Notas de Matemática, No. 237
Mérida, 2005.

Más sobre el módulo de convexidad de un cuerpo radicado

Luisa Sánchez de R

Abstract

Este trabajo pretende ser una continuación del estudio, de Zanco y Zucci [13], sobre el módulo de convexidad de un cuerpo radicado. Respondemos las interrogantes planteadas en dicho artículo y damos otras propiedades de esta función.

1 Introducción

En todo el trabajo consideraremos X un espacio de Banach, dim$X \geq 2$, con B_X y S_X la bola y la esfera unitaria respectivamente.

Comencemos recordando las definiciones del bastante conocido módulo de Clarkson y el módulo de Gurariy, así como caracterizaciones de ciertos espacios por dichos módulos.

El módulo de convexidad de Clarkson de X es la función $\delta_X : [0,2] \mapsto [0,1]$ definido por

$$\delta_X(\varepsilon) \quad = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X \ \ \| x-y \| = \varepsilon\right\} \tag{1.1}$$

La desigualdad $\delta_X(\varepsilon) > 0$ si $\varepsilon > 0$ caracteriza los espacios *uniformemente convexos*, y $\delta_X(2) = 1$ caracteriza a los espacios *estrictamente convexos.* Para las propiedades investigadas de este módulo remitimos a [3],[4], [10] y [12], entre una amplia bibliografía al respecto.

El módulo de convexidad de Gurariy de X, es la función $\beta_X : [0,2] \mapsto [0,1]$ definido por:

$$\beta_X(\varepsilon) \quad = \inf \left\{ 1 - \inf_{t\in[0,1]} \| tx + (1-t)y \| : x, y \in S_X, \| x - y \| = \varepsilon \right\} \tag{1.2}$$

De la misma manera que para el módulo de Clarkson, tenemos que la desigualdad $\beta_X(\varepsilon) > 0$ si $\varepsilon > 0$ caracteriza los espacios *uniformemente convexos*, y $\beta_X(2) = 1$ a los espacios *estrictamente convexos.* Referimos sólo a [7], [8] y [11] (las únicas que conocemos) para las propiedades investigadas de este módulo.

Además, en la bibliografía citada se prueba que en las definiciones (1.1) y (1.2) se puede cambiar S_X por B_X y $||x-y|| = \varepsilon$ por $||x-y|| \geq \varepsilon$.

En [7] se da la relación:

$$\delta_X(\varepsilon) \leq \beta_X(\varepsilon) \leq 2\delta_X(\varepsilon)$$

de la cual se tiene que el coeficiente de convexidad para ambos módulos coincide:

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon : \ \delta_X(\varepsilon) = 0\} = \sup\{\varepsilon : \ \beta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

De lo expuesto arriba es inmediata la caracterización:

$$\varepsilon_0 = 0 \Leftrightarrow X \text{es uniformemente convexo}$$

A continuación narramos, de manera breve, lo hecho por Zanco y Zucci en [13].

Sea X un espacio de Banach, un cuerpo K en X es un subconjunto acotado, cerrado, convexo con interior no vacío y denotamos su frontera por ∂K. Un cuerpo radicado en X es un par (K,r), donde K es un cuerpo y $r \in \mathrm{int}K$.

En el trabajo citado los autores extienden la definición de módulo de Gurariy, de la bola a un cuerpo radicado en el espacio X. Para este fin es esencial el concepto de funcional de Minkowski. Recordamos que si K es un cuerpo en X con $0 \in intK$, *el funcional de Minkowski de* K es la función subaditiva, homogenea, 1-positiva $q_K : X \to \mathrm{R}^+$ definida por

$$q_K(x) = \inf\{\alpha > 0;\ x \in \alpha K\}$$

Las siguientes definiciones son básicas para el desarrollo que sigue.

El M-diámetro de un cuerpo radicado (K,r) es el número positivo

$$d_M(K,r) = \sup\{q_{K-r}(x-y) : x,y \in K-r\}$$

Un par $\{x,y\}$ *de puntos de* (K,r) *se dicen M-diametrales si:*

$$d_M(K,r) = \max\{q_{K-r}(x-y), q_{K-r}(y-x)\}$$

y $\{x,y\}$ *es un par antipodal para* (K,r) *si* $r \in (x,y)$.

Como estas definiciones son invariantes bajo translaciones, de aquí en adelante será frecuente considerar el cuerpo radicado en cero $(K-r,0)$ en lugar de (K,r).

Cuando nos referimos a un cuerpo radicado (K, r), y no haya confusión posible, escribiremos q y d_M en lugar de q_{K-r} y $d_M(K, r)$.

En este contexto, los autores prueban que si $(K, 0)$ es un cuerpo radicado en cero en el espacio de Banach X, entonces $d_M \geq 2$ y:

$d_M = 2 \ \Leftrightarrow K$ *es simétricamente centrado respecto a cero.*

Con esta base los autores definen:

El módulo de convexidad del cuerpo radicado (K, r) *en el espacio de Banach* X *es la función* *:* $\Delta_{(K,r)}(\varepsilon) : [0, d_M] \to [0, 1]$ definido para $\varepsilon \in [0, d_M)$ ($[0, d_M]$ si dim$X = 2$) por:

$$\Delta_{(K,r)}(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf_{t\in[0,1]} q_{K-r}(tx + (1-t)y) : x, y \in K - r, q_{K-r}(x - y) \geq \varepsilon\}. \tag{1.3}$$

Si dim$X > 2$*, definimos:*

$$\Delta_{(K,r)}(d_M) = \inf\{\Delta_{K_F}(d_M K_F) : F \textit{ subespacio bidimensional de } X\},$$

donde si F *es un subespacio bidimensional de* X*, entonces* $K_F = ((K - r) \bigcap F, 0)$ *es un cuerpo radicado en cero en* F*.*

Cuando no haya confusión posible, simplificaremos la notación del cuerpo radicado $(K, 0)$ por K y $\Delta_{(K,0)}$ por Δ_K.

Por otro lado, si $(K, 0) = K$ (cuerpo radicado en cero) es simétricamente centrado con respecto al origen, el módulo de convexidad de K coincide con el módulo de Gurariy, (1.2), del espacio X renormado con bola unitaria K.

También:

El coeficiente de convexidad del cuerpo radicado (K,r) *es el número en* $[0,d_M]$ *definido por* $\varepsilon^0_{(K,r)} = \sup\{\varepsilon \in [0,d_M) : \ \Delta_{(K,r)}(\varepsilon) = 0\}$. De nuevo, simplificaremos la notación a ε^0 cuando no haya confusión posible. Geométricamente ε^0 es el tamaño del mayor segmento rectilineo de la frontera del cuerpo.

En este artículo los autores comentan que para cualquier cuerpo (K,r) en el espacio de Banach X se tiene $\Delta_{(K,r)}(0) = 0$ así como también la monotonía creciente de $\Delta_{(K,r)}$ en $[0,d_M)$ (sobre $[0,d_M]$ si $\dim X = 2$) demostrando lo siguiente:

Proposition 1.1 *Sea X un espacio de Banach.*

1. *Si (K,r) es un cuerpo radicado en X, para $\varepsilon \in [0,d_M)$ ($[0,d_M]$ si $dimX = 2$) tenemos:*

$$\Delta_{(K,r)}(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf_{t\in[0,1]} q_{K-r}(tx + (1-t)y) : \ x,y \in K - r, \ q_{K-r}(x-y) = \varepsilon\}$$

2. *Si $(K,0) = K$ es un cuerpo radicado en cero en X, entonces Δ_K es continua en el intervalo $[0,\alpha)$, donde $\alpha = \inf\{d_M(v) : v \in X - \{0\}\}$ y $d_M(v) = \sup\{q(x-y) : \ x,y \in K, \ x - y = \lambda v$ para algún $\ \lambda \in R\}$*

3. *Un cuerpo K es estrictamente convexo si y sólo si $\ \inf\{\Delta_{(K,r)}(d_M(K,r)) : r \in \ int\ K\} = 1$ (geométricamente dice que ∂K no contiene segmentos rectilineos). De lo cual se infiere: Si*

K es estrictamente convexo, para cualquier $r \in intK$ el módulo $\Delta_{(K,r)}$ es no-decreciente en $[0, d_M]$.

4. *Un cuerpo K es unif. convexo $\Longleftrightarrow \varepsilon^0_{(K,r)} = 0$ para cualquier $r \in intK$.*

El siguiente ejemplo será de utilidad en nuestro trabajo.

Ejemplo 1.1 ([13]) *Para $a > 0$, consideremos en $\Re^3$ la norma*

$$||(x_1, x_2, x_3)||_a = \{(\max(|x_1|, |x_2|))^2 + a^2 x_3^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Re^3$$

Sea B_1^a la bola unitaria relativa a $||.||_a$ y sea

$$J^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 : x_3 \geq 0\} \qquad J^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 : x_3 \leq 0\}$$

Sea $K_1 = (B_1^1 \cap J^+) \cup (B_1^{\frac{1}{2}} \cap J^-)$ y consideremos $(K_1, 0) = K$.

Es fácil ver que: $d_M = 3$ se alcanza únicamente para $\{(0,0,-2), (0,0,1)\}$, $\varepsilon^0 = 2$ (así K no es estrictamente convexo) y

$$\Delta_K(\varepsilon^0) = 0 = \Delta_K(d_M)$$

2 Otras propiedades de Δ_K

Con la intención de continuar el trabajo de [13], empezamos por dar la definición del módulo de convexidad de un cuerpo radicado en una versión más sencilla que la ofrecida por los autores citados.

Definition 2.1 *El módulo de convexidad del cuerpo radicado* (K, r) *en el espacio de Banach* X *es la función :* $\Delta_{(K,r)}(\varepsilon) : [0, d_M] \mapsto [0, 1]$ *definido para* $\varepsilon \in [0, d_M)$ *(*$[0, d_M]$ *si* $dim X = 2$*) por:*

$$\Delta_{(K,r)}(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf_{t\in[0,1]} q_{K-r}(tx + (1-t)y) : x, y \in \partial(K-r), q_{K-r}(x-y) = \varepsilon\}. \tag{2.1}$$

Si $dim X > 2$*, definimos:*

$$\Delta_{(K,r)}(d_M) = \inf\{\Delta_{K_F}(d_M K_F) : F \text{ subespacio bidimensional de } X\},$$

donde si F *es un subespacio bidimensional de* X*, entonces* $K_F = ((K-r)\bigcap F, 0)$ *es un cuerpo radicado en cero en* F*.*

Antes de comenzar la exposición de otras propiedades de este módulo, queremos comentar que por la naturaleza bidimensional de la definición (2.1) cuando $\varepsilon \in [0, d_M)$ ($\varepsilon \in [0, d_M]$ si $\dim X = 2$) en muchas pruebas de los resultados que siguen supondremos que X es un espacio normado de dimensión finita, lo cual es suficiente para que los resultados sean ciertos en espacios de dimensión infinita.

Además, será de uso frecuente la notación

$$m(x, y) = \inf_{t\in[0,1]} q(tx + (1-t)y),$$

donde q es el funcional de Minkowski asociado al cuerpo radicado $(K-r, 0)$ en consideración.

Note 2.1 Si (K, r) es un cuerpo radicado en el espacio de Banach X y $\varepsilon \in [0, d_M)$ ($[0, d_M]$ si $\dim X = 2$), entonces para $\Delta_{(K,r)}$ de (2.1) tenemos:

$$\Delta_{(K,r)}(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf_{t\in[0,1]} q(tx + (1-t)y) : x, y \in K - r, \quad q_{K-r}(x-y) = \varepsilon\}.$$

De lo anterior se infiere que $\Delta_{(K,r)}(\varepsilon)$ es no-decreciente para $\varepsilon \in [0, d_M)$ ($[0, d_M]$ si $\dim X = 2$), lo cual no se puede mejorar como veremos más adelante.

Realmente, tenemos de manera más general que en la definición (2.1) se puede cambiar $\partial(K-r)$ por $K-r$ y $q_{K-r}(x-y)=\varepsilon$ por $q_{K-r}(x-y)\geq\varepsilon$, teniendo en particular que nuestra definición (2.1) coincide con (1.3), y así con *1* de la proposición 1.1.

Las pruebas de las afirmaciones anteriores siguen prácticamente de cambiar la norma por el funcional de Minkowski de $K-r$ en las proposiciones 2.1, 2.2 y 2.3 de [11].

Con respecto a la continuidad de $\Delta_K(\varepsilon)$, donde $K=(K,0)$ es un cuerpo radicado en cero en el espacio de Banach X, mejoramos la *2* de la proposición 1.1. Antes presentamos un resultado, clave en la argumentación a seguir, que es una extensión del lema 1 de Gurariy [6] y su prueba muy similar, por eso la omitimos.

Lema 2.1 *Si $X=\Re^2$ y $(K,0)=K$ un cuerpo radicado en X. Sean $x,y\in K$, $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$ y la recta $A'B'$ paralela a $\overline{AB}$ y toca ∂K en el punto C'. Si C es el punto de intersección de los segmentos $\overline{OC'}$ y $\overline{AB}$, entonces:*

$$m(x,y)=\inf_{t\in[0,1]} q(tx+(1-t)y)=q(\overline{OC})=\frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OC'}|}$$

Si K es estrictamente convexo (∂K no contiene segmentos rectilineos), entonces C' es único y así es C.

Siguiendo las ideas de Goebel [5] empezaremos definiendo el siguiente conjunto:

Si $u,v\in K$, sea:

$$N(u,v)=\{(x,y);\ x,y\in K,\ x-y=\lambda u,\ \overline{x}=\gamma v \text{ para } \lambda,\gamma\geq 0\},$$

donde $\overline{x} = \overline{t}x + (1-\overline{t})y$ para algún $\overline{t} \in [0,1]$ es tal que

$$m(x,y) = \inf_{t\in[0,1]} q(tx + (1-t)y) = q(\overline{x}).$$

Ahora para cada $0 \leq \varepsilon < d_M u$ ($0 \leq \varepsilon \leq d_M u$ si $d_M u < d_M$ o $\dim X = 2$) y $u, v \in K$ tal que $N(u,v) \neq \emptyset$, sea la función:

$$\Delta_K(u,v,\varepsilon) = \inf\left\{1 - m(x,y); \quad (x,y) \in N(u,v), \quad q(x-y) \geq \varepsilon\right\}. \tag{2.2}$$

Theorem 2.1 *La función* $\Delta_K(u,v,\varepsilon)$ *de la definición* (2.2) *es convexa y*

$$\Delta_K(\varepsilon) = \inf\{\ \Delta_K(u,v,\varepsilon), \quad u,v \in K\} \quad \forall \varepsilon \in [0, d_M) \quad ([0,d_M] \text{ si } \dim X = 2)$$

Demostración: Sean $u, v \in K$ fijos tales que $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2) \in N(u,v)$ con $q(x_1 - y_1) \geq \varepsilon_1$ y $q(x_2 - y_2) \geq \varepsilon_2$ y $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Consideremos

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{ y } \quad y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),$$

entonces $x_3,\ y_3 \in K$ y como $x_1 - y_1 = \lambda_1 u$ y $x_2 - y_2 = \lambda_2 u$, tenemos:

$$x_3 - y_3 = \frac{1}{2}((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) = \frac{1}{2}((x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda u.$$

El vector $\overline{x}_3$ tal que $m(x_3,y_3) = q(\overline{x}_3)$ está alineado con $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ por el lema 2.1, donde $m(x_1,y_1) = q(\overline{x}_1)$ y $m(x_2,y_2) = q(\overline{x}_2)$, luego por la elección de x_3, y_3:

$$\overline{x}_3 = \frac{1}{2}(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \gamma v, \tag{2.3}$$

con lo cual $(x_3,y_3) \in N(u,v)$.

Por otro lado:

$$q(x_3 - y_3) = \frac{1}{2}\ (q(x_1 - y_1) + q(x_2 - y_2)) \geq \frac{1}{2}\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

así $\varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \leq \varepsilon_2$

De (2.3) y la definición de x_3 y y_3 es inmediato que:

$$m(x_3, y_3) = q(\overline{x}_3) = \frac{1}{2}(q(\overline{x}_1) + q(\overline{x}_2)) = \frac{1}{2}(m(x_1, y_1) + m(x_2, y_2))$$

y así:

$$1 - m(x_3, y_3) = \frac{1}{2}\,(1 - m(x_1, y_1)) + \frac{1}{2}\,(1 - m(x_2, y_2)).$$

lo cual es igual a:

$$\left\{1 - m(x, y);\quad (x, y) \in N(u, v),\quad q(x - y) \geq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right\} \supset$$

$$\supset\ \ \frac{1}{2}\,\{1 - m(x, y);\quad (x, y) \in N(u, v),\quad q(x - y) \geq \varepsilon_1\} +$$

$$\frac{1}{2}\,\{1 - m(x, y);\quad (x, y) \in N(u, v),\quad q(x - y) \geq \varepsilon_2\},$$

luego, tomando ínfimo se tiene:

$$\Delta_K(u, v, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\ ) \leq \frac{1}{2}\Delta_K(u, v, \varepsilon_1) + \frac{1}{2}\Delta_K(u, v, \varepsilon_2)$$

y como por definición $\Delta_K(u, v, \varepsilon)$ es acotada, se concluye que $\Delta_K(u, v, \varepsilon)$ es convexa.

Ahora, ya que cada par (x, y) con $x, y \in K$ pertenece a algún $N(u, v)$, entonces

$$\Delta_K(\varepsilon) = \inf\{\Delta_K(u, v, \varepsilon) : u, v \in K, u \neq 0,\ v \neq 0\}. \quad \blacksquare$$

Corollary 2.1 Δ_K *es continua en* $[0, d_M)$

Demostración: Es consecuencia del Teorema anterior y el siguiente resultado de Ullán [12]:

Lema *Sea* $\{f_\alpha\}$ *una familia de funciones convexas y crecientes definidas en un intervalo compacto* $[a,b]$ *tales que* $|f_\alpha(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ *y todo* α. *Entonces* $f(x) = \inf\{f_\alpha(x)\}$ *es continua en* $[a,b)$.

Del cual se infiere:

Si $\{f_\alpha\}$ es una familia de funciones convexas y crecientes definidas en el intervalo $[a,b)$ tales que $|f_\alpha(x)| \leq M \ \forall\alpha$ y $\forall x \in [a,b)$. Entonces $f(x) = \inf\{f_\alpha(x)\}$ es continua en $[a,b)$. ■

Este resultado no se puede mejorar, basta recordar el clásico espacio renormado X de c_0 dado por:

$$||x|| = ||x||_\infty + \left(\sum_1^\infty \left(\frac{x_n}{2^n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad x = (x_n)_1^\infty \in c_0$$

considerando $(K,0) = B_X$, tenemos $\Delta_K = \beta_X$ (el módulo de Gurariy) y conocemos que β_X es discontinua en $d_M = 2$.

Asímismo el teorema 2.1 nos permite probar el siguiente resultado (no planteado en [13]), con mucha facilidad.

Theorem 2.2 $\dfrac{\Delta_K(\varepsilon)}{\varepsilon}$ *es monótona creciente en* $(0,d_M)$ *(* $(0,d_M]$ *si dim*$X = 2$*).*

Demostración Para $u,v \in K$ fijos, como $\Delta_K(u,v,\varepsilon)$ es convexa por el teorema 2.1. Si tomamos $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_M$ ($0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq d_M$ si $\dim X = 2$), como $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}.0 + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.\varepsilon_2$ entonces

$$\Delta_K(u,v,\varepsilon_1) = \Delta_K\left(u,v,\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.0+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.\varepsilon_2\right) \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\Delta_K(u,v,\varepsilon_2)$$

lo cual implica:

$$\frac{\Delta_K(u,v,\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \leq \frac{\Delta_K(u,v,\varepsilon_2)}{\varepsilon_2}$$

y así $\dfrac{\Delta_K(u,v,\varepsilon)}{\varepsilon}$ es monótona creciente para $\varepsilon \in (0,d_M)$ $((0,d_M]$ si dim$X=2$), luego $\inf\limits_{u,v\in K}\dfrac{\Delta_K(u,v,\varepsilon)}{\varepsilon}$ es monótona creciente en $(0,d_M)$ $((0,d_M]$ si dim$X=2)$ ■

Veremos más adelante que este resultado no se puede mejorar

Como consecuencia del teorema anterior:

Corollary 2.2 *Para todo $r \in [0,1]$ y $\varepsilon \in [0,d_M)$ ($\varepsilon \in [0,d_M]$ si dim$X=2$):*

$$\Delta_K(r\varepsilon) \leq r\Delta_K(\varepsilon) \tag{2.4}$$

Demostración. Si $r=0$ ó $r=1$ se cumple (2.4), de la misma manera que si $\varepsilon=0$. Así dado $\varepsilon>0$ y $r=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\in(0,1)$ donde $0<\varepsilon_1<\varepsilon<d_M$ ($0<\varepsilon_1<\varepsilon\leq d_M$ si dim$X=2$), como por el teorema anterior tenemos $\dfrac{\Delta_K(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}\leq\dfrac{\Delta_K(\varepsilon)}{\varepsilon}$, entonces

$$\Delta_K(\varepsilon_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\Delta_K(\varepsilon)$$

y así

$$\Delta_K(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\ \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\Delta_K(\varepsilon)$$

obteniendo finalmente

$$\Delta_K(r\varepsilon) \leq r\Delta_K(\varepsilon) \quad \blacksquare$$

Verdaderamente el teorema 2.2 y el corolario 2.2 son equivalentes: $\Delta_K(r\varepsilon) \leq r\Delta_K(\varepsilon)\ \forall\varepsilon \in [0, d_M)([0, d_M]$ si dim$X = 2)$ y $r \in [0,1] \iff \dfrac{\Delta_K(\varepsilon)}{\varepsilon}$ es monótona creciente, para $\varepsilon \in (0, d_M)$ ($[0, d_M]$ si dim$X = 2$) (la necesidad es inmediata).

Corollary 2.3 *$\Delta_K(\varepsilon)$ es estrictamente creciente en $[\varepsilon^0, d_M)$ ($[\varepsilon^0, d_M]$ si dim$X = 2$).*

Demostración Sea $\varepsilon^0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Si $\varepsilon^0 = \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ se tiene por la definición de ε^0 y la continuidad de Δ_K en $[0, d_M)$ que $\Delta_K(\varepsilon_1) = 0 < \Delta_K(\varepsilon_2)$. Así, consideramos $\varepsilon^0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$; si existieran $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tales que $\Delta_K(\varepsilon_1) = \Delta_K(\varepsilon_2)$ entonces:

$$\frac{\Delta_K(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} = \frac{\Delta_K(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1} > \frac{\Delta_K(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2}$$

lo cual es una contradicción con el teorema 2.2. $\blacksquare$

Si K es el cuerpo radicado del ejemplo 1.1, vemos por el corolario anterior que el teorema 2.2 no se puede mejorar. Por el mismo ejemplo citado el resultado anterior tampoco se puede mejorar, sin embargo, si K es estrictamente convexo, entonces Δ_K es estrictamente creciente en $[\varepsilon^0, d_M]$. Esto sigue de la afirmación: Para cualquier cuerpo radicado $(K, 0) = K$:

$$\varepsilon < d_M \Rightarrow \Delta_K(\varepsilon) < 1,$$

y *3* de la proposición 1.1.

Corollary 2.4 *Sea $(K,0)=K$ un cuerpo radicado en el espacio de Banach X, entonces:*

$$\Delta_K(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{d_M} \quad \forall \varepsilon \in [0, d_M]$$

Demostración: Para $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = d_M$ la acotación es evidentemente cierta. Luego, para $0 < \varepsilon < d_M - \eta$ donde $\eta > 0$ es cualquiera, por el teorema 2.2 tenemos:

$$\frac{\Delta_K(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{\Delta_K(d_M - \eta)}{d_M - \eta} \leq \frac{1}{d_M - \eta}$$

tomando límite cuando $\eta \to 0^+$,

$$\frac{\Delta_K(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{1}{d_M}$$

y así la acotación buscada es cierta para $\varepsilon \in [0, d_M]$ ■

Note 2.2 Δ_K no necesariamente es convexa. Un ejemplo sencillo está dado en [2]: Sea $X = \Re^2$ con norma

$$\|x\| = \| \ (x_1, x_2) \ \| = \begin{cases} \max\{|x_1|, |x_2|\} & \text{si } \ x_1x_2 \geq 0 \\ \\ |x_1| + |x_2| & \text{si } x_1x_2 < 0 \end{cases}$$

Se prueba que $\beta_X(\varepsilon) = \max\left\{0, 1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$ si $\varepsilon \in (0, 2]$.

Considerando $(K,0) = B_X$, tenemos que $\Delta_K = \beta_X$(el módulo de Gurariy) es claramente una función no convexa.

References

[1] BÁRCENAS, D.; SÁNCHEZ, L.:*Algunas notas sobre el módulo de convexidad.* Divulgaciones Matemáticas, **6**. No **1**, 1998, 21-29.

[2] BARCENAS, D.; SANCHEZ, L.; GURARIY, V.; ULLAN A.:*On relations betwen moduli of normal spaces.* Quaestiones Mathematical Society. **27**, 2004, 137-145. Society.

[3] DAY, M.M.: *Normed linear spaces.* Thirh edition, Springer-Verlag, Berlín, Heilderberg, New York, 1973.

[4] DIESTEL, J.: *Sequence and series in Banach spaces.* Springer-Verlag, Berlín, Heilderberg, New York, 1984.

[5] GOEBEL, K.: *Convexity of balls and fixed-point theorems for mappings with non-expansive square.* Compositio Math. **22**, Fasc. 3, 1970, 269-274.

[6] GURARIY, N.I., Sozonov, Y.U.: *Normed space in which the unit sphere has no bias.* Matematicheskie Zametki, **7**, 1970, No 3, 307-309.

[7] GURARIY, V.I.: *On moduli of convexity and flattening of Banach spaces* . Soviet Math. Dokl. 1965, Tom 161, No 5.

[8] GURARIY, V.I.: *On differential properties of the convexity moduli of Banach spaces.* Mat. Issled., 2, 1967, 141-148.

[9] KLEE,V.; MALUTA,E.; ZANCO, C.: *Uniform properties of collections of convex bodies.* Universita degli studi di Milano, Quaderno No. 18, 1990.

[10] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L.: *Classical Banach spaces II.* Springer-verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[11] SÁNCHEZ, L.; ULLÁN, A.: *Some properties of Gurariy modulus of convexity.* Archiv der Math.,**71**, 1998, 399-406.

[12] ULLAN, A.: *Módulos de convexidad y lisura en espacios normados.* Tesis doctoral. Universidad de Extremadura, Badajoz, 1991.

[13] ZANCO, C., ZUCCHI, A.: *Moduli of rotundity and smoothness for convex bodies.* Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 7-b, 1993, 833-885.

LUISA SÁNCHEZ
Departamento de Matemáticas,Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: lsanchez@ula.ve