UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE MATEMATICA

SOBRE LA PROPIEDAD (ω M)

POR

JOSE R. MORALES M.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

Sobre la propiedad (ωM)

José R. Morales M.

Notas de Matemática
Serie: Pre-Print
No. 190

Mérida - Venezuela
1999

Notas de Matemática, No. 190
Mérida, February 1999.

Sobre la propiedad (ωM) *

José R. Morales M.

Abstract

In this paper we study the property (ωM) in Banach spaces and its relation with other geometrical properties of Banach spaces.

Resumen

En este trabajo estudiaremos la propiedad (ωM) en espacios de Banach y su relación con otras propiedades geométricas de los espacios de Banach.

1 Notación

Seguiremos la terminología estándar que puede encontrarse en las monografías de M.M. Day [1] y de V.I. Istratescu [3].

Sea E un espacio de Banach. B_E denota la bola unitaria cerrada de E, S_E denota la esfera unitaria de E y E^* su dual topológico. Sea (x_n) una suceción en E y por $x_n \xrightarrow{\omega} x$ denotamos la convergencia débil y la separación de x_n es

$$Sep\,(x_n) = Inf\ \{\|x_n - x_m\|, n \neq m\}.$$

2 La Propiedad (ωM)

En 1965, L.P. Vlasov [18] introdujo los espacios (CLUR), pero más tarde en 1975, B.B. Panda y O.P. Kapoor [14], de manera independiente estudiaron tales espacios y los llamaron como aquéllos que poseen la propiedad (M) y esta es la notación que el autor ha seguido en sus trabajos.

Definición 2.1 *Sea E un espacio de Banach. Se dice que E tiene la Propiedad(M) si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2,$$

entonces x_n posee una subsucesión convergente.

El autor en [8] generalizó la anterior propiedad e introdujo los espacios que poseen la propiedad (K-M) en la forma siguiente.

* Este trabajo fue financiado por CDCHT-ULA: C-903-98-05-B

Definición 2.2 *Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Se dice que E posee la propiedad (K-M) si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tales que,*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k + 1, \cdots$$

entonces (x_n) posee una subsucesión convergente.

Claramente si $k = 1$, entonces

$$Propiedad(1 - M) \Longleftrightarrow Propiedad(M)$$

esto es, la Propiedad (1-M) y la Propiedad (M) coinciden.

Recientemente, el autor en [11], introdujo la Propiedad (ωM), que de hecho generaliza las dos propiedades dadas anteriormente.

Definición 2.3 *Se dice que el espacio de Banach E satisface la Propiedad (ωM) , si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tales que,*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k + 1, \quad \forall k \in N$$

entonces (x_n) posee una subsucesión convergente.

En [10], el autor mostró que:

$$Propiedad(1 - M) \Rightarrow Propiedad(2 - M) \cdots \Rightarrow Propiedad(k - M).$$

3 Heredabilidad de la propiedad (ωM)

Sea E un espacio de Banach y F un subespacio cerrado de E. La norma de E y la norma inducida en F se denotan por $\|\cdot\|$, mientras que la norma en el cociente E/F será denotada por $\|\cdot\|_Q$. Sea $q :\to E/F$ la aplicación canónica.

Teorema 3.1 *Sean E un espacio de Banach que posee la propiedad (ωM) y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, F también satisface la Propiedad (ωM) .*

Prueba:
Es clara.

Teorema 3.2 *Sean E un espacio de Banach reflexivo que satisface la propiedad (ωM) y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado. Entonces E/F posee la propiedad (ωM) .*

Prueba:
Sean $\tilde{x} \in S_{E/F}$ y $(\tilde{x}_n) \subset B_{E/F}$ tales que,

$$\lim_{n_1, \cdots, n_k \to \infty} \|\tilde{x} + \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{n_i}\|_q = k + 1, \ \forall k \in N.$$

Como E es reflexivo, entonces $S_{E/F} \subset q(S_E)$ y por tanto existe $x \in S_E$ y $x_n \in B_{E/F}$, tales que $q(x) = \widetilde{x}$ y $q(x_n) = \widetilde{x}_n$.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
k+1 &= \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|\widetilde{x} + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_{n_i}\|_q \leq \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\|_q \\
&\leq \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \left(\|x\| + \sum_{i=1}^{k} \|x_{n_i}\| \right) = k+1,
\end{aligned}
$$

y así,

$$\lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|x + \textstyle\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1, \; \forall k \in N$$

Como E es un espacio que posee la propiedad (ωM) , entonces (x_n) posee una subsucesión (x_n) convergente en B_E y por lo tanto, $q(x_m) = \widetilde{x}_m$ es una subsucesión de $(\widetilde{x}_n)$ convergente en $B_{E/F}$. Esto nos prueba que E/F posee la propiedad (ωM) .

Este resultado nos permite aumentar lo logrado en nuestro trabajo [13].

Consideramos conveniente dejar planteadas las siguientes interrogantes,

Problema 3.1 *Sea E un espacio de Banach que satisface la Propiedad (ωM) . ¿ Posee $l_p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$ la Propiedad (ωM) ?*

Problema 3.2 *Sea E_i una familia arbitraria de espacios de Banach que poseen la Propiedad (ωM) . ¿ Posee el espacio producto, $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ la Propiedad (ωM) ?.*

Problema 3.3 *Sean E un espacio de Banach y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado, Supongamos que F y E/F poseen la Propiedad (ωM) . Entonces,¿ posee E la Propiedad (ωM) ?*

La anterior interrogante es conocida como el problema de los tres espacios.

4 La Propiedad (ωM)y su relación con otras propiedades geométricas de los espacios de Banach

En 1955, A. R. Lovaglia [7], introdujo los espacios (LUR) en la forma siguiente:

Definición 4.1 *sea E un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio localmente uniformemente convexo, (LUR), si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $x_n \subset B_E$ tales que, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

En [14], los autores hicieron notar la siguiente caracterización de los espacios (LUR).

Teorema 4.1 *Sea E un espacio de Banach. Entonces,*

$$(LUR) \Longleftrightarrow (R) + Propiedad(M).$$

En el teorma anterior, (R) denota los espacios estrictamente convexos, que se definen como sigue:

Definición 4.2 *Se dice que un espacio de Banach es estrictamente convexo, (R), si para todo $x, y \in S_E$ y $\|x+y\| = 2$, entonces $x = y$.*

En 1988, Nan-Chao Xun y Wang Jian-Hua, [20], introducen los espacios LKR que generalizan los espacios LUR.

Definición 4.3 *Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio LKR, si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $x_n \subset B_E$ tales que,*

$$\lim_{n_1,\cdots,n_k\to\infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1,$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

El siguiente resultado es ampliamente conocido (ver [12]),

$$LUR \Longleftrightarrow L1 - R \cdots \Longrightarrow LKR \Longrightarrow L(k+1)R \Longrightarrow R.$$

El autor en [8] logró la siguiente caracterización de los espacios LKR.

Teorema 4.2 *Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Entonces,*

$$LKR \Longrightarrow (R) + Propiedad(k - M).$$

En 1991, Bur-Luh Lin y Wenyao Zhang [6], generalizan los espacios LKR e introducen los espacios $L\omega R$ como sigue,

Definición 4.4 *Sea E un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio $L\omega R$ si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ y para todo $x \in S_E$ tales que,*

$$\lim_{n_1,\cdots,n_k\to\infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1 \quad \forall k \in N,$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Es claro que,

$$\forall k \in N, \quad LKR \Longrightarrow L\omega R \Longrightarrow R.$$

El autor en [12], mostró la siguiente caracterización de los espacios $L\omega R$,

Teorema 4.3 *Sea E un espacio de Banach. Entonces,*

$$L\omega R \Longleftrightarrow R + Propiedad(\omega M)$$

En 1958, K. Fan e I. Glicksberg [2], introdujeron varias propiedades de los espacios de Banach y estamos interesados en la propiedad (G) y la propiedad (H). Esta última propiedad fué inicialmente definida en espacios estrictamente convexos, pero M.M. Day en su monografía [1], elimina la condición de ser el espacio (R) y es en esta forma como se le conoce actualmente.

Definición 4.5 *Un espacio de Banach E, se dice que posee la propiedad (G) si para cada* $x \in S_E$ *y todo* $\epsilon > 0$ *se tiene que* $x \notin \overline{C_o}(M(x,\epsilon))$*,donde,* $\overline{C_o}(M(x,\epsilon))$ *denota la cápsula convexa de* $M(x,\epsilon) = \{y/y \in B_E, \|y-x\| \geq \epsilon\}$.

Definición 4.6 *Un espacio de Banach E se dice que satisface la propiedad (H) si para todo* $x \in S_E$ *y cada sucesión* $(x_n) \subset E$ *tales que,* $x_n \rightharpoonup x$ *y* $\|x_n\| \to \|x\|$*, entonces,* $\|x_n - x\| \to 0$.

En [2], los autores probaron:

$$\begin{array}{ccccc} (LUR) & \Longrightarrow & propiedad(G) & \Longrightarrow & Propiedad(H) \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(R)} & & \end{array}$$

El siguiente resultado fué logrado de manera independiente por Nao-Chao-Xun y Wang Jian-Hua [19] y por el autor en [8]:
Para $k \geq 1$ entero, se tiene

$$LKR \Rightarrow propiedad(G)$$

, Ahora lo generalizamos de la siguiente forma:

Teorema 4.4 *Sea E un espacio de Banach. Entonces*

$$L\omega R \Rightarrow propiedad(G)$$

.

Prueba:
Supongamos que E es un espacio $L\omega R$, pero no posee la propiedad (G). Entonces existen un $x \in S_E$ y un $\epsilon > 0$ tales que $x \in \overline{C_o}(M(x,\epsilon))$. Seleccionemos un $X^* \in S_{E^*}$ tal que $x^*(x) = 1$.

Puesto que,

$$\sup x^*[\overline{C_o}(M(x,\epsilon))] = \sup x^*[M(x,\epsilon)] \leq 1,$$

y,

$$x(x) \leq \sup x[\overline{C_o}(M(x,\epsilon))],$$

se concluye que, $\sup x(M(x,\epsilon)) = 1$

Ahora, sea $(x_n) \subset M(x,\epsilon)$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} x * (x_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1,$$

más aún, $\forall k \in N$,

$$1 \leq \frac{1}{k+1}\|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| \geq \frac{1}{k+1} x*(x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}) \to 1$$

para $n_1 \cdots n_k \to \infty$, y así,

$$\lim_{n_1,\cdots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1.$$

Ahora, como E es un espacio $L\omega R$, entonces $x_n \to x$, lo cual es imposible por cuanto $(x_n) \subset M(x, \epsilon)$.

Esta contradicción establece el resultado.

Corolario 4.1 *Sea E un espacio de Banach. Entonces,*

$$L\omega R \Rightarrow Propiedad(H).$$

En [14], los autores probaron:

$$Propiedad(M) \Rightarrow Propiedad(H)$$

y el autor generalizó el anterior resultado en la forma siguiente:

$k \geq 1$ entero,

$$Propiedad(k - M) \Rightarrow Propiedad(H)$$

Ahora tenemos,

Teorema 4.5 *Sea E un espacio de Banach. Entonces,*

$$Propiedad(\omega M) \Rightarrow Propiedad(H).$$

Prueba:

Sea E un espacio de Banach que posee la propiedad (ωM). Sean $x \in S_E$ y $x_n \subset E$ tales que, $x_n \to x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_n) \subset S_E$. Entonces,

$$\begin{aligned} k+1 &= \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} X^*[x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}] \\ &\leq \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|X^*\| \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| \\ &\leq \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\leq \lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1, \quad \forall k \in N.$$

Como E satisface la propiedad (ωM), entonces x_n posee una subsucesión convergente, (x_{n_k}) y como cualquier subsucesión de (x_{n_k}) es convergente y $x_n \to x$, entonces $x_n \to x$. Así, E posee la Propiedad (H).

En 1979, F. Sullivan [17], introduce una nueva generalización de los espacios (LUR), los espacios LK-UR.

Definición 4.7 *Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio LK-UR, si para todo $\epsilon > 0$ y cada $x \in S_E$, existe un $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que si*

$$x_i \in B_E, \quad i = 1, \cdots, k \quad con \quad \frac{1}{1+k} \quad \|x + \sum_{i=1}^{k} x_i\| \geq 1 - \delta,$$

entonces, $V(x, x_1, \cdots x_k) > \epsilon$, donde $V(x, x_1, \cdots x_k)$ se define como

$$V(x, x_1, \cdots, x_k) = \sup_{i=1\cdots,k} \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & \cdots & f_1(x_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(x) & \cdots & f_k(x_k) \end{matrix} \right\|_{f_i \in B_E} \right\}$$

y donde $\|\cdot\|$ denota el determinante.

En [10] encontramos el siguiente resultado,

$$LUR \Leftrightarrow L1 - UR \Rightarrow \cdots \Rightarrow LK - UR \Rightarrow L(k+1) - UR;$$

y en [20],

$$k \geq 1 \quad \text{entero,} \quad R + LkUR \Rightarrow Propiedad(k - M).$$

El siguiente lema es básico en la prueba de uno de nuestros resultados.

lema 4.1 *Sea (x_n) una sucesión en la bola unitaria del espacio de Banch E. Si Sep $(x_n) > \epsilon > 0$, entonces para cualquier $k \in N$, y $p \in (0, \epsilon)$ existe una subsucesión de (z_n) de (x_n) tal que si $\{z_{n_1}, \cdots z_{n_{k+1}}\}$ es cualquier conjunto de k+1 elementos disjuntos de $\{z_n\}$, entonces, $V(z_{n_1}, \cdots, z_{n_{k+1}}) \geq \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k-1}$.*

Prueba:
Ver [4].

Teorema 4.6 *Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Entonces,*

$$Lk - UR \Rightarrow Propiedad(k - M).$$

Prueba:

Sea $k \geq 1$ entero. Supongamos que E es un espacio Lk-UR. Sean $x \in S_E$ y $(x_n) \subset B_E$, tales que

$$\lim_{n_1, \cdots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k + 1. \tag{1}$$

Queremos probar que (x_n) posee una subsucesión convergente. En efecto, supongamos que existe una subsucesión (x_j) de (x_n), tal que (x_j) no posee subsucesión de Cauchy. Por tanto, existen $\epsilon_0 > 0$ y (x_n) una subsucesión de (x_j), tales que

$$\|x_m - x_p\| \geq \epsilon_0, \qquad m \neq p.$$

Por el lema 4.1, para cada $k \in N$ y $\rho \in (0, \epsilon_0)$ existe (z_m) una subsucesión de (x_m) tal que

$$V(x, z_{m_1}, \cdots, z_{m_k}) \geq \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k-1} \tag{2}$$

Por otra parte, de (1), se obtiene fácilmente que,

$$\frac{1}{k+1} \quad \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| \geq 1 - \delta \left((\frac{\rho}{2})^{k-1} \right)$$

y como E es un espacio Lk-UR, entonces $V(x, z_{m_1}, \cdots, z_{m_k}) > \epsilon$, lo cual contradice (2). Así, (x_n) posee una subsucesión convergente y en consecuencia, E posee la Propiedad (ωM) .

En el año 1991, Bor-Luh Lin y W. Zhang [6], generalizan los espacios Lk-UR e introducen los espacios $L\omega UR$.

Definición 4.8 *sea E un espacio de Banach, se dice que E es un espacio $L\omega UR$, si para toda sucesión triangular $\{x_i^{(n)}/1 \leq i \leq n, n \in N\}$ enB_E y $x \in S_E$, con*

$$\lim_{n \to \infty} \left[(n+1) - \|x + \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)}\| = 0 \right]$$

entonces,

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_1^n, \cdots, x_n^n) = 0,$$

donde $d = Inf\{d_1, \cdots, d_k\}$, y , $d_i = dist(x_i, [x_{i+1}, \cdots, x_k])$, $1 \leq i \leq k$.

Es claro que para todo $k \in N$,

$$Lk - UR \Rightarrow L\omega UR$$

En [6], encontramos que

$$R + L\omega UR \Rightarrow L\omega R,$$

y es inmediato que

$$R + L\omega UR \Rightarrow Propiedad(\omega M) .$$

En [6], encontramos el siguiente

lema 4.2 *Sea E un espacio de Banach y $x_n \subset B_E$. Si $Sep(x_n) > \epsilon > 0$,, entonces para todo $k \in N$, existen $n_1, \cdots, n_k \in N$ tales que*

$$d(x, x_{n_1}, \cdots, n_{n_k}) \geq \frac{\epsilon}{4}.$$

Usando este lema se muestra el siguiente

Teorema 4.7 *sea E un espacio de Banach. Entonces,*

$$L\omega UR \Rightarrow Propiedad(\omega M).$$

Prueba:

Es similar a la dada en el teorema 4.8.

Los siguientes diagramas nos sintetizan las relaciones entre las diferentes propiedades estudiadas.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
Prop(M) & \Longrightarrow & Prop(k-M) & \Longrightarrow & Prop(k+1)M & \Longrightarrow & \cdots & \Longrightarrow & Prop(\omega M) & & \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & & & \Uparrow & & \\
LUR & \Longrightarrow & LkR & \Longrightarrow & L(k+1)R & \Longrightarrow & \cdots & \Longrightarrow & L\omega R & \Longrightarrow & R \\
 & & & & & & & & \Downarrow & & \\
 & & & & & & Prop(H) & \Longleftarrow & (G) & &
\end{array}$$

Diagrama #1

$$\begin{array}{ccccccccccc}
LUR & \Longrightarrow & \cdots & \Longrightarrow & LkR & \Longrightarrow & L(k+1)R & \Longrightarrow & \cdots & \Longrightarrow & L\omega R \\
\Updownarrow & & & & & & & & & & \\
L1-UR & \Longrightarrow & \cdots & \Longrightarrow & LkUR & \Longrightarrow & L(k+1)UR & & \Longrightarrow & & L\omega UR \\
 & & & & & & & & & & (\omega R)
\end{array}$$

Diagrama #2

5 Ejemplos

Ejemplo 5.1 *Consideremos el ejemplo dado por M.A. Smith [16], y desarrollado por el autor en [12].*

En efecto. Para $x = (x^1, \cdots,) \in (\ell_2, \|\cdot\|)$, se define la siguiente norma $\|\cdot\|$ por

$$\|x\| = \|x^1\| + \|\tilde{x}\|_2$$

donde $\tilde{x} = (o, x_2, \cdots)$. La $\|\cdots\|$ satisface

$$\|x\|_2 \leq \|x\| \leq 2\|x\|_2,$$

y así, $\|\cdot\|$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2.

Sea (x_n) una sucesión de números reales positivos decreciente a cero y $T : \ell_2 \to \ell_2$ una aplicación lineal continua definida por

$$T(x) = (\alpha_2 x^2, \alpha_3 x^3, \cdots).$$

Ahora, para cada $x \in \ell_2$, definimos la siguiente norma en ℓ_2 por,

$$|||x||| = \left(\|x\|^2 + \|tx\|_2{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y no es difícil ver que esta norma es equivalente a $\|\cdot\|_2$ en ℓ_2.

Denotemos por $E = (\ell_2, |||\cdot|||)$.

Smith demostró que :

1. E es un espacio estrictamente convexo, (R).
2. E satisface la Propiedad (H).

   T. Polak y B. Sims, [15], tomaron $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ y probaron que:
3. E es un espacio 2R y por tanto, L2R. Así, E es un espacio LKR y LωR.
4. E no es un espacio LUR.

   Este ejemplo nos muestra que:
5. $$\left.\begin{array}{l} L2R \\ LkR \\ L\omega R \end{array}\right\} \not\Rightarrow LUR$$
6. De (3), obtenemos:
   a. E satisface la Propiedad (G).
   b. E satisface la Propiedad (k-M)
   c. E satisface la propiedad (ωM) .
7. De (1) y de (4) se obtiene que E no posee la Propiedad (M).
8. De (2), (6) y (7), se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} Propiedad\,(G) \\ Propiedad\,(k-M) \\ Propiedad\,(\omega M) \\ Propiedad\,(H) \end{array}\right\} \not\Rightarrow Propiedad\,(M).$$

Bor-Luh Lin y Yu Xintai en [5], usando el espacio E dado anteriormente, definieron el siguiente espacio,

$$X = \left(\sum \bigoplus E\right)_{\ell_2}$$

y N.C. Xun y W.J. Hua [], probaron lo siguiente:

9. Para $k \geq 2$, X es un espacio LkR.
10. Para $k \geq 1$, X no es un espacio Lk-UR.

Así, para $k \geq 2$, $LkR \not\Rightarrow Lk - UR$.

Ejemplo 5.2 *Consideremos el ejemplo dado en [20]. Sean $k \geq 2$ un entero y $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$. Para cada $x = (a_1, \cdots) \in (\ell_2, \|\cdot\|_2)$, se define,*

$$\|x\|_{l_1,\cdots,l_k} = \left(\sum_{j=1}^{k} |a_{l_j}|\right)^2 + \sum_{i \neq l_1,\cdots,l_k} a_i^{\,2},$$

y,

$$|\!|\!|x|\!|\!| = \sup_{l_1 < l_2 < \cdots < l_k} \|x\|_{l_1,\cdots,l_k}$$

Sea $E = (\ell_2, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$. En [20] se prueba que E es un espacio k-UR y por ende, E es un espacio Lk-UR.

Así, se tiene que para $k \geq 2$,

1. E satisface la Propiedad (k-M) y también la propiedad (ωM).
2. E satisface la Propiedad (H).

Ahora, sean (α_n) una sucesión de números reales positivos decreciente a cero y $T : (\ell_2, |\!|\!|\cdot|\!|\!|) \to (\ell_2, \|\cdot\|_2)$ una aplicación lineal y continua definida por,

$$T(a_1, \cdots) = (\alpha_2 a_2, \alpha_3 a_3, \cdots)$$

Ahora definimos,

$$\|x\|_A = \left(|\!|\!|x|\!|\!|^2 + \|Tx\|_2^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \ell_2.$$

En [20] los autores mostraron que:

3. $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ es un espacio (R).
4. $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ no es un espacio L(k-1)R.
5. $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ es un espacio Lk-UR.
6. De (3) y (4) se obtiene que $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ no posee la Propiedad $(k-1)M$

7. De (3) y (5) se tiene que $(\ell_2, \|\cdot\|_A)$ es un espacio LkR y por tanto satisface la Propiedad (k-M).

   Así,
$$LkR \not\Rightarrow L(k-1)R$$
   y,
$$Propiedad(kM) \not\Rightarrow Propiedad((k-1)M).$$

References

[1] Day, M.M. *Normed linear spaces.* Third edition, Springer-Verlag, 1973.

[2] Fan, K and Glicksberg, I. *Some Geometrical Properties of the Spheres in a normed linear space.* Duke Math. J. 25,(1958),553-568.

[3] Istratescu, V.I. *Strict Convexity and Complex strict Convexity, Theory and applications,* lecture notes in Math. M. Dekker,1983.

[4] Kirk, W.A. *The modulus of K-Rotundity.* Boll.U.M.I. 7,2-A,(1988),195-201.

[5] Lin, B.L. and Yu Xin Fai,*On the k-Uniform Rotund and the Fully Convex Banach Spaces*, J. Math.Anal.Appl.110,(1985),407-410.

[6] Lin, B.L. and Wenyao Zhang, *Some geometric Properties related to Uniform Convexity of Banach Spaces, Function Spaces*, lecture notes in Pure and Appl. Math. M.Dekker,136,(1991),281-294.

[7] Lovaglia, A.R. *Locally Uniformly Convex Banach Spaces.* Trans.A.M.S. 78,(1955),255-278.

[8] Morales, J.R. *Sobre los espacios LkR.* Notas de Matematicas,U.L.A.-105-1990.

[9] Morales, J.R. *Sobre los espacios (kM).* Revista Colombiana de Matematicas, XXVI,(1992),115-120.

[10] Morales, J.R. *La Propiedad k-M en espacios de Banach.* Notas de Matematicas,U.L.A.-118-,1992.

[11] Morales J.R. *Una nota sobre los espacios LωR.* Divulgaciones Matematicas,5,1,(1997).

[12] Morales, J.R. *Los espacios LωR.* Trabajo de ascenso,U.L.A.,1995.

[13] Morales, J.R. *El espacio cociente y algunas Propiedades geométricas de los espacios de Banach.* Por aparecer.

[14] Panda, B.B. and Kapoor, O.P. *A generalization of Local Uniform Convexity of the norm.*J. of Math Ann. Appl.52,1975,300-308.

[15] Polak, T. and Sims, B. *A Banach Space which is fully 2-rotund.*Canad.Math.Bull.26,1,(1983),118-120.

[16] Smith, M.A.*Some examples Concerning rotundity in Banach spaces.* Math.Ann.233,2,(1978),151-161.

[17] Sullivan, F. *A generalization of Uniformly rotund in Banach spaces.* Can.J.Math.XXXI,3,(1979),628-636.

[18] Vlasov, L.P. *Approximative Properties of sets in normed linear spaces.* Russian Math. Surveys.

[19] Xun, N.C. and Hua, W.I. *Locally Fully k-convexs spaces.* J.Namjirg Univ. Math. Biquartely,2,(1987),143-146.

[20] Xun, N.C. and Hua.W.I. *On the Lk-UR and LkR spaces.*Math.Pruc.Camb.Phil,suc.104,(1988),521-526.

[21] Yu Xin Fai, *On Lk-UR spaces.* Chin.Ann. of Math.6B(4),(1985),465-469.

José R. Morales M, Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Grupo de Análisis Funcional, Mérida 5101 - Venezuela.
E-mail: moralesj@ciens.ula.ve