

Generalización de algunos teoremas del punto fijo

José R. Morales M.

Resumen

En estas notas nuestro objetivo es generalizar algunos resultados de la teoría del punto fijo dados por M.S.Khan [6], K.L.Singh [15], S.C.Nesic [14] y P.K.Bhola - P.L.Sharma [1] usando la noción de ω - distancia sobre un espacio métrico.

Introducción

En el año 1996, O.Kada - T.Suzuki - W.Takahashi [5], introdujeron la noción de ω - distancia sobre un espacio métrico. Tal noción la usaron para generalizar algunos resultados de la teoría del punto fijo en espacios métricos, entre los cuales podemos indicar, el famoso teorema del punto fijo de Caristi [2], un teorema del punto fijo dado por Ćirić [3].

En el mismo año, T. Suzuki - W. Takahashi [16], aportan nuevas propiedades de la ω - distancia y también la usan para generalizar el principio de contracción de Banach al introducir la noción de ω - contracción, el teorema del punto fijo de Nadler para funciones multivaluadas [13] y un resultado de Edelstein [4].

En el año 1977, T. Suzuki [17] define las aplicaciones del tipo ω - Kannan que evidentemente generalizan las respectivas nociones introducidas por Kannan [7] y también define las aplicaciones que satisfacen la condición de ω - Meir - Keller que extiende la respectiva noción dada en [9].

El autor en [10],[11] y [12] ha logrado generalizar algunos teoremas del punto fijo en espacios métricos, ampliamente conocidos, usando la noción de ω - distancia.

En estas notas nuestro objetivo es generalizar los resultados señalados en el resumen.

1 Preliminares.

En esta sección nuestro interés es definir la noción de ω - distancia sobre un espacio métrico, dar algunos ejemplos así como indicar ciertas propiedades de la ω - distancia que serán cruciales en la prueba de los resultados que veremos más adelante.

DEFINICIÓN 1.1

Sea (M, d) un espacio métrico. La aplicación $P : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ es llamada una ω - distancia sobre M si cumple las siguientes condiciones:

$$\omega_1.- \quad P(x, z) \leq P(x, y) + P(y, z) \text{ para todo } x, y, z \in M$$

$$\omega_2.- \quad \text{Para cualquier } x \in M$$

$$P(x, \cdot) : M \longrightarrow [0, +\infty)$$

es una función semicontinua inferiormente.

$$\omega_3.- \quad \text{Para cualquier } \varepsilon > 0 \text{ existe un } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que } P(z, x) \leq \delta \text{ y } P(z, y) \leq \delta \text{ entonces } d(x, y) \leq \varepsilon, \text{ para todo } x, y, z \in M.$$

EJEMPLO 1.2

1.- Sea (M, d) un espacio métrico. Entonces si $p = d$, claramente p es una ω - distancia sobre M .

2.- Sean $\phi \neq A \subset (M, d)$ y $P : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ una ω - distancia sobre M . (A, d_A) es un espacio métrico donde $d_A = d/A$. Entonces la aplicación $P : A \times A \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $P_A(x, y) = P(x, y)$ para todo $x, y \in A$, es una ω - distancia sobre A .

3.- Sea $(M, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La aplicación $P : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$P(x, y) = \|x\| + \|y\|$$

para todo $x, y \in M$, es una ω - distancia sobre M .

4.- Sea $(M, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces la aplicación $P : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$P(x, y) = \|y\|$$

para todo $x, y \in M$, es una ω - distancia sobre M .

NOTACIÓN 1.3

1.- Por $W(M)$, denotamos el conjunto de todas las ω - distancias sobre M . Por ejemplo 1, se tiene que $W(M) \neq \phi$.

2.- Por $W_0(M)$, denotamos el conjunto de todas las distancias simétricas sobre M . Por ejemplo 1, se tiene que d es una ω - distancia simétrica sobre M y por lo tanto $W_0(M) \neq \phi$. Del ejemplo 4, se tiene que P es una ω - distancia y así $p \in W_0(M)$. Por lo tanto $W_0(M) \subsetneq W(M)$.

El siguiente resultado se encuentra en [5] y es crucial en la prueba de los teoremas del punto fijo que veremos en la próxima sección.

LEMA 1.4

Sean (M, d) un espacio métrico y $p \in W(M)$. Sean $(x_n), (y_n)$ sucesiones en M y $(x_n), (y_n)$ sucesiones en M y (α_n) y (β_n) sucesiones en $[0, +\infty)$ convergentes a 0 y sean $x, y, z \in M$.

Entonces

a.- Si $P(x_n, y_n) \leq \alpha_n$ y $P(x_n, z) \leq \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_n \longrightarrow z$.

b.- Si $P(x_n, y) \leq \alpha_n$ y $P(x_n, z) \leq \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y = z$. En particular, si $P(x, y) = 0$ y $P(x, z) = 0$ entonces $y = z$.

c.- Si $P(x_n, x_m) \leq \alpha_n$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$, entonces (x_n) es Cauchy en M .

2 Resultados.

En esta sección daremos la generalización de los resultados anunciados en el resumen. Así, nuestro primer resultado generaliza un teorema dado por M.S.Khan [6] en 1978.

TEOREMA 2.1

Sean (M, d) un espacio métrico completo, $T : M \longrightarrow M$ una función de M en M y $P \in W(M)$. Si T satisface la siguiente condición:

(k1) : $P(Tx, Ty) \leq k(P(x, Tx)P(y, Ty))^{1/2}$ para todo $x, y \in M$ y $0 < k < 1$. Entonces T tiene un único punto fijo en M .

Prueba:

Sea $x \in M$ un punto arbitrario. Para cada $n \geq 1$, usando la condición (k1) obtenemos:

$$P(T^n x, T^{n+1} x) \leq k(P(T^{n-1} x, T^n x)P(T^n x, T^{n+1} x))^{1/2}$$

lo cual implica que

$$P(T^n x, T^{n+1} x) \leq \alpha P(T^{n-1} x, T^n x)$$

donde $k = \alpha^2$.

De ésta última desigualdad se tiene,

$$P(T^n x, T^{n+1} x) \leq \alpha^n P(x, Tx) \tag{1}$$

para todo $n \geq 1$.

De (1) y como $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T^n x, T^{n+1} x) = 0 \tag{2}$$

Ahora, si $m > n$ entonces

$$\begin{aligned}
 P(T^n x, T^m x) &\leq P(T^n x, T^{n+1} x) + \dots + P(T^{m-1} x, T^m x) \\
 &\leq (\alpha^n + \dots + \alpha^{m-1}) P(x, Tx) \\
 &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} P(x, Tx),
 \end{aligned}$$

y por el lema 1.4 se obtiene que $(T^n x)$, es una sucesión de Cauchy en M y por lo tanto existe un $z \in M$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = z. \quad (3)$$

Como $P(T^n x, \cdot)$ es una función semicontinua inferiormente entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} P(T^n x, z) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \inf P(T^n x, T^m x) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} P(x, Tx) = 0,
 \end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T^n x, z) = 0. \quad (4)$$

Por otra parte tenemos que

$$P(T^n x, Tz) \leq k[P(T^{n-1} x, T^n x)P(z, Tz)]^{1/2}$$

y de acá se sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T^n x, Tz) = 0. \quad (5)$$

De (4) y (5) y por el lema 1.4 se tiene

$$z = Tz.$$

$$P(z, z) = P(Tz, Tz) \leq k(P(z, Tz)P(z, Tz))^{1/2}$$

y así

$$P(z, z) = 0. \quad (6)$$

Finalmente, mostraremos que el punto fijo de T , z es único. En efecto. Consideremos $y = Ty$.

Entonces

$$P(z, y) = P(Tz, Ty) \leq k(P(z, Tz)P(y, Ty))^{1/2}$$

luego

$$P(z, y) = 0. \quad (7)$$

Por (6) y (7) y el lema 1.4 se concluye que

$$z = y \quad \blacksquare$$

El siguiente resultado generaliza el teorema 2.1

TEOREMA 2.2

Sean (M, d) un espacio métrico completo, $P \in W(M)$ y $T : M \rightarrow M$ una aplicación supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, T^n satisface la condición (k1). Entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba:

Como para algún $n \in \mathbb{N}$, T^n satisface la condición (k1), entonces por el teorema 2.1, existe un único $z \in M$ tal que $T^n z = z$. Pero $T(T^n z) = T^n(Tz) = Tz$, así Tz es un punto fijo de T^n y por su unicidad se tiene que $z = Tz$.

Usando, las ideas de Maia [8] generalizamos los dos resultado dados anteriormente.

TEOREMA 2.3

Sea M un conjunto no-vacio d y p dos métricas sobre M y q y q , dos w -distancias sobre M inducidas por d y p respectivamente. Sea $T : M \rightarrow M$ una función. Supongamos que,

- a.- $p(x, y) \leq q(x, y)$, para todo $x, y \in M$
- b.- (M, d) es un espacio métrico completo.
- c.- T satisface la condición:

(k'_1) : $q(Tx, Ty) \leq k(q(x, Tx)q(y, Ty))^{\frac{1}{2}}$ para todo $x, y \in M$ y $0 < k < 1$. Entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba:

Sea $x \in M$. Definimos $x_n = Tx_{n-1} = T^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Usando la condición (k) se prueba facilmente que (x_n) es una sucesión de Cauchy en (M, p) . Por (a) se tiene que (x_n) es una sucesión de Cauchy

en (M, d) y por (b) existe un $z \in M$ tal que x_n converge a z . El resto de la prueba es similar al teorema 2.1.

TEOREMA 2.4

Sea d y p dos métricas sobre M , p y q dos W -distancia sobre M inducidas por d y p respectivamente y $T : M \rightarrow M$ una aplicación de M en M .

Supongamos que,

a.- $p(x, y) \leq q(x, y)$, para todo $x, y \in M$

b.- (M, d) es completo.

c.- Para $T : (M, d) \rightarrow (M, d)$ existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n satisface la condición k'_1 .

Entonces existe un único $z \in M$ tal que $z = Tz$

Prueba: Es similar al teorema 2.3

Usando las ideas de Telci - Tas [18] obtenemos una nueva generalización del teorema 2.1

TEOREMA 2.5

Sean (M, d) un espacio métrico arbitrario, $P \in W_0(M)$ y $T : M \rightarrow M$ una función tal que:

a.- T satisface la condición (k'_1) ;

b.- Existe $u \in M$ tal que

$$\varphi(\mu) = \inf\{\varphi(x)/\varphi(x) = P(x, Tx), x \in M\}$$

Entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba:

Supongamos que $u \neq Tu$, pues de lo contrario u sería un punto fijo de T .

Sea $x = u$ y $y = Tu$. Aplicamos la condición (k'_1) y obtenemos

$$P(Tu, T^2u) \leq k[P(u, Tu) \cdot P(Tu, T^2u)]^{1/2}$$

luego, $P(Tu, T^2u) \leq k^2P(u, Tu)$ y por lo tanto,

$$P(Tu, T^2u) < P(u, Tu).$$

Por (b) tenemos que

$$\varphi(Tu) < \varphi(u)$$

lo cual es una contradicción.

Así, $u = Tu$ y u es un punto fijo de T .

Ahora,

$$P(u, u) = P(Tu, Tu) \leq k[P(u, Tu)P(u, Tu)]^{1/2}$$

y de acá se obtiene

$$P(u, u) \leq kP(u, u)$$

y por lo tanto,

$$P(u, u) = 0 \tag{8}$$

Por otra parte sea $v \in M$ tal que $v = Tv$.

Entonces

$$P(u, v) = P(Tu, Tv) \leq k[P(u, Tu)P(v, Tv)]^{1/2}$$

y de acá facilmente vemos

$$P(u, v) = 0 \tag{9}$$

Así, por (8),(9) y lema 1.4 se concluye que $u = v$.

El siguiente resultado generaliza el teorema 1 dado por M.S.Khan [6] en 1978.

TEOREMA 2.6

Sean (M, d) un espacio métrico compacto, $T : M \longrightarrow M$ es una función continua y $P \in W(M)$. Si T satisface la siguiente condición:

$$(k2) : P(Tx, Ty) < (P(x, Tx)P(y, Ty))^{1/2} \quad \text{para todo } x, y \in M.$$

Entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba:

Consideremos la aplicación

$$\varphi : M \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por

$$\varphi(x) = P(x, Tx) \quad \text{para todo } x \in M.$$

Como T es una función continua, es claro que φ es una función semicontinua inferiormente sobre el compacto M . Por lo tanto φ alcanza su valor minimo z sobre M :

$$\varphi(z) = \inf_{x \in M} \varphi(x).$$

el resto de la prueba es similar al teorema 2.5

El siguiente resultado es una generalización del único teorema dado por P.K. Bhola - P.L.Shama en [1] en 1991.

TEOREMA 2.7

Sean (M, d) un espacio métrico completo, $P \in W_0(M)$ y $T : M \longrightarrow M$ una aplicación que satisface la siguiente condición:

(k3) : $P(Tx, Ty) \leq \alpha[(P(x, Tx)P(y, Ty))]^{1/2} + \beta[(P(x, Ty)P(y, Tx))]^{1/2}$ para todo $x, y \in M$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$ y $P(x, x) = 0$ para todo $x \in M$.

Entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba:

Sea $x \in M$ un punto arbitrario. Por (k3) para $n \geq 1$ obtenemos

$$P(T^n x, T^{n+1} x) \leq \alpha(P(T^{n-1} x, T^n x)P(T^n x, T^{n+1} x))^{1/2} + \beta(P(T^{n-1} x, T^{n+1} x)P(T^n x, T^n x))^{1/2}. \quad (10)$$

Por hipótesis, $P(T^n x, T^n x) = 0$ luego de (10) se obtiene

$$P(T^n x, T^{n-1} x) \leq \alpha(P(T^{n-1} x, T^n x)P(T^n x, T^{n+1} x))^{1/2}$$

para la prueba de la existencia del punto $z \in M$ tal que $z = Tz$ se sigue como en el teorema 2.1.

Ahora, mostraremos que z es el único punto fijo de T . En efecto. Consideremos $y = Ty$.

Entonces

$$P(z, y) = P(Tz, Ty) \leq \alpha[P(z, Tz)P(y, Ty)]^{1/2} + \beta[P(z, Ty)P(y, Tz)]^{1/2}$$

Como

$$P(z, Tz) = P(z, z) = 0, \quad (11)$$

entonces

$$P(z, y) \leq \beta P(z, y)$$

y por lo tanto,

$$P(z, y) = 0. \tag{12}$$

Por (11), (12) y lema 1.4 se tiene que

$$z = y. \quad \blacksquare$$

Ahora usando las ideas de Telci - Tas [18] obtenemos la siguiente generalización del teorema 2.7.

TEOREMA 2.8

Sean (M, d) un espacio métrico arbitrario, $P \in W_0(M)$ y $T : M \rightarrow M$ es una función de M en M supongamos que:

- a.- T satisface la condición (k3).
- b.- Para todo $x \in M$, $P(x, x) = 0$.
- c.- Existe un punto $z \in M$.

tal que

$$\varphi(z) = \inf_{x \in M} \left\{ \varphi(x) / \varphi(x) = P(x, Tx) \right\}.$$

Entonces existe un único punto fijo para T .

Prueba: Por no ser difícil se deja al lector.

usando las ideas de Maia [8] el teorema 2.7 puede ser generalizado en la forma siguiente.

TEOREMA 2.9

Sean d y P , métricas sobre M , P y q ω - distancia sobre M inducida por d y P respectivamente y $T : M \longrightarrow M$ supongamos que:

a.- $P(x, y) \leq q(x, y)$, para todo $x, y \in M$.

b.- (M, d) es completo

c.- $T : (M, \rho) \longrightarrow (M, \rho)$

satisface la siguiente condición:

$$q(Tx, Ty) \leq \alpha[q(x, Tx)q(y, Ty)]^{1/2} + \beta[q(x, Ty)q(x, Ty)]^{1/2}$$

para todo $x, y \in M$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$, $q \in W_0(M)$ y $q(x, x) = 0$ para todo $x \in M$.

Entonces T tiene único punto fijo.

Prueba: Se deja al lector.

Ahora pasamos a generalizar el teorema 1 dado por S.C.Nesic [14] en el año 1995.

TEOREMA 2.10

Sean (M, d) un espacio métrico completo, $P \in W(M)$ y $T : M \longrightarrow M$ una aplicación que satisface la condición:

(k4) : $P(x, Tx) + P(y, Ty) \leq \alpha P(x, y)$ para todo $x, y \in M$ y $1 < \alpha < 2$. Entonces existe $z \in M$ tal que $z = Tz$.

Prueba:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario.

Definimos la sucesión (x_n) por

$$x_n = T^n x_0 = T x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Entonces tomando $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$, $n \in \mathbb{N}$ y aplicando la condición (k4), se tiene que

$$P(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha - 1)P(x_{n-1}, x_n)$$

luego

$$P(x_n, x_{n+1}) \leq (\alpha - 1)^n P(x_0, T x_0)$$

de esta última desigualdad y como $0 < \alpha - 1 < 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, x_{n+1}) = 0. \quad (13)$$

Ahora para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$ tenemos

$$\begin{aligned} P(x_n, x_m) &\leq P(x_n, x_{n+1}) + \dots + P(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left[(\alpha - 1)^n + \dots + (\alpha - 1)^{m-1} \right] P(x_0, T x_0) \\ &= (\alpha - 1)^n \left(1 + (\alpha - 1) + \dots + (\alpha - 1)^{m-n-1} \right) P(x_0, T x_0) \\ &= \frac{(\alpha - 1)^n}{1 - (\alpha - 1)} \left(1 - (\alpha - 1)^{m-n-1} \right) P(x_0, T x_0), \end{aligned}$$

y usando lema 1.4 se tiene que (x_n) es una sucesión de Cauchy en M y por lo tanto existe $z \in M$ tal que $x_n \rightarrow z$.

Por la semicontinuidad inferior de $P(x, \cdot)$ para todo $x \in M$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup P(x_n, z) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \lim_{m \rightarrow \infty} \inf P(x_n, x_m) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \left[\frac{(\alpha - 1)^n}{1 - (\alpha - 1)} \right] \left(1 - (\alpha - 1)^{m-n-1} \right) P(x_0, Tx_0) \end{aligned}$$

y de acá obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P(x_n, z) = 0. \quad (14)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} P(x_n, Tz) &= P(T^n x_0, Tz) \leq (\alpha - 1)P(T^{n-1} x_0, z) \\ &\leq (\alpha - 1)P(x_{n-1}, z) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n, Tz) = 0. \quad (15)$$

Así, $z = Tz$. ■

El teorema 2.10 lo podemos generalizar en la forma siguiente.

TEOREMA 2.11

Sean d y P métricas sobre M , P y q ω -distancia sobre M inducidas por d y P respectivamente y $T : M \rightarrow M$. Supongamos que:

a.- $P(x, y) \leq q(x, y)$, para todo $x, y \in M$.

b.- (M, d) es un espacio métrico completo.

c.- La aplicación $T : (M, \rho) \longrightarrow (M, \rho)$

satisface la siguiente condición:

$$(k4') : q(x, Tx) + q(y, Ty) \leq q(x, y) \text{ para todo } x, y \in M, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Entonces existe un $z \in M$ tal que $z = Tz$.

Prueba: Se deja al lector.

El siguiente resultado extiende el teorema 2.2 dado por K.L.Singh [15] en 1971.

TEOREMA 2.12

Sean (M, d) un espacio métrico completo, $P \in W(M)$ y $T : M \longrightarrow M$ una función que satisface la siguiente condición:

$$(k5) : P(Tx, Ty) \leq \alpha P(Tx, Ty) + \alpha P(x, y) \text{ para todo } x, y \in M, \quad 1 < \alpha < 1/2.$$

Entonces existe un único $z \in M$ tal que $z = Tz$.

Prueba:

Sea $x_0 \in M$ un punto arbitrario y definimos $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1, 2, \dots$. Aplicamos la condición (k5) y obtenemos

$$\begin{aligned} P(x_n, x_{n+1}) &= P(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha P(Tx_{n-1}, Tx_n) + \alpha P(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

luego,

$$P(x_n, x_{n+1}) = \frac{\alpha}{1-\alpha} P(x_{n-1}, x_n)$$

y

$$P(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n P(x_0, Tx_0).$$

usando esta última desigualdad y como en los casos anteriores se prueba fácilmente que (x_n) es una sucesión de Cauchy en M y por lo tanto existe un $z \in M$ tal que $x_n \rightarrow z$.

El hecho que z es el único punto fijo de T se prueba en forma similar al teorema 2.1.

El teorema 2.12 puede ser extendido en la forma siguiente,

TEOREMA 2.13

Sean d y P métricas sobre M , P y q ω - distancia sobre M inducidas por d y ρ respectivamente y $T : M \rightarrow M$ una función. Supongamos que,

a.- $P(x, y) \leq q(x, y)$, para todo $x, y \in M$.

b.- (M, d) es un espacio métrico completo.

c.- La aplicación $T : (M, \rho) \rightarrow (M, \rho)$

satisface la siguiente condición:

$$(k5') : q(Tx, Tx) \leq \alpha q(Tx, Ty) + \alpha q(x, y) \text{ para todo } x, y \in M, \quad 1 < \alpha < 1/2.$$

Entonces existe un único $z \in M$ tal que $z = Tz$.

Prueba: Es fácil y se deja al lector.

References

- [1] P.K.Bhola - P.I Sharna, A fixed point theorem, Bull. Malaysian Math.Soc. 14, (1991), 39-40.
- [2] J Caristi, Fixed Point theorems satisfying inwardness conditions, Trans. A M.S. 215, (1976), 241-251.
- [3] Lj. Ciric, A generalization of Banach's Contraction principle, Proc. A. M.S. 45,(1974), 267-273.
- [4] M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, Proc. A. M. S. 12, (1961), 7-10.
- [5] O. kada- T.Suzuki-w. Takahashi, Nonconvex minimization theorems in complete metric spaces, Math. Jap. 44,(1996),381-391.
- [6] M.S. khan, of fixed point Theorems, Math. Jap. 23,2,(1978),201-204
- [7] R.kannan, some results on fixed points-II. A.M. Monthly,76,(1969),405-408.
- [8] M.G. Maia, unosservazione sulle Contrazione metriche, Rend- Sen. Mat. univ. Padova,40,(1968),179-143.
- [9] A. Meir-E.keeler, A theorem on contraction mappings, J.Math. Anal Appl. 28, (1969),326-329.
- [10] J.R. Morales, Generalizations of some fixed point theorems, notas de Matemáticas, ULA-199,1999.
- [11] J.R Morales Generalization of Rakotch's fixed point theorem, notas de matemáticas-ULA-204-2000.

- [12] J.R Morales, Fixed point's theorems for $\omega - \varphi$ - Contractions, por aparecer.
- [13] S.B. Naldler, Jr. Multivalued Contraction mappings, *Pacif. Joorn. Math.*30,(1969),475-488.
- [14] S.C Nesic, of fixed point theorems in Banach spaces over topological semifields, *Math. Balkanica*,9, (1995), 193-196.
- [15] K.L. singh, Nonexpasive mappings and fixed point theorems in Banachs spaces, *R.V. Mat univ. Parma* (2),12, (1971),179-187.
- [16] T.Suzuki-w.Takahashi, Fixed point theorems and characterizations of metric Completen-ers, *Top. Meth. in nonlinear Analysis*, 8, (1976), 371-382.
- [17] T. suzuki, several fixed point theorems in complete metric spaces, *Yokohama math. Journ.*44,(1997),61-72.
- [18] M-Telci-k.Tas, some fixed point theorems on an arbitrary metric space, *Math-Balkanica*, 6,3(1992),251-255.

ROBERTO MORALES

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: moralesj@ula.ve