad \forall f \in L_1(\mu)$

iv) El rango de $E(\cdot|\Sigma_1)$ *es el subespacio cerrado de* $L_1(\mu)$ *consistente de todas las funciones* Σ_1*-medibles e integrables.*

v) $E(\cdot|\Sigma_1)$ *es un operador acotado de norma 1.*

La demostración es muy conocida.

El siguiente teorema es una grata sorpresa para los estudiosos del tema.

Teorema 4.3 *Sean X un espacio de Banach, (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad, Σ_1 un sub-σ-álgebra de Σ y $f \in L_1(\mu; X)$. Entonces $E(f|\Sigma_1)$ existe y*

$$\|E(f|\Sigma_1)\|_1 \leq \|f\|_1$$

Demostración. Si $X = R, E(f|\Sigma_1)$ existe gracias al Teorema de Radon-Nikodym. Si f es una función simple de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{X}_{E_i},$$

entonces $E(\mathcal{X}_{E_i}|\Sigma_1)$ existe para cada $i = 1, \ldots, n$ y en ese caso tenemos que

$$E(f|\Sigma_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(\mathcal{X}_{E_i}|\Sigma_1).$$

Claramente, $E(f|\Sigma_1)$ es lineal sobre el subespacio de las funciones simples. Además, si $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{X}_{E_i}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|E(f|\Sigma_1)\|_1 &= \int_\Omega \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{X}_{E_i}|\Sigma_1)\Big\| d\mu \\
&\leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| E(\mathcal{X}_{E_i}|\Sigma_1) d\mu \\
&= \int_\Omega E\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \mathcal{X}_{E_i}|\Sigma_1\right) d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|\mathcal{X}_{E_i}\|_1 \;=\; \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Pero el conjunto de las funciones simples es denso en $L_1(\mu; X)$. Luego el operador de esperanza condicional admite una única extensión lineal y continua $E(\cdot|\Sigma_1)$ a $L_1(\mu; X)$.

Sólo falta chequear que

$$\int_E E(f|\Sigma_1)d\mu = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \Sigma_1.$$

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones simples convergente a f en la norma de $L_1(\mu; X)$, de la continuidad y linealidad de $E(\cdot|\Sigma_1)$ se deduce que

$$\|E(f_n - f)\| \qquad \text{converge a cero.}$$

Esto termina la demostración. ■

En el estudio de la propiedad de Radon-Nikodym, hemos trabajado informalmente un caso especial de esperanza condicional cual es el siguiente.

Ejemplo 4.4 *Sea Π una partición finita de Ω mediante conjuntos de medida positiva y Σ_Π el σ-álgebra generado por Π. No es difícil chequear que si $f \in L^1(\mu; X)$, entonces*

$$E(f|B_\Pi) = \sum_{A \in \Pi} \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} \mathcal{X}_A$$

es un operador de esperanza condicional.

Ahora introduciremos el concepto mas importante de la presente sección.

Definición 4.5 *Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido y $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in I}$ una red creciente de sub-σ-álgebras de Σ. Una red $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones μ-medible se llama una* **martingala** *si para cada $i \in I$, f_i es $\mathcal{B}_i$ medible y*

$$E(f_{i_2}|\mathcal{B}_{i_2}) = f_{i_1} \quad \textit{siempre que} \quad i_1 \leq i_2.$$

Denotaremos las martingalas por $(f_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ o $(f_i)_{i\in I}$.

Ejemplo 4.6 *Sean $f \in L_1(\mu; X)$ y $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ una red creciente de sub-σ-álgebras de Σ. Entonces $(f_i)_{i\in I} = E(f|\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ es una martingala.*

Proposición 4.7 *Sean $(f_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ una martingala en $L_1(\mu; X)$ y $\mathcal{B}$ el σ-álgebra generado por $\cup_{i\in I}\mathcal{B}_i$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) $\{f_i\}_{i\in I}$ es convergente en $L_1(\mu; X)$ a f_∞.

ii) Existe $f \in L_1(\mu; X)$ tal que $f_i = E(f|\mathcal{B}_i)$.

Además, si (i) y (ii) son válidas, entonces $E(f|\mathcal{B}) = f_\infty$ para toda función f que satisfaga (ii).

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ convergente a f_∞ en la norma de $L_1(\mu; X)$ y fijemos $i_0 \in I$ y $E \in \mathcal{B}_{i_0}$. De la definición de martingala se sigue que

$$\int_E f_i d\mu = \int_E f_{i_0} d\mu \quad \forall i \geq i_0;$$

lo cual implica que $\{\int_E f_i\}_{i\geq i_0}$ es constante.

Como f_i converge a f_∞ en la norma $L_1(\mu; X)$ se tiene que $\int_E f_i d\mu$ converge a $\int_E f_\infty d\mu$; de lo cual se obtiene que $\int_E f_{i_0} d\mu = \int_E f_\infty d\mu$.

Como $i_0 \in I$ y $E \in \mathcal{B}_{i_0}$ fueron escogidos en forma arbitraria, se concluye que

$$f_i = E(f_\infty|\mathcal{B}_i).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $f_i = E(f|\mathcal{B}_i)$ para cada $i \in I$ y alguna función $f \in L_1(\mu; X)$. Pongamos $f_\infty = E(f|\mathcal{B})$. Entonces $f_i = E(f_\infty|\mathcal{B}_i)$.

Sea g una función simple de la forma

$$g = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{X}_{E_j}; \qquad E_j \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$$

Luego, existe $i_0 \in I$ tal que $E_j \in B_{i_0}$ $\forall i = 1, \ldots, n$; por lo tanto $E(g|\mathcal{B}_i) = g$ $\forall i \geq i_0$; y de esto se deduce que $E(g|\mathcal{B}_i)$ converge a g para cualquier función simple g con valores en $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$

Como las funciones simples en $\cup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ son densas en el subespacio cerrado de $L_1(\mu; X)$ formado por las funciones medibles, y los operadores $E(\cdot|\mathcal{B}_i)$ tienen norma 1, se deduce que $f_i = E(f_\infty|\mathcal{B}_i)$ converge a ∞. ■

El siguiente ejemplo de martingala nos será útil en la demostración del resultado central de esta sección.

Ejemplo 4.8 *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $\nu: \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva y de variación acotada; y sea P la familia de todas las particiones finitas de Π de Ω mediante conjuntos de medida positiva. Para cada $\Pi \in P$ definamos*

$$f_\Pi(w) = \sum_{A \in \Pi} \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \mathcal{X}_A(w)$$

Si $\{\Sigma_\Pi\}$ es el σ-álgebra generado por Π y los miembros de P son ordenados por refinamiento, entonces $(f_\Pi, \Sigma_\Pi)_{\Pi \in P}$ es una martingala.

Proposición 4.9 *Sea $\nu: \Sigma \to X$ medida vectorial μ-continua y de variación acotada. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) Existe $f \in L_1(\mu; X)$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $\forall E \in \Sigma$

ii) $\{f_\Pi\}_{\Pi \in P}$ es convergente en $L_1(\mu; X)$.

Demostración. Es aplicación directa de la proposición 4.7 ya que (ii) equivale a $F_\Pi = E(f|\Sigma_\Pi)$, para cada $\Pi \in P$. ■

Definición 4.10 *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de probabilidad. Un sub-conjunto* $K \subset L_1(\mu; X)$ *es* **uniformemente integrable** *si y sólo si,*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in K} \int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu = 0.$$

La integrabilidad uniforme es caracterizada por el siguiente teorema.

Teorema 4.11 *Un sub-conjunto* K *de* $L_1(\mu; X)$ *es uniformemente integrable si y sólo si* K *es acotado y dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para cualquier* $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E \|f(\cdot)\| d\mu \leq \varepsilon \qquad \forall f \in K.$$

Demostración. Sean K uniformemente integrable. Luego para cada $c > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_E \|f(\cdot)\| d\mu &= \int_{E\cap\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu + \int_{E\cap\{\|f(\cdot)\|\leq c\}} \|f(\cdot)\| d\mu \\ &\leq \int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu + \int_E c d\mu \\ &= \int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu + c\mu(E) \end{aligned}$$

En particular, si $E = \Omega$ se tiene que

$$\|f\|_1 \leq c + \int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} |f(\cdot)\| d\mu.$$

Si escogemos c de la forma que $\int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu \leq 1$, uniformemente en K, vemos que K es acotado.

Dado $\varepsilon > 0$, escojamos c de forma que

$$\int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall f \in K.$$

Si $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$, entonces si $\mu(E) < \delta$, se tiene que

$$\int_E \|f(\cdot)\| d\mu \leq c\mu(E) + \int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} |f(\cdot)\| d\mu < \varepsilon \qquad \forall f \in K.$$

Inversamente, si K es acotado y para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E \|f(\cdot)\| d\mu < \varepsilon \ \ \forall f \in K,$$

entonces para cualquier $c > 0$, tenemos que

$$c\mathcal{X}_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \leq \|f(\cdot)\| \mathcal{X}_{\{\|f(\cdot)\|>c\}}.$$

Por lo tanto,

$$c\mu\{\|f(\cdot)\| > c\} \leq \int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu \leq \|f\|_1.$$

Sea $M = \sup\{\|f\|_1 : f \in K\}$. De la desigualdad precedente se sigue que

$$\mu\{\|f(\cdot)\| > c\} \leq \frac{M}{c}.$$

Si escogemos c de forma que $\frac{M}{c} < \delta$, se tiene que

$$\mu\{\|f(\cdot)\| > c\} < \delta.$$

y por lo tanto

$$\int_{\{\|f(\cdot)\|>c\}} \|f(\cdot)\| d\mu < \varepsilon \qquad \forall f \in K.$$

lo cual demuestra que K es uniformemente integrable. ∎

Teorema 4.12 *Para un espacio de Banach X, son equivalentes:*

i) X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

ii) Toda martingala uniformemente integrable en $L_1(\mu; X)$ es convergente en la norma de $L_1(\mu; X)$.

iii) Toda martingala uniformemente acotada en $L_1(\mu; X)$ es convergente en la norma de $L_1(\mu; X)$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $(f_n, \mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala uniformemente integrable en $L_1(\mu; X)$. Pongamos $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Por definición de martingala, $\nu(A)$ existe para cada $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$. Sea $\mathcal{B}$ el σ-álgebra generado por $\{\mathcal{B}_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$ y $E \in \mathcal{B}$, escojamos $\delta > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ y $E_0 \in \mathcal{B}_{n_0}$ tal que $\mu(E\triangle E_0) < \delta$ y $\int_{E\triangle E_0} \|f_n(\cdot)\| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. De la definición de martingala resulta que $\forall m, n \geq n_0$

$$\left\| \int_E f_n d\mu - \int_E f_m d\mu \right\| < \int_{E\triangle E_0} \|f_n(\cdot)\| d\mu + \int_{E\triangle E_0} \|f_m(\cdot)\| d\mu < \varepsilon;$$

lo cual implica que $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$ existe para cada $E \in \mathcal{B}$. Claramente ν es finitamente aditiva en $\mathcal{B}$. Si $\{E_n\} \subset \mathcal{B}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, de la finitud de μ junto con la integrabilidad uniforme de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se concluye que ν es numerablemente aditiva y μ-continua. Sea $\{E_1, \ldots, E_k\}$ una partición de Ω mediante elementos de $\mathcal{B}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \|\nu(E_i)\| &= \lim_{n\to\infty} \| \int_{E_i} f_n d\mu \| \\ &\leq \sup_n \sum_{i=1}^{k} \| \int_{E_i} f_n d\mu \| \end{aligned}$$

$$\leq \quad c\mu(E) + \sup_n \int_{\{\|f_n\|>c\}} \|f_n\| d\mu$$

$$< \quad c\mu(E) + 1, \quad \text{para } c \text{ grande}$$

Como X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, existe $f \in L_1(\mu; X)$ tal que $\nu(A) = \int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$; y la proposición 4.7 implica que $E(f|\mathcal{B}_n) = f_n$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ evidente

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $\nu: \Sigma \to X$ una medida vectorial de variación acotada y absolutamente continua con respecto a μ. Del Teorema 1.15 y la proposición 1.17 resulta que $|\nu|$ es numerablemente aditiva y absolutamente continua con respecto a μ. Por otra parte, es claro que $\nu \ll |\nu|$; puesto que para cada conjunto medible E, $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$.

Tomando en cuenta que iii, implica la convergencia en $\|\cdot\|_1$ para toda martingala inducida en un conjunto dirigido I, consideramos $\{\Pi\} = P$ el conjunto de todas las particiones de Ω ordenadas por refinamiento y consideremos la martingala

$$f_\Pi(w) = \sum_{A\in\Sigma} \frac{\nu(A)}{|\nu|(A)} \mathcal{X}_A(w).$$

Para cada $w \in \Omega$, y cada $\Pi \in P$,

$$\|f_\Pi\| = \sum_{A\in\Pi} \frac{\|\nu(A)\|}{|\nu|(A)} \mathcal{X}_A(w) \leq 1;$$

lo cual implica que $\{f_\Pi\}_{\Pi\in P}$ es uniformemente acotada y por lo tanto existe $f \in L_1(|\nu|, X)$ tal que
$\|f_\Pi - f\|_{L_1(|\nu|)} \to 0 \Rightarrow$ (Proposición 4.9) $\quad \nu(E) = \int_E f d|\nu| \quad \forall E \in \Sigma$.

Ahora bien, $|\nu|$ es finita, numerablemente aditiva y $|\nu| \ll \mu$; y así del Teorema clásico de Radon-Nikodym se sigue que existe $\varphi \in L_1(\mu)$ tal que

$$|\nu|(E) = \int_E \varphi d\mu \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Sea $g\colon \Omega \to X$ definida por $g(w) = \varphi(w)f(w)$. No es difícil ver que $g \in L_1(\mu; X)$ y $\nu(E) = \int_E g d\mu$ $\forall E \in \Sigma$. Es decir, X tiene la propiedad de Radon-Nikodym. ■

La caracterización de espacios de Banach con la propiedad de Radon--Nikodym, abre un abanico de posibilidades en aplicaciones que tendremos oportunidad de estudiar en secciones siguientes. Para dar una idea de tales aplicaciones, veamos un par de ellas (Teoremas 4.13 y 4.19).

Teorema 4.13 (Uhl) *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si todo subespacio cerrado y separable de X tiene dicha propiedad.*

Demostración. En vista de 2.3 b, sólo hace falta demostrar el inverso. Con este objeto, supongamos que $\{f_n|\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala uniformemente integrable en X. Con ayuda del Teorema 1.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar $N_n \in \Sigma$ con $\mu(N_n) = 0$ y $f_n(\Omega\backslash N_n)$ separable. Sea Z el subespacio cerrado de X generado por $\bigcup_{w\in\Omega} f_n(\Omega\backslash N_n)$. Z es separable y por hipótesis tiene la propiedad de Radon-Nikodym. En consecuencia, existe $f\colon \Omega \to Z \subset X$ tal que $\|f_n - f\|_1 \to 0$; lo cual implica que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Corolario 4.14 (Phillips) *Los espacios de Banach reflexivos tienen la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Todo subespacio separable de un espacio reflexivo, es reflexivo y separable y el resultado se sigue de 4.13

El corolario precedente admite una ligera generalización debida a Uhl.

Corolario 4.15 *Si todo subespacio separable de X es isomórfico a un subespacio de un dual separable, entonces X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

El siguiente corolario justifica la presencia de 4.15

Corolario 4.16 *Si todo subespacio separable de X tiene dual separable, entonces X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Sea M un subespacio separable de X^* y $\{x_m^*\}$ un subconjunto denso y numerable de M. Seleccionamos sucesiones $\{x_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $\|x_{m,n}\| = 1$ y

$$\|x_m^*(x_{m,n})\| \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x_m^*\|.$$

Sea Y el subespacio cerrado generado por $\{x_{m,n}; m, n \in I\!N\}$. Y es separable en X y por hipótesis Y^* es separable.

Sea $T: M \to Y^*$ definido por $T(x^*)(y) = (x^*)(y) \quad \forall y \in Y$ $\|T\| \leq 1$ y además,

$$\|Tx_m^*\| \geq \sup_n |x_m^*(x_{m,n})| = \|x_m^*\|.$$

Así, T es una isometría de M en Y. Como Y^* es separable, el Teorema de Dunford Pettis muestra que Y^* y, por lo tanto $T(M)$, tiene la propiedad de Radon-Nikodym. En consecuencia, M tiene la propiedad de Radon-Nikodym, por ser ésta invariante bajo isomorfismo y el Teorema 4.13 implica que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Definición 4.17 *Sea X un espacio de Banach. Un* **árbol infinito en X** *es una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que para cada $n \geq 1, x_n = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1})$*

Definición 4.18 *Sea $\delta > 0$. Un árbol infinito en X es llamado un* **δ-árbol** *si para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|x_n - x_{2n}\| \geq \delta$ y $\|x_n - x_{2n+1}\| \geq \delta$.*

El siguiente teorema puede servir de epílogo a esta sección y prólogo de la siguiente.

Teorema 4.19 *Dados un espacio de Banach X con la propiedad de Radon-Nikodym y $\delta > 0$, es imposible encontrar en X un δ-árbol infinito y acotado.*

Demostración. Sea μ la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y supongamos que, para algún $\delta > 0$, $J = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es un δ-árbol en X; infinito y acotado. Definamos la sucesión de funciones medibles

$$f_1 = x_1 \mathcal{X}_{[0,1)}, \qquad f_2 = x_2 \mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})} + x_3 \mathcal{X}_{[\frac{1}{2},1)}$$

$$f_k = \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k - 1} x_i \mathcal{X}_{I_{k,i}}$$

donde

$$I_{k,i} = \left[\frac{i - 2^{k-1}}{2^{k-1}}, \frac{i - 2^{k-1} + 1}{2^{k-1}} \right);$$

e i recorre el conjunto de índices

$$\{2^{k-1}, 2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k - 1\}.$$

Si Σ_k es el σ-álgebra generado por los intervalos $\{I_{k,i}\}$, entonces la sucesión (f_k, Σ_k) es una martingala uniformemente acotada en X.

Si $t \in [0,1)$ y I_{ki} es tal que $t \in I_{ki}$, entonces $f_k(t) = x_i$ mientras que $f_{k+1}(t) = x_{2i}$ o bien $f_{k+1}(t) = x_{2i+1}$.

En cualquier caso, tomando en cuenta que $\{x_k\}$ es un δ-árbol, resulta que para cada $t \in [0,1]$, $\|f_k(t) - f_{k+1}(t)\| \geq \delta$ para cada $k \in \mathbb{N}$; y en consecuencia $\|f_k - f_{k+1}\|_1 \geq \delta$. Así $\{f_k\}$ no es convergente en $L_1(\mu; X)$; lo cual es equivalente a que X no posee la propiedad de Radon-Nikodym. ∎

Como consecuencia inmediata se obtiene lo siguiente.

Corolario 4.20 $L_1[0,1]$ *no posee la propiedad de Radon-Nikodym.*

Demostración. Sea $\{\Sigma_k\}$ la sucesión de σ-álgebras construida en la demostración del Teorema precedente y definamos

$$x_1 = \mathcal{X}_{[0,1)}, \quad x_2 = 2\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})}, \quad x_3 = 2\mathcal{X}_{[\frac{1}{2},1)}$$

y en general,

$$x_i = 2^{k-1}\mathcal{X}_{I_{ki}};$$

donde I_{ki} son los intervalos que generan el σ-álgebra de Σ_k.

Note que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \int_{[0,1)} |\mathcal{X}_{[0,1)} - 2\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})}| d\mu = 1 \\ &= \|x_1 - x_3\|; \end{aligned}$$

y en general se tiene que $\|x_n - x_{2n}\| = \|x_n - x_{2n+1}\| = 1$; lo cual implica que $L_1[0,1]$ contiene en 1-árbol infinito y acotado. En el lenguage del Teorema precedente, $L_1[0,1]$ no posee la propiedad de Radon-Nikodym.

Notas. Además del interés que posee por sí misma, la caracterización de la propiedad de Radon-Nikodym mediante Teoremas de Convergencia de martingalas abre una posibilidad para el estudio de algunos aspectos geométricos de los espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym como veremos en las próximas secciones. Una forma geométrica de la propiedad de Radon-Nikodym ha surgido en el Teorema 4.19 y durante cierto tiempo estuvo abierta la pregunta de si tal Teorema no era si y sólo si. Desde 1980 se sabe que la respuesta es negativa ya que para esa fecha Bourgain y Rosenthal [7] construyeron un subespacio X de $L_1[0,1]$ que no posee la propiedad de Radon-Nikodym ni δ-árbol acotado, cualquiera que sea $\delta > 0$. Sin embargo, como veremos en la próxima sección, la presencia de δ-arbustos en espacios de Banach caracteriza aquellos espacios que no poseen la propiedad de Radon-Nikodym.

El inverso del corolario 4.16 también es cierto y la demostración se debe a Stegall [41]. Este resultado no será usado en estas páginas y si aparece la demostración completa de 4.16, es tan sólo para ilustrar el poder de las técnicas de Martingalas en espacios de Banach; para lo cual [ ] constituye una buena referencia.

La propiedad de Radon-Nikodym también puede caracterizarse, en el contexto del Teorema 4.12, sustituyendo martingalas en el sentido clásico por martingalas de multifunciones medibles para espacios separables. La mayoría de los resultados de este trabajo se encuentran en Chatterji [10] y Diestel-Uhl [15].

5 Dentabilidad

Hemos visto en la sección anterior que si un espacio de Banach contiene un δ-árbol infinito y acotado, para algún $\delta > 0$, entonces tal espacio carece de la propiedad de Radon-Nikodym. También hemos mencionado la existencia de espacios de Banach sin δ-árboles infinitos y acotados que tampoco poseen la propiedad de Radon-Nikodym. En esta sección introduciremos un concepto menos restrictivo que el de δ-árbol-nos referimos al concepto de arbusto-y demostraremos que su ausencia en un espacio de Banach, es una condición necesaria y suficiente para que dicho espacio posea la propiedad de Radon-Nikodym. Para ello necesitamos el concepto de dentabilidad; un concepto que, gracias a la Teoría de Martigalas emerge como una caracterización geométrica de la propiedad de Radon-Nikodym; y nos allanará el camino para el estudio de las secciones siguientes. Comencemos:

Definición 5.1 *Dado un espacio de Banach X y $\varepsilon > 0$, un* **arbusto en X de separación ε**, *es un sub-conjunto B de X, parcialmente ordenado tal que*

i) B contiene primer elemento x_1.

ii) Cada elemento de B tiene un número finito de sucesores inmediatos, por lo menos dos sucesores inmediatos.

iii) Todo elemento de B se puede unir a x_1 mediante una cadena.

iv) Dado $x \in B$, x es combinación convexa de sus sucesores.

v) Si $x \in B$ y y es sucesor de x, entonces $\|x - y\| \geq \varepsilon$.

Para proceder a la caracterización mencionada al comienzo de esta sección, necesitamos los conceptos geométricos de dentabilidad y σ-dentabilidad y después de estudiar algunas de sus propiedades–elementales pero básicas-procederemos a nuestra anunciada caracterización. En realidad, ésta consistirá en una cadena de equivalencias que involucran los conceptos antes mencionados.

Definición 5.2 *Un sub-conjunto D de un espacio de Banach X se llama* **dentable** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in D$ tal que $x_\varepsilon \notin \overline{c}_0(D \backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon))$; donde $\overline{c}_0(A)$ denota la clausura de la cápsula convexa de A y $B_\varepsilon(x)$ la bola de centro x y radio ε.*

La siguiente proposición será usada en el Teorema principal de esta sección.

Proposición 5.3 *Si $\overline{c}_0(D)$ es dentable, entonces D es dentable.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \overline{c}_0(D)$ tal que $x \notin \overline{c}_0(\overline{c}_0(D) \backslash B_{\varepsilon/2}(x))$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ tal que

$$\sup x^*(\overline{c}_0(\overline{c}_0(D) \backslash B_{\varepsilon/2}(x)) = \alpha < \langle x, x^* \rangle.$$

Pongamos

$$H = \{y \in X : \langle y, x^* \rangle > \alpha\}.$$

Como $\sup x^*(D) = \sup x^* \overline{c}_0(D)$, resulta que $D \cap H \neq \emptyset$. Sea $d \in H \cap D$. Luego $d \notin (\overline{c}_0(D) \backslash B_{\varepsilon/2}(x))$; y como $d \in D$ se tiene que $d \in B_{\varepsilon/2}(x)$. En consecuencia, $B_\varepsilon(d) \supset D \backslash B_{\varepsilon/2}(x)$.

Así,

$$D \backslash B_{\varepsilon/2}(x) \supset D \backslash B_\varepsilon(d),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\sup x^*\overline{c}_0(D\backslash B_\varepsilon(d)) &= \sup x^*(D\backslash B_\varepsilon(d)) \\
&\leq \sup x^*(D\backslash B_{\varepsilon/2}(x)) \\
&\leq \sup x^*\overline{c}_0(D\backslash B_{\varepsilon/2}(x)) = \alpha < x^*(d) \\
\Rightarrow d \notin \overline{c}_0(D\backslash B_\varepsilon(d)) &\Rightarrow D \text{ es dentable.}
\end{aligned}$$

■

Otras propiedades de los conjuntos dentables son los siguientes:

Proposición 5.4 *a) Si A y B son sub-conjuntos de X y $A+B$ es dentable, también lo son A y B.*

b) Si $T: X \to Y$ es un isomorfismo topológico entre los espacios de Banach X e Y y $A \subset X$ es dentable entonces $T(A)$ es dentable.

Demostración. *a*) Sea $\varepsilon > 0$ y $a + b \in A + B$ con $a \in A$ y $b \in B$ tal que $a + b \notin \overline{c}_0(A + B\backslash B_\varepsilon(a + b))$. Supongamos que $a \in \overline{c}_0(A\backslash B_\varepsilon(a))$. Entonces, dado $\delta > 0$, existen $a_i \in A$, $\alpha_i > 0$ $1 \leq i \leq n$ tales que

$$\sum \alpha_i = 1, \qquad \|a - a_i\| \geq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|a - \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\| < \delta.$$

Por lo tanto

$$\left\|(a+b) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(a_i + b)\right\| < \delta,$$

$\|(a + b) - a_i + b\| > \varepsilon$ y $a_i + b \in A + B$; lo cual implica que $a + b \in \overline{c}_0(A + B\backslash B_\varepsilon(a + b))$, en contra de lo supuesto.

b) Sea A dentable y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $x \in A$ tal que

$$x \notin \overline{c}_0(A\backslash B_{\frac{\varepsilon}{\|T\|}}(x)).$$

Como

$$T\left(B_{\frac{\varepsilon}{\|T\|}}(x)\right) \subset B_\varepsilon(T(x))$$

se tiene que

$$\begin{aligned} T(x) \notin T\Big(\overline{c}_0\Big(A\backslash B_{\frac{\varepsilon}{\|T\|}}(x)\Big) &= \overline{c}_0\Big(T(A\backslash B_{\frac{\varepsilon}{\|T\|}}(x))\Big) \\ \supset \overline{c}_0(T(A)\backslash B_\varepsilon(T(x))) &\Rightarrow T(x) \notin \overline{c}_0(T(A)\backslash B_\varepsilon(T(x))) \end{aligned}$$

Es decir, $T(A)$ es dentable ∎

El siguiente concepto (de σ-dentabilidad) es más débil que el de dentabilidad, pero equivale a éste sobre conjuntos cerrados y acotados en espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym.

Si $D \subset X$, $\sigma(D)$ designa

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \quad \lambda_n > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1;\ x_n \in D\right\}$$

Definición 5.5 *Un sub-conjunto $D \subset X$ es* **σ-dentable** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in D$ tal que $x_\varepsilon \notin \sigma(D\backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon))$.*

Proposición 5.6 *Todo conjunto dentable es σ-dentable.*

Demostración. Supongamos que D no es σ-dentable. Entonces para cada $x \in D$ y algún $\varepsilon > 0$, existen $\{x_n\} \subset D$ y $\{\lambda_n\}$ tales que $\|x - x_n\| \geq \varepsilon, \lambda_n \geq 0, \Sigma\lambda_n = 1$ y $x = \Sigma\lambda_n x_n$. De la última igualdad se deduce que

$$\langle x, x^* \rangle \leq \sup\{\langle y, x^* \rangle;\ y \in D\backslash B_\varepsilon(x)\}$$

para cada $x^* \in X^*$ según el Teorema de Hahn-Banach se tiene $x \in \overline{c}_0(D\backslash B_\varepsilon(x))$. Esto implica que D no es dentable puesto que ε es arbitrario.

∎

Ejemplo 5.7 *La bola unitaria de $C_{[0,1]}$ es σ-dentable pero no dentable.*

En efecto; supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f \equiv 1 \in \sigma(B_{C_{[0,1]}} \backslash B_\varepsilon(1))$. Entonces existe $f_n \subset B_{C_{[0,1]}}$ con $\|f_n - 1\| \geq \varepsilon$ y $1 \equiv \sum \lambda_n f_n$ con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1 \quad \lambda_n > 0 \qquad \forall y \in I\!N.$$

Esto implica que

$$1 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f_n(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in [0,1],$$

lo cual implica que $f_n \equiv 1 \;\; \forall n \in I\!N$ en contradicción con lo supuesto. Es decir, $B_{C_{[0,1]}}$ es dentable.

Por otra parte, sea $f \in B_{C_{[0,1]}}$. Si $n \in I\!N$ construyamos f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $f_i \in B_{C_{[0,1]}}$ de forma que $f_i(t) = f(t)$ si $t \in [\frac{i-1}{1}, \frac{1}{n}]$,

$$\|f - f_i\| > \frac{1}{2} \quad y \quad \left\|f - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_i\right\| < \frac{2}{n}.$$

De esto se concluye que $B_{C_{[0,1]}}$ no es dentable.

Aun necesitamos de algunos conocimientos previos para abordar el resultado principal de esta sección.

Definición 5.8 *Sean ν una medida vectorial con valores en X y μ una medida escalar. Para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, decimos que A es* **(x, ε) puro** *si para cada $B \subset A$ con $\mu(B) > 0$, $\left\|\frac{\nu(B)}{\mu(B)} - x\right\| < \varepsilon$.*

El conjunto A es llamado **ε puro** *si es (x, ε) puro para algún $x \in X$.*

En el siguiente lema, $AR(\nu)$ denota

$$\left\{\frac{\nu(A)}{\mu(A)} : A \in \Sigma, \;\; \mu(A) > 0\right\}$$

Lema 5.9 *Sea K tal que $K \subset X$ es acotado y todo sub-conjunto de K es σ-dentable. Si ν es una medida vectorial numerablemente aditiva, de variación acotada, y absolutamente continua con respecto a μ y $AR(\nu) \subset K$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe una partición numerable $\{B_i\}$ de Ω, $\{B_i\} \subset \Sigma$ tal que $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ es ε pura.*

Demostración. Supongamos $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y sea

$$D = \left\{ \frac{\nu(B)}{\mu(B)} : B \in \Sigma, B \subset A \text{ y } \mu(B) > 0 \right\}.$$

Como D es σ-dentable, existe $x \in D$ tal que $x \notin \sigma(\overline{c}_0(D \backslash B_\varepsilon(x)))$. Luego, existe $A_0 \in \Sigma$, $A_0 \subset A$ con $\mu(A_0) > 0$ y $x = \frac{\nu(A_0)}{\mu(A_0)}$. Demostraremos que existe un sub-conjunto $B \subset A_0$ el cual es (x, ε)-puro.

Supongamos lo contrario; es decir, supongamos que para cada $B \subset A_0$ con $B \in \Sigma$ y $\mu(B) > 0$, existe $C \subset B$ tal que $C \in \Sigma$, $\mu(C) > 0$ y $\left\| x - \frac{\nu(C)}{\mu(C)} \right\| \geq \varepsilon$. En este caso tenemos que $\mu(A_0 \backslash C) > 0$ y por lo tanto existe $C_1 \subset A_0 \backslash C$ tal que $\left\| x - \frac{\nu(C_1)}{\mu(C_1)} \right\| \geq \varepsilon$ con $C_1 \in \Sigma$ y $\mu(C_1) > 0$.

Procediendo de esta forma, construimos una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles y disjuntos con medida positiva que satisfacen la condición

$$\left\| x - \frac{\nu(C_n)}{\mu(C_n)} \right\| \geq \varepsilon; \quad \text{y} \quad C_n \subset A_0 \tag{1}$$

Sea $\mathcal{C}$ una familia máximal disjunta de sub-conjuntos de A_0 que satisfacen (1). $\mathcal{C}$ es numerable porque $\mu(A_0) < \infty$.

Sea

$$\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \boldsymbol{N}} \qquad \text{y} \qquad c_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_i.$$

Si $\mu(A_0 \backslash c_0) > 0$, se tiene que existe $C' \in \mathcal{C}$ tal que $C' \cap C_i = \emptyset \quad \forall i \in I\!N$ y $\mu(C') > 0$ y satisface (1); lo caul muestra que $\mathcal{C}$ no es maximal. Esto implica que $\mu(A_0 \backslash c_0) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} x &= \frac{\nu(c_0)}{\mu(c_0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu(C_i)}{\mu(c_0)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(C_i)}{\mu(c_0)} \frac{\nu(C_i)}{\mu(C_i)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\nu(C_i)}{\mu(C_i)} \in D$ y $\left\| x - \frac{\nu(C_i)}{\mu(C_i)} \right\| \geq \varepsilon$ y $\sum \frac{\nu(C_i)}{\mu(c_0)}, = 1$, resulta que $x \in \sigma c_0(D \backslash B_\varepsilon(x))$ contrario a lo supuesto. Por lo tanto, existe $B \subset A_0$ tal que $B \in \Sigma, \quad \mu(B) > 0$ y B ε-puro.

Sea $\mathcal{B}$ una familia máximal disjunta de conjuntos ε-puros de Ω. De nuevo, $\mathcal{B}$ es numerable. Escribamos $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I\!N}$; y sea $B_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. De la maximalidad de $\mathcal{B}$ se sigue que $\mu(\Omega \backslash B_0) = 0$ y como $\nu \ll \mu$, se tiene que $\nu(\Omega \backslash B_0) = 0$. Si $B_1' = B_1 \cup (\Omega \backslash \cup_{i \geq 2} B_i)$, entonces B_1' es ε-pura y $\{B_1'\} \cup \{B_i\}_{i \geq 2}$ es la familia buscada. Esto termina la demostración. ■

Estamos ahora en condiciones de establecer el tal teorema.

Teorema 5.10 *Para un espacio de Banach X, son equivalentes:*

1) *X tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

2) *X tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a la medida de Lebesgue en $[0,1]$.*

3) *Dado $\varepsilon > 0$, X no contiene arbustos de separación ε.*

4) *Todo sub-conjunto cerrado y acotado de X es dentable.*

5) *Todo sub-conjunto cerrado y acotado de X es σ-dentable.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es consecuencia inmediata de las definiciones.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que X contiene un arbusto de separación ε B con primer elemento x_1 y definamos $f_1: [0,1] \to X$ mediante $f(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [0,1)$. Sea $\{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)}\}$ el conjunto de los sucesores inmediatos de x_1. Por definición de arbusto de separación ε, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in (0,1)$ y tal que

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_1^{(i)} \qquad \|x_1 - x_1^i\| \geq \varepsilon \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Pongamos $\lambda_0 = 0$ y definamos

$$f_2(t) = \sum_{i=1}^{n} x_1^{(i)} \mathcal{X}_{I_{1i}};$$

donde

$$I_{1i} = \left[\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_i, \sum_{j=1}^{i} \lambda_i\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Procediendo por inducción, construimos una martingala $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ absolutamente acotada en $L_1(\mu; X)$ (μ la medida de Lebesgue en $[0,1)$) tal que $\forall t \in [0,1), \quad \|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geq \varepsilon$; lo cual implica que X no posee la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a la medida de Lebesgue en $[0,1)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sea A un sub-conjunto cerrado y acotado en X pero no dentable. Luego de la proposición 5.3 se obtiene que $\overline{c}_0(A)$ no es dentable. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x_1 \in C_0(A)$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, $\sum \lambda_n = 1$ y $x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)} \in C_0(A)$ tales que

$$\|x_1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_1^i\| < \varepsilon_1; \quad \text{donde} \quad \varepsilon_1 \quad \text{es arbitrario}$$

Construiremos un arbusto de separación $\frac{\varepsilon}{2}$ mediante el siguiente procedimiento; sea $\{\varepsilon_k\}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definamos

$$f_1 = x_1\mathcal{X}_{[0,1)};$$

$$f_2 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_1^i \mathcal{X}_{I_i};$$

donde

$$I_i = \left[\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j, \sum_{j=1}^{i} \lambda_j\right] \; ; \quad \text{con la convención } \lambda_0 = 0$$

y sea Σ_1 el σ-álgebra generado por los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Procediendo por inducción, construimos una sucesión creciente de σ-álgebras $\{\Sigma_n\}$ y una sucesión de funciones f_n, Σ_n-medibles tal que

$$\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geq \varepsilon$$

y

$$\left\| \int_{[0,1]} (f_n(t) - f_{n+1}(t)) d\mu \right\| < \varepsilon_n,$$

donde μ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

Fijemos $k \in I\!N$ y consideremos la sucesión de funciones

$$h_{n_k} = E(f_n|\Sigma_k)$$

para $k \leq m < n$ se cumple cada una de las siguientes afirmaciones

1) $E(f_n|\Sigma_k) - E(f_m|\Sigma_k) \; = \; \sum_{i=m}^{n} E((f_i - f_{i-1})|\Sigma_k)$

2) Si $\;j \in \{m+1, \ldots, n\}$.

$$E(f_j - f_{j-1}|\Sigma_k) \; = \; E^2(f_j - f_{j-1}|\Sigma_k) = E(E(f_{j=1}) - f_{j-1}|\Sigma_k).$$

Luego

$$\|E(f_j - f_{j-1}|\Sigma_k)\|_\infty \leq \|Ef_j|\Sigma_{j-1} - f_{j-1}\|_\infty \leq \varepsilon_{j-1}$$

lo cual implica

$$\|E(f_n|\Sigma_k) - E(f_m|\Sigma_k)\|_\infty < \sum_{n=m}^{n-1} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2};$$

lo cual implica que $E(f_n|\Sigma_k)$ es una sucesión de Cauchy en $L_\infty[0,1](\Sigma_k)$ y por lo tanto converge a una función g_k, Σ_k medible tal que g_k toma valores $\mu.c.s$ en $\overline{c_0}A$.

La sucesión $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ es una martingala.

En efecto,

$$\begin{aligned} E(g_{k+1}|\Sigma_k) &= E(\lim_{n\to\infty} E(f_n|\Sigma_{k+1})|E_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} E(E(ff_n|\Sigma_{k+1})|\Sigma_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} E(f_n|\Sigma_k) \ = \ g_k. \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}(w) - g_n(w)\| &\geq \|f_{n+1}(w) - f_n(w)\| - \|f_{n+1} - g_{n+1}\|_\infty - \|f_n - g_n\|_\infty \\ &\geq \ \varepsilon - 2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Como cada g_n es Σ_n-medible el cual es finito, podemos suponer que g_n es constante en cad sub-intervalo de Σ_n. De las propiedades de martingala junto con $(*)$ se deduce que

$$B' = \{g_n(w) : n = 0, \ldots, w \in [0,1]\}$$

es un arbusto de separación $\frac{\varepsilon}{2}$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Es la proposición 5.6.

(5) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que cad conjunto cerrado y acotado de X es σ-dentable; y sea $\nu : \Sigma \to X$ una medida vectorial numerablemente aditiva,

de variación acotada y absolutamente continua con respecto a μ. Podemos suponer debido a las técnicas usadas en la sección 2 que $\left\{\frac{\nu(A)}{\mu(A)}: \mu(A) > 0\right\}$ está contenido en la bola unitaria de X. Por el lema, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $\{B_i\}$ de Ω $\{B_i\} \subset \Sigma$ tal que cada $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ es ε-pura. Haciendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, donde n recorre el conjunto de los números naturales, construimos una sucesión de particiones $\Pi_n = \{E_1^n, E_2^n, \ldots, E_k^n, \ldots\}$ y puntos $x_i^n \in X$ tales que

$$B_{\frac{1}{n}}(x_i^n) \supset \left\{\frac{\nu(A)}{\mu(A)}: A \subset E_i^n, A \in \Sigma \text{ y } \mu(A) > 0\right\}.$$

Ordenemos $\{\Pi_n\}$ por refinamiento y definamos la sucesión de funciones

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu(E_i^n)}{\mu(E_i^n)} \mathcal{X}_{E_i^n}.$$

Cada f_n es Bochner integrable y además, si $m > n$ y $w \in \Omega$, $w \in E_j^m$ para algún j; lo cual implica que $w \in E_i^n$ para algún i y por lo tanto

$$\left\| \frac{\nu(E_i^n)}{\mu(E_i^n)} - \frac{\nu(E_i^m)}{\mu(E_i^m)} \right\| \leq \frac{2}{n}$$

$\Rightarrow \quad \|f_n - f_m\|_1 < \frac{2}{n}\mu(\Omega).$

$\Rightarrow \quad \{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu; X)$.

Sea $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $L_1(\mu; X)$. Claramente, $\nu(E) = \int_E f d\mu$ y por lo tanto X tiene la propiedad de Radon-Nikodym. ∎

Una consecuencia importante del Teorema precedente:

Corolario 5.11 (Davis-Phelps) *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si toda norma equivalente en X tiene bola unitaria dentable.*

Demostración. Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces todo sub-conjunto de X cerrado y acotado es dentable y por lo tanto la condición es necesaria.

Si X no posee la propiedad de Radon-Nikodym, entonces existe un sub-conjunto de X, digamos K, cerrado y acotado pero no dentable. Es fácil ver que $K \cup (-K)$ no es dentable y por lo tanto $H = \overline{c}_0(K \cup -K)$ es absolutamente convexo y no dentable. Sea B la bola unitaria abierta en X con la norma original. De la proposición 5.4(a) se sigue que $J = B + H$ no es dentable. Si $|||\cdot|||$ es el funcional de Minkowski de J, entonces $|||\cdot|||$ es una norma equivalente a la norma original de X, con la bola unitaria no dentable. ∎

Notas. El Teorema 5.10 de la sección precedente se debe al trabajo de varios autores, entre ellos Rieffel [35], Maynard [31], Huff [25] y Davis-Phelps [13]. La exposición de estas notas ha sido preparada siguiendo muy de cerca las exposiciones de Bourgin [8], Bombal [5], van Dulst [17] y Lin [30].

La sucesión (f_n, Σ_n) construida en la demostración de $(3 \Rightarrow 4)$ de nuestro resultado principal, recibe el nombre de cuasi-martingala y ha sido usada exitosamente en [29], para el estudio de las relaciones entre las martingalas y dentabilidad.

6 Puntos fuertemente expuestos y la propiedad de Radon-Nikodym.

En esta sección daremos otra caracterización geométrica de la propiedad de Radon-Nikodym; a saber: *un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, si y sólo si, dado un conjunto cerrado y acotado A, $\overline{c}_0(A)$ coincide con la clausura de la cápsula convexa de los puntos fuertemente expuestos de A.* En la demostración de este resultado, daremos una caracterización geométrica de conjuntos dentables y acotados que nos permitirá usar la caracterización de la propiedad de Radon-Nikodym obtenida en la sección precedente. Nuestra exposición cabalgará sobre las monografías de Diestel-Uhl [15], Van Dulst [17] y Bombal [5].

Definición 6.1 *Sea B un sub-conjunto acotado de X. Se dice que x es un* **punto expuesto** *de B si existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$\begin{aligned} \langle x, x^* \rangle &= \sup\{\langle y, x^* \rangle : \ y \in B\} \\ \text{y} \qquad \langle y, x^* \rangle &< \langle x, x^* \rangle \quad \forall y \in B \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

se dice que x es un punto **fuertemente expuesto** *de B si*

$$\langle x, x^* \rangle = \sup \langle y, x^* \rangle$$

y si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión en B con $x^*(x_n)$ convergente a $x^*(x)$, entonces x_n converge a x. En el primer caso se dice que x^* expone a x y en el segundo caso que x^* expone fuertemente a x.

De la definición precedente se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 6.2 *Sea B un sub-conjunto acotado de X.*

a) Todo punto fuertemente expuesto de B es un punto expuesto de B.

b) Todo punto expuesto de B es extremal.

c) Si B contiene un punto fuertemente expuesto, entonces B es dentable.

Demostración. *a*) Evidente.

b) Sea x un punto expuesto tal que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $x_1 \neq x_2 \neq x$. Si $x^* \in X^*$ expone a x, entonces

$$\begin{aligned} \langle x, x^* \rangle &= \lambda \langle x_1, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle x_2, x^* \rangle \\ &< \lambda \langle x, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle x, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Contradicción.

c) Sea x un punto fuertemente expuesto de B y supongamos que B no es dentable. Luego, existe $\varepsilon > 0$ con $x \in \overline{c}_0(B \backslash B_\varepsilon(x))$. Para cada $x^* \in X^*$ que exponga fuertemente a x se tiene que

$$\begin{aligned} x^*(x) &= \sup x^*(B) = \sup(B \backslash B_\varepsilon(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists\, x_n \text{ contenida en } B \backslash \{x\} \end{aligned}$$

tal que $x^*(x_n)$ converge a $x^*(x)$ pero x_n no converge a x. Una contradicción.

■

Ejemplo 6.3 *Existen puntos expuestos que no son fuertemente expuestos. En efecto, sea $X = \ell^2$ el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable con la norma $\|a_n\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}$. Pongamos*

$$K = \left\{ \{x_n\} \in \ell^2 : x_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq 1 \right\}.$$

Claramente K es acotado

Afirmamos que $d \in K$ es un punto expuesto, pero no fuertemente expuesto de K. En efecto, como ℓ^2 es un espacio de Hilbert, el Teorema de Representación de Riez nos dice que éste es autodual.

Sea $y = (y_n) \in \ell^2$ tal que $y_n < 0 \; \forall n \in I\!N$. Luego $\langle 0, y \rangle = 0 > \langle x, y \rangle \;\; \forall x \in K \backslash \{0\}$ lo cual implica que 0 es un punto expuesto de k.

Sea $\{e_n\}$ la base canónica de ℓ^2; luego para cada $y \in \ell^2$, se tiene que $\langle e_n, y \rangle \to 0$ pero $\{e_n\}$ no es de Cauchy en ℓ^2; por lo tanto es imposible que 0 sea un punto fuertemente expuesto K.

Ejemplo 6.4 *Sea $X = I\!R^2$ con la norma de Euclides y $B = \{x : \|x\| \leq 1\} \cup \{(1,1)\}$. Los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$ son puntos extremales de B; pero no son expuestos. Para ver esta última afirmación, observe que el funcional $(0,1)$ alcanza máximo en $(0,1)$ y $(1,1)$; similarmente, el funcional $(0,1)$ alcanza máximo en $(1,0)$ y $(1,1)$.*

La idea de la siguiente definición es proveernos de una forma alternativa de expresar la noción de conjunto dentable y acotado (proposición 6.6)

Definición 6.5 *Sea $B \subset X$ acotado, $x^* \in X^*$ y $\alpha < \sup x^*(B)$. El conjunto*

$$R(x^*, \alpha, B) = \{x \in B \colon \langle x, x^* \rangle \geq \alpha\}$$

se llama una **rebanada** *de B.*

Proposición 6.6 *Sea B un sub-conjunto acotado de X. B es dentable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe una rebanada de B de diámetro menor que ε.*

Demostración. Si B es dentable, dado $\varepsilon > 0$ existe $x \in B$ tal que $x \notin \overline{co}(B \backslash B_{\varepsilon/2}(x))$. Por el Teorema de Hanh-Banach, existen $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle x, x^* \rangle > \alpha > \sup x^* \overline{co}(B \backslash B_{\varepsilon/2}(x));$$

lo cual implica que $R(x^*, \alpha, B) \subset B_{\varepsilon/2}(x)$; y de esta forma vemos que $R(x^*, \alpha, B)$ tiene diámetro menor que ε.

Recíprocamente, si para cada $\varepsilon > 0$, existe una rebanada $R(x^*, \alpha, B)$ de diámetro menor que ε, entonces si $x \in R(x^*, \alpha, B)$ se tiene que $R(x^*, \alpha, B) \subset B_{2\varepsilon}(x)$. Luego

$$B \backslash B_{2\varepsilon}(x) \subset \{y \in X : \langle y, x^* \rangle < \alpha\}$$

lo cual implica que

$$x \notin \overline{co}(B \backslash B_{2\varepsilon}(x)) \subset \{y \in X : \langle y, x^* \rangle \leq \alpha\};$$

es decir, B es dentable. ■

Esta nueva caracterización de conjuntos dentables y acotados nos será útil en esta sección.

Lema 6.7 (Phelps) *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ y sea C un sub-conjunto de X convexo, cerrado y acotado tal que*

$$C \subset \{x \in X : \langle x, x^* \rangle \geq 0\}, \quad C \backslash \ Ker\ x^* \neq \emptyset.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen $y^* \in X^*$ con $\|y^*\| = 1$ y $\beta < \sup y^*(C)$ tales que

1) diam $R(y^*, \beta, C) < \varepsilon$

2) $R(y^*, \beta, C) \cap \ker x^* = \emptyset$.

Demostración. Si $C \cap \ker x^* = \emptyset$, por la dentabilidad de C éste contiene una rebanada de diámetro arbitrariamente pequeño que satisface (2).

Supongamos que $C \cap \ker x^* \neq \emptyset$; y sea z un elemento de C tal que $\langle z, x^* \rangle > 0$. Para cada $x \in C \cap \ker x^*$ definamos $T_x: X \to X$ mediante

$$T_x(y) = y - 2\frac{\langle y, x^* \rangle}{\langle z, x^* \rangle}(z - x).$$

Para cada $x \in C \cap \ker x^*$, T_x satisface cada una de las siguientes afirmaciones:

i) T_x es lineal y continua.

ii) $T_x^2 = I$, la identidad en X.

iii) $x = \dfrac{(z + T_x(z))}{2}$.

iv La restricción de T_x a $\ker x^*$ es igual a la identidad.

v) $\|T_x\| \leq 1 + \dfrac{4}{\langle z, x^* \rangle} \sup\{\|y\| : y \in C\} = M$.

Sea $\mathcal{K} = \{C\} \cup \{T_x(C) : x \in C \cap \ker x^*\}$; y sea K_1 la clausura de la cápsula convexa de la unión de los miembros de K. K_1 es acotado, por la propiedad (v) y por lo tanto dentable, puesto que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym; luego K_1 contiene una rebanada $R(z^*, \alpha, K_1)$ de diámetro

$$d < \min\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \langle z, x^* \rangle\right\}.$$

Ahora bien,

$$(C \cap \ker x^*) \cap R(z^*, \alpha, K_1) = \emptyset; \tag{$*$}$$

ya que en caso contrario, $x = \frac{1}{2}(z + T_x(z))$ sería el punto medio del segmento $[z, T_x(z)]$ contenido en K_1 con $x \in (C \cap \ker x^*) \cap R(z^*, \alpha, K_2)$. y por lo tanto,

$$\|z - T_x(z)\| = 2\|z - x\| > \langle z, x^* \rangle;$$

por lo que el diámetro de $R(z^*, \alpha, K_1)$ sería mayor que $\langle z, x^*\rangle$; lo cual es imposible; así, $(*)$ es cierto.

Por otra parte,

$$\sup z^*(K_1) = \sup z^*(\cup K' : K' \in \mathcal{K});$$

luego, existe $c_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\sup z^*(c_0) > \alpha$. Por lo tanto,

$$\emptyset \neq R(z^*, \alpha, c_0) \subset R(z^*, \alpha, K_1)$$

y en consecuencia

$$R(z^*, \alpha, c_0) \cap \ker x^* = \emptyset$$

y

$$\operatorname{diam} R(z^*, \alpha, c_0) \leq d.$$

si $c_0 = C$, el lema se cumple con $y^* = \dfrac{z^*}{\|z^*\|}$ y $\beta = \dfrac{\alpha}{\|z^*\|}$.

Supongamos que $c_0 = T_x C$ para algún $x \in C \cap \ker x^*$. Entonces $T_x^{-1}(R(z^*, \alpha, T_x C))$ es una rebanada de C de diámetro a lo sumo

$$\|T_x^{-1}\| d \;=\; \|T_x\| d \;\leq\; Nd \;<\; \varepsilon$$

en virtud de (ii).

Además,

$$\begin{aligned} T_x^{-1}(R(z^*, \alpha, T_x(c)) \cap \ker x^* &= T_x^{-1}(R(z^*, \alpha, T_x C) \cap \ker x^* \cap C) \\ &= T_x^{-1}[R(z^*, \alpha, T_x C) \cap \ker x^* C] = \emptyset, \end{aligned}$$

ya que por (iv) $T_x | \ker x^* = I$.

Haciendo $y^* = \dfrac{z^* \circ T_x}{\|z^* \circ T_x\|}$ y $B = \dfrac{\alpha}{\|z^* \circ T_x\|}$, obtenemos el lema. ∎

Lema 6.8 (Bishop-Phelps) . *Sean* $x^*, y^* \in X^*$ *con* $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ *y* $\varepsilon > 0$. *Supongamos que* $x \in \ker x^*$ *implica* $|\langle x, y^*\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\|$. *Entonces* $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$ *ó* $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$.

Demostración. Sea $H = \ker x^*$. Restrinjamos y^* a H y sea z^* cualquier extensión de $y^*|_H$ a X^*. Existe $r \in I\!R$ tal que $y^* - z^* = rx^*$. Claramente $\|Z^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Note que

$$| \, 1 - |r| \, | \; = \; | \, \|y^*\| - \|y^* - z^*\| \, | \; \leq \; \|z^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $r > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\| &= \|x^* - rx^* - z^*\| \; = \; \|(1-r)x^* - z^*\| \\ &\leq \; |1 - r| + \|z^*\| \; \leq \; \varepsilon; \end{aligned}$$

mientras que si $r > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \|x^* + y^*\| &= \|(1-r)x^* + z^*\| \leq |1 + r| + \|z^*\| \\ &< \; \varepsilon; \end{aligned}$$

■

Para K cerrado y acotado denotaremos por $\mathcal{U}_\varepsilon(K)$

$$\{x^* \in X^*; \;\; \exists \;\; R(x^*, \alpha, k) \;\; \text{de diámetro menor que} \;\; \varepsilon\}.$$

Con las notaciones precedentes se tiene:

Lema 6.9 *a) Cada* $\mathcal{U}_\varepsilon(K)$ *es un sub-conjunto abierto de* X^*.

b) Si K *tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *y* $y^* \in X^*$, *existe* $x^* \in \mathcal{U}_\varepsilon(K)$ *tal que* $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$.

Demostración. *a*) Sean $x^* \in \mathcal{U}_\varepsilon(K)$; y $\alpha \in I\!R$ tal que el diámetro de $R(x^*, \alpha, K)$ es menor que ε. Sea $M = \sup\{\|x\| : x \in K\}$. Dados $x \in K$ y $y^* \in X^*$, entonces,

$$\begin{aligned}\langle x, y^* \rangle &= \langle x, x^* \rangle - \langle x, x^* - y^* \rangle. \\ &\geq \langle x, x^* \rangle - \|x^* - y^*\| M;\end{aligned}$$

de donde se sigue que para cada $\delta > 0$,

$$\langle x, y^* \rangle \geq -\delta M, \quad \text{siempre que} \quad \|x^* - y^*\| < \delta.$$

Si escogemos $0 < \delta < \frac{1}{2}(\sup x^*(K) - \alpha)$, y hacemos $\beta = \alpha + \delta M$ vemos que

$$\beta < \sup x^*(K) - \delta M \leq \sup y^*(K).$$

Además, $\|x^* - y^*\| < \delta$ $x \in K$ y $\langle x, y^* \rangle \geq \beta$, entonces

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle - \langle x, y^* - x^* \rangle \geq \beta - \delta M = \alpha,$$

lo cual implica que $R(y^*, \beta, K) \subset R(x^*, \alpha, K)$ y por lo tanto $R(y^*, \beta, K)$ tienen diámetro menor que ε. En conclusión, $\mathcal{U}_\varepsilon(K)$ es abierto.

b) Sea $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ y $\varepsilon \in (0, 1)$. Supongamos que $K \subset \{x : \langle x, x^* \rangle > 0\}$ y sean $M = \sup \|\|x\| : x \in K\}$, $\beta = \dfrac{4M}{\varepsilon}$ y

$$C = \overline{co}(K \cup (\ker x^*)) \cap \overline{B_\beta}(0).$$

Claramente $C \subset \{x : \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$ y $C \setminus \ker x^* \neq \emptyset$. Como X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, el Lema 6.7 prueba que existen $y^* \in X^*$ con $\|y^*\| = 1$ y $\alpha \in I\!R$ tales que $\alpha < \sup y^*(C)$, y el diámetro de $R(y^*, \alpha, C) < \varepsilon$ y $R(y^*, \alpha, C) \cap \ker x^* = \emptyset$.

Como $C = \overline{co}(k \cup (C \cap \ker x^*))$, se tiene que

$$\sup y^*[(k \cup (C \cap \ker x^*)] > \alpha.$$

Además, sobre $C \cap \ker x^*$, y^* es menor que α puesto que $R(y^*, \alpha, C) \cap \ker x^* = \emptyset$. De esto se sigue que $\sup y^*(K) > \alpha$; y por lo tanto $R(y^*, \alpha, K)$ es una rebanada contenida en $R(y^*, \alpha, K)$ que tiene diámetro menor que ε; lo cual implica que $y^* \in \mathcal{U}_\varepsilon$.

Demostraremos ahora que $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$

Sean $y \in R(y^*, \alpha, K)$ y $H = \ker x^*$. Como $R(y^*, \alpha, C) \cap H = \emptyset$, se tiene

$$\langle y, y^* \rangle \geq \sup\{\langle x, y^* \rangle : x \in H \bigcap \overline{B_\beta}(0)\} = \beta \|y^*\|_H$$

donde $\|y^*\|_H$ es la norma de la restricción de y^* a H. Del Lema de Bishop-Phelps se tiene que o bien

$$\|x^* + y^*\| < 2\frac{\langle y, y^* \rangle}{\beta}$$

o bien

$$\|x^* - y^*\| < 2\frac{\langle y, y^* \rangle}{\beta}.$$

Si fuese

$$\|x^* + y^*\| < \frac{2}{\beta}\langle y, y^* \rangle$$

como $\langle y, x^* \rangle > 0$, se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{\langle y, y^* \rangle}{M} &\leq \frac{\langle y, y^* \rangle}{\|y\|} \\ &< \frac{\langle y, x^* + y^* \rangle}{\|y\|} \end{aligned}$$

$$\leq \|x^* + y^*\|$$

$$\leq \frac{2\langle y, y^*\rangle}{\beta}$$

y en conclusión, $M > \frac{\beta}{2}$ en contradicción con la elección de β. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|x^* + y^*\| &\leq 2\frac{\langle y, y^*\rangle}{\beta} \\ &\leq \frac{2M}{\beta} < \frac{4M}{\beta} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $K \not\subset \{x : \langle x, x^*\rangle > 0\}$, tenemos $a \in X$ tal que

$$Ka = K + a \subset \{x : \langle x, x^*\rangle > 0\}.$$

por lo que hemos demostrado, existen $y^* \in X^*$ y $\alpha \in I\!R$ tales que $\|y^*\| = 1$ y $\alpha < \sup y^*(Ka)$, $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$ y diam $R(y^*, \alpha, Ka) < \varepsilon$.

Sea $\delta = \alpha - \langle a, y^*\rangle$. Luego

$$\delta < \sup y^*(K).$$

y diam $R(y^*, \delta, K) < \varepsilon$; puesto que

$$R(y^*, \delta, K) = R(y^*, \alpha, Ka) - a.$$

Así, el resultado es válido si $\|x^*\| = 1$. Mediante razonamientos típicos del oficio se obtiene la conclusión del lema. ∎

Abordaremos ahora el resultado principal de esta sección:

Teorema 6.10 (Phelps) *Para un espacio de Banach X son equivalentes:*
a) X Tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

b) Todo sub-conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de X es la cápsula convexa de sus puntos fuertemente expuestos.

Demostración. $a \Rightarrow b$. Sea K un sub-conjunto convexo, cerrado y acotado en X con $K \neq \emptyset$. Pongamos

$$E(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(K).$$

Del lema precedente y el Teorema de Baire se deduce que $E(K)$ es un G_δ denso en X^*. Sea $x^* \in E(K)$ y $\alpha = \sup x^*(K)$. Luego, existe una sucesión creciente $\{\alpha_n\} \subset I\!R$ tal que α_n converge a α y diam $R(x^*, \alpha_n, K) < \frac{1}{n}$. Por el Teorema de Cantor, existe un único $x \in \cap_{n=1}^{\infty} R(x^*, \alpha_n, K)$; lo cual implica que

$$\sup x^*(K) = x^*(x).$$

Además, si $\{y_m\} \subset K$ y $\langle y_m, x^* \rangle$ converge a $\langle x, x^* \rangle$, entonces para cada $n \in I\!N$ existe $m_0 \in I\!N$ tal que

$$m \geq m_0 \quad \Rightarrow \quad y_m \in R(x^*, \alpha_n, K);$$

lo cual implica que $\|y_m - x\| < \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$; y esto a su vez implica que x es un punto fuertemente expuesto de K. Esto muestra que para cada $x^* \in E(K)$, existe $x \in X$ tal que:

(i) x^* expone fuertemente a x.

(ii) $x \in R(x^*, \alpha_n K)\ \forall n \in I\!N$.

Sea K_1 la clausura de la cápsula convexa de los puntos fuertemente expuestos de K. Si $K_1 \neq K$, por el Teorema de Hahn-Banach existe $y^* \in X^*$

con $\sup y^*(K_1) = \beta < \langle y, y^* \rangle$ para algún $y \in K$. Sea $x^* \in E(K)$ tal que

$$\|x^* - y^*\| < \frac{1}{2M}(\langle y, y^* \rangle - \beta),$$

donde $M = sup\{\|z\| : z \in K\}$; y sea $x \in K$ tal que

i) x^* expone fuertemente a x

ii) x pertenece a toda rebanada $R(x^*, \alpha_n, K)$; donde α_n es la sucesión escogida al comienzo de esta demostración.

Ahora bien, si $z \in K_1$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle z, x^* \rangle &\leq \langle z, x^* \rangle + \|x^* - y^*\| \, \|z\| \\
&< \beta + \frac{1}{2}(\langle y, y^* \rangle - \beta) = \frac{1}{2}(\langle y, y^* \rangle + \beta).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\langle y, x^* \rangle &= \langle y, y^* \rangle - (\langle y, y^* \rangle - \langle y, x^* \rangle) \\
&\geq \beta + \frac{1}{2}(\langle y, y^* \rangle - \beta) = \frac{1}{2}(\langle y, y^* \rangle + \beta).
\end{aligned}$$

Si tomamos γ de forma que

$$\sup x^*(K) > \gamma > \frac{1}{2}(\langle y, y^* \rangle + \beta),$$

resulta que $x \in R(x^*, \alpha, K)$ pero $x \notin K_1$ lo cual es una contradicción.

($b \Rightarrow a$) Sean D cerrado y acotado, $D \neq \emptyset$ y $\overline{c}_0(D)$ la clausura de la cápsula convexa de D. $\overline{c}_0(D)$ tiene al menos un punto fuertemente expuesto. así, por la proposición 6.2(b), $\overline{c}_0(D)$ es dentable y por la proposición 5.3, D es dentable y por lo tanto X tiene la propiedad de Radon-Nikodym. ■

El siguiente resultado es piedra angular para el estudio de la próxima sección

Corolario 6.11 (Huff-Morris) *Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym y D es un sub-conjunto de X cerrado, acotado y diferente de vacío, entonces el conjunto de funcionales lineales y acotados que alcanzan máximo en D es denso en X^*.*

Demostración. Sean D cerrado y acotado y $\bar{c}_0(D)$ la clausura de la cápsula convexa de D. Entonces $\bar{c}_0(D)$ contiene un punto fuertemente expuesto x. Sea $x^* \in X^*$ tal que x^* expone fuertemente a x. Luego

$$\langle x, x^* \rangle = \sup x^*(\bar{c}_0(D)) = \sup(x^*(D)).$$

Si $\{x_n\}$ es una sucesión en D tal que $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$, entonces $x_n \to x$ en la topología de la norma de X, esto implica que x es un punto fuertemente expuesto de D y por lo tanto x^* alcanza máximo en D. Esto demuestra el resultado ya que en el transcurso de la demostración del Teorema de Phelps hemos visto que el conjunto de elementos de X^* que exponen fuertemente puntos de $c_0(D)$ es denso en X^*. ∎

Notas. Es un hecho bien conocido que el Teorema de Krein-Milman afirma que todo sub-conjunto no vacío, convexo, cerrado, débilmente compacto y acotado coincide con la clausura de la cápsula convexa de sus puntos extremales; y, como puede observarse, para el caso en que el espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, el Teorema de Phelps constituye una mejora sustancial del Teorema de Krein-Milman. En relación con el tema, se dice que un espacio de Banach tiene la **propiedad de Krein-Milman** si todo sub-conjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado coincide con la clausura de la cápsula convexa de sus puntos estremales. Con esta definición se obtiene, como corolario del Teorema de Phelps, un resultado atribuido a Lindenstrauss: *La propiedad de Radon-Nikodym implica la proipiedad de Krein-Milman.* El inverso del Teorema de Lindenstrauss es aún problema abierto. Mencionaremos este hecho por la importancia que le han dado muchos especialistas en los últimos veinticinco años, pero no nos ocuparemos del tema en estas notas. En su lugar, recomendaremos a los interesados en la lectura de los artículos de James [27] y Schachermayer [39] y tanto las monografías de Diestel-Uhl [15], Van Dulst [17] y B. Lin [30]; como la bibliografía allí recomendada.

El inverso del corolario 6.11 también es cierto (ver Diestel-Uhl [15]); y, sacrificando nuestro gusto estético, hemos omitido su demostración porque éste exige ciertos técnicismos y no haremos uso de ese resultado en estas páginas.

7 El Teorema de módulos máximo en espacio de Banach.

En esta sección introduciremos el concepto de funciones analíticas con dominio complejo y rango contenido en un espacio de Banach complejo a menos que especifiquemos lo contrario, y demostraremos un par de condiciones suficientes para que una función analítica cuya norma alcance el máximo en el interior de una región Ω sea constante. Estos resultados son tomados de Bárcenas-Colasante [2] y en nuestra exposición haremos uso de la Teoría clásica de funciones analíticas tomando como referencia los textos de Conway [11] y Rudin [37]. La contraparte vectorial de algunos resultados referentes a la mencionada Teoría pueden encontrarse entre otros en Dunford-Schwartz [19], Hille-Phillips [24] y Rudin [38].

Definición 7.1 *Sea Ω una región del plano complejo y X un espacio de Banach complejo. Una función $f: \Omega \to X$ es* **analítica** *en ω, si f es diferenciable en cada punto de Ω.*

De la definición de analiticidad se desprende que si $f: \Omega \to X$ es una función analítica entonces dado $x^* \in X^*$, $x^* f: \Omega \to \mathbb{C}$ también es una función analítica. El inverso también es cierto; pero su demostración no es inmediata y no haremos uso de ello en estas páginas; por lo que remitiremos a los interesados en su demostración al Teorema 3.31 de Rudin [38].

En todo lo que sigue Ω denotará una región del plano complejo y X un espacio de Banach complejo.

Para funciones que satisfacen las hipótesis de la definición 7.1, el Teorema del módulo máximo toma la siguiente forma

Teorema 7.2 *Sea $f:\Omega \to X$ una función analítica. Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\|f(z_0)\| \geq \|f(z)\|$ para cada $z \in \Omega$, entonces $\|f(\cdot)\|$ es constante.*

Demostración. Sea $f:\Omega \to X$ una función analítica. Por definición f es diferenciable y en consecuencia continua; y de la separabilidad de Ω sigue que $f(\Omega)$ es separable. Es obvio que f es débilmente medible. Luego, aplicando el criterio de medibilidad de Pettis, vemos que f es medible con respecto a cualquier medida de Borel en el plano. Sean C una curva cerrada y rectificable contenida en Ω y $\gamma:[a,b] \to C$ una parametrización de C. Entonces f es acotada sobre C y por lo tanto,

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \qquad \text{existe.}$$

Además del Teorema de Hille (Teorema 1.20) se tiene que

$$x^* \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b x^* f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

para cada $x^* \in X^*$. Como cada $x^* f$ es analítica, se tiene que

$$x^* \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

no depende de la parametrización γ. En consecuencia, $\int_a^b f(\gamma(t))dt$ tampoco depende de dicha parametrización.

Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $\|f(\cdot)\|$ alcanza máximo en z_0 y $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$. Entonces, usando de nuevo el Teorema 1.20 podemos ver que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi_i} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + z_0)dt.$$

por lo tanto,

$$\|f(z_0)\| \leq \frac{1}{2\pi_i} \int_0^{2\pi} \|f(re^{it} + z_0)\| dt;$$

lo cual implica que

$$\int_0^{2\pi} (\|f(z_0)\| - \|f(re^{it} + z_0)\|) dt \leq 0.$$

Como $\|f(z_0)\| - \|f(z)\| \geq 0 \quad \forall z \in \Omega$, resulta que $\|f(z)\| = \|f(z_0)\| \quad \forall z \in \{z : |z - z_0| < r\}$ $\mu.c.s$; y de la continuidad de f se sigue que $\|f(\cdot)\|$ es constante en $Br(z_0)$. En consecuencia

$$A = \{z \in \Omega : \|f(z)\| = \|f(z_0)\|\}$$

es abierto y usando una vez mas la continuidad de f se obtiene que A es cerrado. Como Ω es conexo y $A \neq \emptyset$, concluimos que $A = \Omega$. Esto termina la demostración. ■

Es bien sabido que el Teorema clásico del módulo máximo afirma mucho más que el Teorema 7.2; pues cuando $X = \mathbb{C}$, podemos concluir no sólo que $|f(\cdot)|$ es constante; sino además, f es constante.

Es natural entonces preguntarse si, bajo las hipótesis del Teorema 7.2, la condición $\|f(\cdot)\|$ constante implica f constante; y si la respuesta es negativa, bajo qué condiciones sobre f ó X es cierto que $\|f(\cdot)\|$ constante implica f constante. En esta sección tratamos de dar algunas respuestas al problema planteado; comenzando por establecer, con un par de ejenplos, que la respuesta ala primera pregunta es negativa:

Ejemplo 7.3 *Consideremos la función $f: D \to c_0$ definida mediante $f(z) = \{1, z, \ldots, z^n, \ldots\}$, donde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y c_0 el espacio de Banach* *de todas las sucesiones convergentes a cero con la norma del supremo. La función f así definida es analítica ya que para cada $z_0 \in D$,*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \{0, 1, \ldots, nz^{n-1}, \ldots\} \in c_0.$$

Claramente, f no es constante pero $\|f(z)\| = 1 \quad \forall z \in D$.

Ejemplo 7.4 *Sea $X = \mathbb{C}^2$ con la norma $\|(z_1, z_2)\| = \max\{|z_1|, |z_2|\}$. La función $f: D \to X$ definida mediante $f(z) = (1, z)$ es analítica no constante pero $\|f(z)\| = 1 \quad \forall z \in D$.*

El siguiente teorema trata de rescatar las conclusiones del Teorema clásico del módulo máximo; pero antes de establecer nuestro resultado, recordaremos algunos aspectos referentes a los espacios de Banach complejos, que puedan verse con mas detalles en Cotlar-Cignoli [12]

Una funcional lineal compleja está biunívocamente determinada por su parte real en el siguinete sentido:

Dado el espacio de Banach complejo X, éste es también un espacio de Banach real y dado una funcional lineal y continua, compleja x^*, existe una única funcional lineal y continua x_i^* tal que para cada $x \in X$,

$$x^*(x) = x_i^*(x) - i x_i^*(ix) \tag{2}$$

Inversamente, dada una funcional real lineal y continua x_i^*, ésta determina, mediante la ecuación (2) una única funcional compleja, la cual a su vez lineal y continua.

Definición 7.5 *La funcional* x_1^* *de la ecuación* (2) *se llama* **parte real de la funcional** x_1^*.

Como indicamos al inicio de este parágrafo, Ω denota una región de $\mathbb{C}$ y X un espacio de Banach complejo.

Teorema 7.6 *Sea* $f: \Omega \to X$ *una función analítica tal que existe* $a \in \Omega$ *con* $\|f(a)\| \geq \|f(z)\| \quad \forall z \in \Omega$. *Si* X *tiene propiedad de Radon-Nikodym y* $f(\Omega)$ *es cerrado en* X, *entonces* f *es constante.*

Demostración. Si $\|f(a)\| = 0$, no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $\|f(a)\| > 0$; y sea $x^* \in X^*$. Si x_1^* denota la parte real de x^*, entonces $x_1^* f: \Omega \to \mathbb{R}$ es una función armónica.

Supongamos que x_1^* alcanza máximo en $f(\Omega)$; luego $x_1^* f$ alcanza máximo en Ω y por lo tanto es constante (por ser una función armónica) lo cual implica que $x_1^* f$ es constante.

Supongamos que $x_1^* f$ no alcanza máximo en $f(\Omega)$. Como X tiene la propiedad de Radon-Nikodym y $f(\Omega)$ es cerrado, el corolario 6.11, implica que dado $\varepsilon > 0$, existe una funcional lineal real y continua y_1^* tal que y_1^* alcanza m'aximo en $f(\Omega)$ y

$$\|x_1^* - y_1^*\| < \frac{\varepsilon}{2\|f(a)\|}.$$

Ahora bien, y_1^* es la parte real del funcional lineal continua y compleja y^* definida mediante $y^*(x) = y_1^*(x) - iy_1^*(x)$ para cada $x \in X$. Como $y^* f$ es analítica, podemos concluir que y^* es constante. Por lo tanto, para cada

$z \in \Omega$ Supongamos que x_1^*

$$\begin{aligned} |x_1^* f(z) - x_1^* f(a)| &\leq |y_1^* f(z) - x_1^* f(z)| \\ &+ |y_1^* f(a) - x_1^* f(a)| \\ &\leq \|y_1^* - x_1^*\|(\|f(z)\| + \|f(a)\|) \\ &\leq \|y_1^* - x_1^*\|\|f(a)\| < \varepsilon; \end{aligned}$$

lo cual implica que $x_1^* f$ es constante y en consecuencia $x_1^* f$ es constante. Como esto es válido para cada $x^* \in X^*$, el Teorema de Hahn-Banach implica que f es constante sobre Ω. Esto termina la prueba. ■

Observación 7.7. En el Teorema precedente no se pueden omitir las condiciones $f(\Omega)$ cerrado ni X tiene la propiedad de Radon-Nikodym; como se puede observar al analizar los ejemplos 7.3 y 7.4 respectivamente, pues un estudio detallado de estos ejemplos muestra que en 7.3 $f(\Omega)$ es cerrado c_0 un espacio de Banach que, como sabemos, no posee la P.R.N. Por su parte, para ver que esta última condición no es suficiente, note que $\mathbb{C}^2$ es un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym.

Es posible sustituir en el Teorema 7.6 la hipótesis X tiene la propiedad de Radon-Nikodym por $f(\Omega)$ es convexo en X debido a un hermoso resultado de Bishop-Phelps [4]:

Teorema 7.7 *Sea X un espacio de Banach real y $D \subset X$ convexo cerrado y acotado. Entonces el conjunto de funcionales lineales y acotadas que alcanzan máximo en D es denso en X^*.*

Demostración. Ver [15] o [4].

Con el Teorema de Bishop-Phelps a mano, podemos obtener la siguiente variación de 7.6.

Teorema 7.8 *Sea X un espacio de Banach complejo y $f: \Omega \to X$ una función analítica. Si existe $a \in \Omega$ tal que $\|f(a)\| \geq \|f(z)\| \ \ \forall z \in \Omega$ y $f(\Omega)$ es cerrado y convexo en X, entonces f es constante.*

Demostración. Es la misma de 7.6, sustituyendo 6.11 por 7.8.

Notas. En [43] se estudian condiciones sobre espacio de Banach X para que una función analítica $f: \Omega \to X$ que satisfaga la hipótesis:

$$\exists a \in \Omega : \|f(a)\| \geq \|f(z)\| \ \ \forall z \in \Omega \qquad (*)$$

sea constante. En el citado trabajo se introducen las siguientes definiciones.

Sea X un espacio de Banach complejo y K un sub-conjunto convexo de X. Un punto $e \in K$ se llama **punto extremal complejo** si $\forall y \in X$ con

$$\{e + zy : |z| \leq 1\} \subset K \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Decimos que X es **C-estrictamente convexo**, si cada punto de la bola unitaria cerrada de X es un punto extremal complejo.

Con estas definiciones tenemos la validez del siguiente resultado:

Una condición necesaria y suficiente para toda función analítica $f: \Omega \to X$ que satisfaga $(*)$ sea constante, es que X sea un espacio C-estrictamente convexo.

Es natural preguntarse si existe alguna relación de implicación entre espacios C-estrictamente convexo y espacios con la propiedad de Radon-Nikodym.

La respuesta es negativa ya que como hemos demostrado en la sección 4, $L^1_{[0,1]}$ no posee la propiedad de Radon-Nikodym y en [22] se demuestra que este espacio es C-estrictamente convexo.

Por otra parte $\mathbb{C}^2$ con la norma del supremo posee la propiedad de Radon-Nikodym pero no es C-estrictamnete convexo.

Consideraremos pertinente unas cuantoa palabras acerca del Teorema Bishop-Phelps. Este Teorema ha sido extendido por Bourgain [6] hasta operados entre espacios de Banach en los siguientes términos:

Dados dos espacios de Banach reales X e Y, denotaremos por $L(X,Y)$ el espacio de todos los operadores lineales y acotados de X en Y con la norma usual de operadores

Para un sub-conjunto cerrado y acotado B de X y $T \in L(X,Y)$ pongamos $N(T,B) = \sup\{\|Tx\| : x \in B\}$.

Se dice que el espacio de Banach X tiene la *propiedad de Bishop-Phelps* si para ualquier sub-conjunto B de X convexo, cerrado y acotado y cualquier espacio de Banach Y, $\{T \in L(X,Y) : \|T(\cdot)\| \text{ alcanza máximo en } B\}$ es denso en $L(X,Y)$.

La caracterización de la propiedad de Bishop-Phelps obtenida por Bourgain se expresa en el siguiente Teorema:

Un espacio de Banach tiene la propiedad Bishop-Phelps si y sólo si tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Hasta donde sepamos, el Teorema de Bishop-Phelps contituye un problema abierto para espacio de Banach complejo. Una respuesta parcial es dada con ayuda de la propiedad de Radon-Nikodym:

Sea X un espacio de Banach complejo con la propiedad propiedad de Radon-Nikodym y $B \subset X$ convexo, cerrado y acotado. Entonces

$$\{x^* \in X^* : |x^*| \ \ \textit{alcanza el máximo en} \ \ B\}$$

es denso en X^*.

Referencias

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Mat. Vol.1, Warsaw (1932).

[2] D. Bárcenas–M.L. Colasante, A note about the Maximum principles, Notas de Matemáticas N$^{\underline{o}}$ 100, U.L.A. pp 35-41(1989).

[3] D. Bárcenas–J. Diestel, Constrained controllability in non-reflexive Banach spaces, aparecerá Q.M.

[4] E. Bishop–R. R. Phelps, The support functionals of a convex set, Proc. Sympos. Pure. Math. VII, Convexity Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 235-237 (1963).

[5] F. Bombal, El Teorema de Radon-Nikodym en espacios de Banach. Espacios con la propiedad de Radon-Nikodym, publicaciones del Departamento de Análisis Matemático de la Universidada Complutense, sección 1 n$^{\underline{o}}$ 2, Madrid(1977).

[6] J. Bourgain: On dentability and Bishop–Phelps property, Israel J. Math. **28**, 265-271(1977).

[7] J. Bourgain–H. P. Rosenthal, Martingales valued in certain subespaces of L^1, Israel J. Math., **37** 54-75 (1980).

[8] R. Bourguin, Geometric aspect of Convex sets with the Radon-Nikodym property, LNM 993, Springer-Verlag, Berlin. (1983).

[9] C. W. Burrill: Measure, integration and Probability, Mc Graw Hill, New York (1971).

[10] S. D. Chatterji: Martingales Convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, Math. Scand. **22**, 21-41 (1968).

[11] J. B. Conway, Function of a Complex variable GTM, Springer-Verlag, Berlin. (1973).

[12] M. Cotlar, R. Cignoli, An Introduction to Functional Analysis, North Holland, Amsterdam (1974).

[13] W. J. Davis–R. R. Phelps, The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. **45**, 119-122 (1974).

[14] J. Diestel–B. Faires, On Vector Measures, Trans. Amer. Math. Soc. **198**, 253-271 (1974).

[15] J. Diestel–J. J. Uhl, Vector Measures, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1977).

[16] N. Dinculeanu, Vector Measures, Pergamon Press, New York (1967).

[17] D. van Dulst, The Geometry of Banach spaces with the Radon-Nikodym property, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1986).

[18] N. Dunford–B. J. Pettis, Linear Operations on summable functions, Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 323-392 (1940).

[19] N. Dunford–J. T. Schwartz, Linear Operators, I, Interscience, New York (1958).

[20] L. Egghe, Stopping time techniques for analysts and probabilitits, London Math. Soc. Lecture Notes Series 100, Cambridge University Press (1984).

[21] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York (1981).

[22] J. Globevnik, On complex strict and uniform convexity, Proc. Amer. Math. Soc. **47**, 175-178 (1975).

[23] K. Hashimoto–S. Oharu, Gel'fand integrals and generalized derivatives of vector measures, Hiroshima Math. J. **13**, 301-326 (1983).

[24] E. Hille–R. S. Phillips, Functional Analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Colloquium, Providence, R. I. (1957).

[25] R. E. Huff, Dentability and the Radon-Nikodym property, Duke Math. J., **41**, 111-114 (1974).

[26] R. E. Huff–P. D. Morris, Geometric characterization of the Radon-Nikodym property in Banach spaces. Studia Math. **56**, 157-164 (1976).

[27] R. C, James, The Radon-Nikodym and Krein-Milman properties for convex sets, Contemporary Math. **52**, 43-54 (1986).

[28] J. L. Kelley, Decomposition and Representation Theorems in Measure Theory, Math. Annalen **163**, 89-94 (1966).

[29] K. Kunen–H. P. Rosenthal, Martingales proof of geometrical results in Banach spaces, Pacific J. Math. **100**, 153-175 (1982).

[30] B. L. Lin, Topics in Banach spaces Theory, Lectures Notes in Math. National Tsing Hua University, China (1989).

[31] H. B. Maynard, A geometriacl characterization of Banach spaces havimg the Radon-Nikodym property, Trans. Amer. Math. Soc. **185**, 493-500 (1973).

[32] J. M. A. M. van Neerven, Reflexivity the dual Radon-Nikodym property, and Continuity of adjoint semigroups, Indag. Math. **1**, 365-380 (1990).

[33] J. M. A. M. van Neerven, The adjoint of a semigroup of Linear Operators, LNM № 1529, Spinger–Verlag, Berling (1993).

[34] R. S. Phillips, On linear transformation, Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 516-541 (1940).

[35] M. A. Rieffel, Dentable sub-sets of Banach spaces, with applications to a Radon-Nikodym theorem, Proc. Conf. Functional Analysis, Irving Calif. 1966. B. R. Gelbaum editor, Academic Press, London 71-71 (1966).

[36] H. L. Royden, Real Analysis, Second edition, Mac Millan Publishing, New York (1968).

[37] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third edition, Mc Graw-Hill, New York (1987)

[38] W. Rudin, Functional Analysis, Second edition, Mc Graw-Hille, New York (1991)

[39] W. Schachermayer, The Radon-Nikodym and the Krein-Milman properties are equivalent for strongly regular sets, Trans. Amer. Math. Soc. **303**, 673-687 (1987).

[40] I. E. Segal, Equivalence of Measure spaces, Amer. J. Math. **73**, 275-313 (1951).

[41] C. Stegall, The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **206**, 213-223 (1975).

[42] C. Stegall, The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces II, Trans. Amer. Math. Soc. **264**, 507-519 (1981).

[43] E. Thorp-R. Witley, The Strong Maximum Modulus theorem for analytic functions into Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **18**, 640-646 (1967).

[44] J. J. Uhl, A note on Radon-Nikodym property for Banch spaces, Rev. Roumaine Math. Pures App. **17**, 113-115 (1972).