

NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 150

APLICACIONES DEL GRADO TOPOLOGICO EN LA TEORIA DE LA
ESTABILIDAD DE SOLUCIONES PERIODICAS

POR

RAFAEL ORTEGA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1994

Aplicaciones Del Grado Topológico
En La Teoría De La Estabilidad
De Soluciones Periódicas

Rafael Ortega
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada
18071 Granada

Se considera la ecuación diferencial

$$(*) \quad x' = f(t, x),$$

Donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es de clase C^1 y periódica en la variable independiente; es decir, se cumple:

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

donde $T > 0$ es una cantidad fija (el periodo).

Los modelos en física e ingeniería que dieron origen al estudio de esta clase de ecuaciones se presentan en mecánica y en circuitos eléctricos, en el estudio de las oscilaciones de un sistema en presencia de una fuerza externa (ver [10]). Más recientemente se han construido modelos en ecología que conducen a esta clase de ecuaciones cuando se toman en consideración los efectos debidos al cambio de estación. Se interpretan las distintas tasas de una población (fecundidad, mortalidad, ...) como funciones periódicas de periodo un año (Ver[2]).

La Ecuación (*) puede presentar distintos tipos de soluciones recurrentes: soluciones periódicas de periodo T , también llamadas armónicas, soluciones periódicas de periodo minimal nT ($n \geq 2$), llamadas sub-armónicas, soluciones cuasi-periódicas, ... De entre todas ellas las más simples son las soluciones periódicas de periodo T , cuyo papel en la ecuación periódica es análogo al que juegan los puntos de equilibrio en la ecuación autónoma.

El estudio de las soluciones periódicas comprende las cuestiones de existencia, número de soluciones y propiedades de estabilidad. La teoría del grado topológico es una herramienta muy útil para tratar el primero de estos aspectos (la existencia). El propósito de estas notas es mostrar que en ocasiones también se puede usar la teoría del grado para mostrar la estabilidad asintótica de una solución periódica.

El plan es el siguiente:

- 1.- Grado e índice de Brouwer
- 2.- La aplicación de Poincaré
- 3.- El método de continuación
- 4.- Indices de una solución periódica
- 5.- Estabilidad e índice
- 6.- Problemas abiertos

En los epígrafes 1 a 4 se hace un recorrido por los aspectos básicos de la aplicación del grado a la existencia de soluciones periódicas. En 5 se presentan nuevos resultados sobre grado y estabilidad.

1. Grado e Índice de Brouwer

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $p \in \mathbb{R}^N$ y $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua tal que $f(x) \neq p \forall x \in \partial\Omega$.

La teoría del grado topológico asocia a f un número entero, que denotaremos por $\deg[f, \Omega, p]$. Este número es invariante por pequeñas perturbaciones; es decir, si reemplazamos f por una función muy próxima a ella y p por un punto muy cercano el grado no cambia.

Desde el punto de vista de las aplicaciones al análisis el interés de la teoría del grado radica en que proporciona información sobre la existencia de soluciones de la ecuación.

$$f(x) = p, x \in \Omega.$$

De hecho la versión localizada del grado, que llamaremos índice, se puede ver como una extensión a funciones continuas de cualquier dimensión del concepto de orden de multiplicidad de una raíz en la teoría de las funciones holomorfas en \mathbb{C} .

La definición y construcción del grado topológico en \mathbb{R}^N se debe a Brouwer, quien desarrolló para ello técnicas de topología combinatoria. Posteriormente Nagumo encontró otra forma de construir el grado (por supuesto equivalente) basada en ideas de topología diferencial. No vamos a entrar ahora en el proceso de construcción del grado y nos limitamos a enunciar algunas propiedades que nos serán útiles.

1. Existencia de Solución.

Si $\deg[f, \Omega, p] \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = p$

2. Invarianza por homotopía.

Sea $F : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $(x, \lambda) \rightarrow F(x, \lambda)$ continua y tal que $F(x, \lambda) \neq p, \forall x \in \partial\Omega, \forall \lambda \in [0, 1]$. Entonces $\deg[F(\cdot, \lambda), \Omega, p]$ es independiente de $\lambda \in [0, 1]$.

Vamos ahora a dar la definición de índice. Supongamos que $x_0 \in \Omega$ es un cero de f ; es decir $f(x_0) = 0$. Si este cero es aislado se define el índice de f en x_0 como

$$\text{ind}[f, x_0] = \text{deg}[f, B, 0],$$

donde B es un entorno abierto de x_0 tal que $f(x) \neq 0 \forall x \in \overline{B} - \{x_0\}$.

Se muestra que esta definición es independiente del entorno concreto B que se use.

Se puede probar que si f tiene un número finito de ceros en Ω , x_1, \dots, x_m , entonces

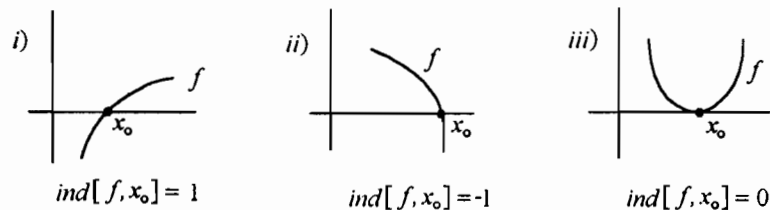
$$\text{deg}[f, \Omega, 0] = \sum_{i=1}^m \text{ind}[f, x_i].$$

En ocasiones el índice se calcula con facilidad; por ejemplo si $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y x_0 es un cero con $\det f'(x_0) \neq 0$ se cumple:

$$\text{ind}[f, x_0] = \text{sign}[\det f'(x_0)].$$

Por el contrario si $f'(x_0)$ no es inversible el índice dependerá de los términos no lineales en el desarrollo de Taylor y su cálculo puede ser complicado.

El caso más simple es el de dimensión uno ($N=1$). En este caso un cero aislado sólo puede ser de uno de estos tipos:



En dimensión $N=2$ la situación es mucho más compleja; por ejemplo si $f(z) = z^n, n \geq 1$ se cumple $\text{ind}[f, 0] = n$.

No obstante en dimensión $N=2$ se cumple la siguiente propiedad que usaremos más tarde: Sea $f \in C^1$, si $f(x_0) = 0$ y la matriz jacobiana $f'(x_0)$ no es idénticamente nula ($f'(x_0) \neq 0$) se cumple $|\text{ind}[f, x_0]| \leq 1$.

Notas Bibliográficas 1

Existen numerosos libros dedicados a la teoría del grado. Por ejemplo [7], donde se emplea el método de Nagumo para la construcción del grado, o [1] donde se usan métodos de topología combinatoria. El libro [17] muestra los dos métodos de construcción del grado y la conexión que existe entre ellos.

En [5] se dan métodos para el cálculo del índice en dimensión $N=2$ cuando la parte lineal es degenerada y se prueban numerosas propiedades específicas del grado en dos dimensiones.

2. La Aplicación de Poincaré

Dado $\xi \in \mathbb{R}^N$ denotaremos por $x(t, \xi)$ a la única solución de (*) que cumple la condición inicial $x(0, \xi) = \xi$.

Definimos la aplicación

$$P_T : \mathcal{D}_T \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, P_T(\xi) = x(T, \xi),$$

donde $\mathcal{D}_T = \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid x(t, \xi) \text{ está definida en } [0, T]\}$.

Se deduce de los teoremas clásicos de existencia, unicidad y dependencia continua que \mathcal{D}_T es abierto en \mathbb{R}^N y P_T es un homeomorfismo de \mathcal{D}_T sobre su imagen $P_T(\mathcal{D}_T)$. La aplicación P_T recibe diversos nombres : aplicación de Poincaré, operador de translación, aplicación “tiempo T ”, ...

Es bien sabido que si $\varphi(t)$ es una solución de (*) definida en $[0, T]$ y que cumple $\varphi(0) = \varphi(T)$, entonces φ puede ser prolongada como una solución T -periódica. En consecuencia los puntos fijos de P_T coinciden con las condiciones iniciales de las soluciones T -periódicas y por lo tanto la búsqueda de soluciones T -periódicas de (*) se puede reducir al estudio de la ecuación (en dimensión finita).

$$(2.1) \quad P_T(\xi) = \xi, \quad \xi \in \mathcal{D}_T \subset \mathbb{R}^N.$$

En la mayoría de los casos no es posible calcular explícitamente P_T y sólo se podrán determinar algunas de sus propiedades cualitativas. Es decir, se trata de resolver la ecuación (2.1) sin conocerla con precisión, una situación en la que el uso de la teoría del grado es muy conveniente.

La ecuación (*) es T -periódica y, como consecuencia, también es nT -periódica para cada $n = 2, 3, \dots$. Podemos repetir todo lo anterior tomando como periodo inicial nT y obtendremos una nueva aplicación de Poincaré.

$$P_{nT} : \mathcal{D}_{nT} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, P_{nT}(\xi) = x(nT, \xi).$$

Es fácil comprobar que $P_{nT} = P_T \overbrace{\circ \cdots \circ}^n P_T$. Las soluciones de la ecuación:

$$(2.2) \quad P_{nT}(\xi) = \xi, \quad \xi \in \mathcal{D}_{nT} \subset \mathbb{R}^N,$$

serán las condiciones iniciales de las soluciones nT -periódicas. Por supuesto que las soluciones T -periódicas son también nT -periódicas, y como consecuencia las soluciones de (2.1) son también soluciones de (2.2). En ocasiones la ecuación (*) puede admitir sub-armónicos y en tal caso la ecuación (2.2) admitirá soluciones que no son al mismo tiempo soluciones de (2.1).

En resumen podemos decir que la aplicación de Poincaré nos permite reducir el estudio de las soluciones T -periódicas de (*) a una ecuación de dimensión finita. Si el periodo inicial se sustituye por un múltiplo se obtiene una nueva ecuación que puede dar lugar a sub-armónicos.

Notas bibliográficas 2

El tratado [4] se dedica al estudio del operador de Poincaré y sus propiedades. En [18] se hace un estudio menos pormenorizado pero muy claro.

3. El Método De Continuación

Se trata de un método que en ocasiones permite probar la existencia de soluciones periódicas usando la teoría del grado topológico. La idea básica consiste en deformar de un modo continuo la ecuación hasta llegar a una nueva ecuación más sencilla y sobre la que se pueden estudiar propiedades que se sabe son conservadas por deformaciones.

Presentamos el método estructurado en tres etapas.

1.- La homotopía

Se incluye la ecuación (*) dentro de una familia uniparamétrica de ecuaciones de la forma.

$$(3.1) \quad x' = f(t, x, \lambda), \quad \lambda \in [0, 1],$$

donde

$(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0, 1] \rightarrow f(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^N$ es continua, $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ cumple condiciones para la unicidad del problema de Cauchy y es T -periódica en t ,

$$f(t, x, 1) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

2.- Las Cotas "a priori"

Se busca $R > 0$ tal que, cualesquiera que sean $\lambda \in [0, 1]$ y $\varphi_\lambda(t)$ solución T -periódica de (3.1), se cumple:

$$|\varphi_\lambda(0)| < R.$$

Hagamos un par de observaciones:

- i) La constante R es independiente de λ y de φ_λ .
- ii) No se postula que exista φ_λ ; se afirma que, caso de que exista, ha de cumplir la cota. Es decir, se obtienen cotas de las posibles soluciones T -periódicas antes de saber si existen.

3.- El Cálculo Del Grado

Para cada $\lambda \in [0, 1]$ se denota al correspondiente operador de Poincaré por $P_{T,\lambda}$ y a su dominio por $\mathcal{D}_{T,\lambda}$. Se trata de comprobar que

$$\overline{B}_R \subset \mathcal{D}_{T,\lambda} \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \deg[I - P_{T,0}, B_R, 0] \neq 0.$$

$$(B_R = \{\xi \in \mathbb{R}^N / |\xi| < R\}, I \text{ identidad en } \mathbb{R}^N)$$

Para este paso se requiere que la homotopía haya conducido a una ecuación final $x' = f(t, x, 0)$ lo bastante sencilla como para que sea posible calcular el grado.

Si se realizan con éxito los puntos 1,2 y 3 la conclusión final es clara: existe al menos una solución T -periódica de (*). La demostración se sigue de las siguientes consideraciones.

La dependencia continua respecto a parámetros y condiciones iniciales implica que la aplicación

$$(\lambda, \xi) \rightarrow P_{T,\lambda}(\xi), \quad (\lambda \in [0, 1], \xi \in \mathcal{D}_{T,\lambda})$$

es continua.

Las cotas a priori implican que $P_{T,\lambda}$ no tiene puntos fijos fuera de la bola B_R ; en particular

$$P_{T,\lambda}(\xi) \neq \xi, \quad \forall \xi \in \partial B_R, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Es decir, que $I - P_{T,1}$ es homotópico a $I - P_{T,0}$ en B_R y por tanto

$$\deg[I - P_{T,1}, B_R, 0] = \deg[I - P_{T,0}, B_R, 0] \neq 0.$$

En consecuencia existe $\xi \in B_R$ tal que $\xi - P_T(\xi) = 0$ y la correspondiente solución de (*) $x(t, \xi)$ es T -periódica.

Vamos a poner en práctica el método en un caso concreto.

Ejemplo: Se considera la ecuación de segundo orden

$$y'' + 2y' + y^3 = A \sin t, \quad (A \in \mathbb{R}).$$

Se trata de la ecuación de Duffing, que es clave en la teoría de osciladores no lineales. Parece ser que para ciertos valores grandes de la amplitud A está

ecuación puede presentar un comportamiento muy complejo, del tipo que se suele llamar caótico.

Probaremos que esta ecuación tiene al menos una solución 2π -periódica usando el método de continuación. Para ello debemos transformar la ecuación en un sistema en \mathbb{R}^2 y recorrer los siguientes pasos:

1. Se considera la homotopía

$$(3.2) \quad y'' + 2y' + \lambda y^3 + (1 - \lambda)y = \lambda A \sin t, \quad \lambda \in [0, 1],$$

que para $\lambda = 1$ da la ecuación de partida.

2. Para obtener las cotas haremos uso del producto escalar

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

y la L^2 -norma asociada $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$.

Sea $y(t)$ una solución 2π -periódica de (3.2); pretendemos obtener cotas de $y(t)$, $y'(t)$. Efectuamos el producto escalar de (3.2) con y' para obtener

$$(y'', y') + 2\|y'\|^2 + (\lambda y^3 + (1 - \lambda)y, y') = \lambda A(\sin t, y').$$

Por ser y 2π -periódica se deduce que el primer y tercer sumando se anulan, de donde

$$2\|y'\|^2 = \lambda A(\sin t, y') \leq |A| \|\sin t\| \|y'\| \Rightarrow \|y'\| \leq |A|\pi/2.$$

Por otra parte, integrando (3.2) sobre un periodo,

$$\int_0^{2\pi} \{\lambda y(t)^3 + (1 - \lambda)y(t)\} dt = 0,$$

y por el teorema de la media ha de existir $t_0 \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\lambda y(t_0)^3 + (1 - \lambda)y(t_0) = 0 \Rightarrow y(t_0) = 0.$$

En consecuencia, aplicando la desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$|y(t)| = \left| \int_{t_0}^t y'(s) ds \right| \leq |t - t_0|^{1/2} \|y'\| \leq \pi^{3/2} |A| / \sqrt{2}.$$

Usando de nuevo que y es 2π -periódica se deduce que existe $t_1 \in [0, 2\pi]$ tal que $y'(t_1) = 0$. Integrando (3.2) entre t_1 y t ,

$$y'(t) = 2(y(t_1) - y(t)) - \int_{t_1}^t \{\lambda y(s)^3 + (1 - \lambda)y(s) - \lambda A \sin s\} ds.$$

La estimación anterior de y y esta identidad conducen a una cota uniforme de y' .

3. Se puede probar usando la teoría de prolongación que todas las soluciones de (3.2) están definidas hasta $+\infty$. Por tanto, $\mathcal{D}_{T,\lambda} = \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Para el cálculo del grado observamos que para $\lambda = 0$ la ecuación es lineal y puede ser integrada. En concreto se trata de $y'' + 2y' + y = y$, tras un cálculo, se obtiene la aplicación de Poincaré.

$$P_{T,0}(\xi) = A\xi, \quad A = e^{-2\pi} \begin{pmatrix} 1 + 2\pi & 2\pi \\ -2\pi & 1 - 2\pi \end{pmatrix}.$$

La ecuación $P_{T,0}(\xi) = \xi$ sólo admite la solución $\xi = 0$. Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 que contiene al origen

$$\deg[I - P_{T,0}, \Omega, 0] = \text{ind}[I - P_{T,0}, 0] = \text{sign}[\det(I - A)] = 1.$$

Notas Bibliográficas 3

Las ideas generales de esta sección arrancan de los trabajos de Leray-Schauder en los años 30. En la actualidad hay un gran número de artículos y libros sobre el uso del grado en las ecuaciones diferenciales. El libro [1] contiene mucha información de los aspectos más clásicos mientras que [9] presenta algunas ideas recientes.

Para entender la significación de la ecuación de Duffing dentro de la teoría de sistemas dinámicos es conveniente [3]. En [16] se prueba que la ecuación de Duffing da lugar a un sistema disipativo, lo que proporciona una demostración alternativa de las cotas a priori.

4. Índices de una Solución Periódica

Sea $\varphi(t)$ una solución T -periódica de (*). Se dirá que φ es aislada (periodo T) si $\varphi(0)$ es un cero aislado de $I - P_T$. En tal caso se define el índice de φ (periodo T) como

$$\gamma_T(\varphi) = \text{ind}[I - P_T, \varphi(0)]$$

En ocasiones es posible calcular el índice utilizando la ecuación variacional.

$$(4.1) \quad y' = f_x(t, \varphi(t))y,$$

que es una ecuación lineal y periódica a la que se puede aplicar la teoría de Floquet. Se comprueba, gracias al teorema de diferenciabilidad de Peano, que P_T es un C^1 -difeomorfismo tal que la matriz jacobiana $P'_T(\varphi(0))$ es una matriz de monodromía de (4.1). En consecuencia los multiplicadores característicos de (4.1), μ_1, \dots, μ_N , son los valores propios de $P'_T(\varphi(0))$. Por tanto, si $\mu_i \neq 1$, $i = 1, \dots, N$,

$$\gamma_T(\varphi) = \text{sign}[\det(I - P'_T(\varphi(0)))] = \text{sign}\{(1 - \mu_1) \cdots (1 - \mu_N)\}.$$

(En el caso $\mu_i = 1$ para algún i , los términos no lineales en (*) influyen sobre el índice).

Por el hecho de ser φ T -periódica será automáticamente nT -periódica ($n \geq 2$). Diremos que φ es aislada (periodo nT) si $\varphi(0)$ es un cero aislado de $I - P_{nT}$. En tal caso se define el índice de φ (periodo nT) como

$$\gamma_{nT}(\varphi) = \text{ind}[I - P_{nT}, \varphi(0)]$$

No es difícil concluir que $P'_{nT}(\varphi(0)) = P'_T(\varphi(0))^n$. Como consecuencia, si $\mu_i^n \neq 1$, $i = 1, \dots, N$, se tiene

$$\gamma_{nT}(\varphi) = \text{sign}\{(1 - \mu_1^n) \cdots (1 - \mu_N^n)\}$$

En resumen observamos que para una solución periódica aislada podemos construir una sucesión de índices que, en los casos más simples, pueden ser calculados a partir de los multiplicadores característicos de la ecuación linealizada.

Notas Bibliográficas 4

El material de esta sección se desarrolla en [4].

5. Estabilidad e Índice

Sea $\varphi(t)$ una solución T -periódica de (*). Se dice que φ es estable si se cumple:

$$(i) \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\xi - \varphi(0)| < \delta \Rightarrow \begin{cases} x(t, \xi) \text{ definida en } [0, \infty) \\ |x(t, \xi) - \varphi(t)| < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \end{cases} .$$

Si además se cumple

$$(ii) \exists \rho > 0 : |\xi - \varphi(0)| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, \xi) - \varphi(t)| = 0,$$

se dice que φ es asintóticamente estable.

(Se puede probar utilizando (i) que el límite que aparece en (ii) es uniforme en $|\xi - \varphi(0)| < \rho$).

En ocasiones es posible extraer información sobre la estabilidad de una solución periódica a partir de la ecuación variacional. De hecho si μ_1, \dots, μ_N son los multiplicadores característicos se cumple:

$$|\mu_i| < 1, i = 1, \dots, N \Rightarrow \varphi \text{ asintóticamente estable}$$

$$|\mu_i| > 1 \text{ para algún } i \Rightarrow \varphi \text{ inestable}$$

El caso $|\mu_i| \leq 1 \forall i, |\mu_i| = 1$ para algún i , es crítico y la estabilidad no puede ser decidida a partir de la ecuación linealizada.

Nos proponemos ahora analizar qué conexiones pueden existir entre la estabilidad asintótica de una solución periódica y sus índices.

Comenzamos suponiendo que φ es asintóticamente estable y queremos calcular sus índices. En primer lugar observamos que, gracias a (ii), φ es aislada con respecto a cualquier periodo y por tanto los índices están bien definidos. Se cumple:

$$(A) \quad \varphi \text{ asintóticamente estable} \Rightarrow \gamma_{nT}(\varphi) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

Este resultado se debe a Krasnoselskii y su demostración, complicada, usa un refinamiento del teorema de punto fijo de Brouwer debido a Browder. No obstante vamos a ver que $\gamma_{nT}(\varphi) = 1$ si n es suficientemente grande.

(Sea B_ρ la bola de centro $\varphi(0)$ y radio ρ . Se sigue de (ii) que si $\xi \in B_\rho$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{nT}(\xi) = \varphi(0)$. Además esta convergencia es uniforme. Por tanto,

para n grande, $I - P_{nT}$ está muy cerca de $I - \varphi(0)$ y, por las propiedades del grado,

$$\gamma_{nT}(\varphi) = \deg[I - P_{nT}, B_\rho, 0] = \deg[I - \varphi(0), B_\rho, 0] = 1)$$

Este resultado es útil para probar la existencia de soluciones que no son asintóticamente estables (si su índice no es 1). De mayor interés sería el recíproco de (A) pero éste, como veremos, es falso en general. Para concluir la estabilidad asintótica a partir de la teoría del grado sería preciso obtener recíprocos parciales de (A). Esta posibilidad está íntimamente ligada a la dimensión N de la ecuación. Discutimos los casos más simples.

Dimensión $N=1$

Al tratarse de una ecuación escalar la aplicación de Poincaré es un función de \mathbb{R} a \mathbb{R} . Por las propiedades del grado en dimensión 1 se cumple, para cualquier solución periódica aislada, $|\gamma_T(\varphi)| \leq 1$. En este caso sí es posible caracterizar la estabilidad en términos de grado.

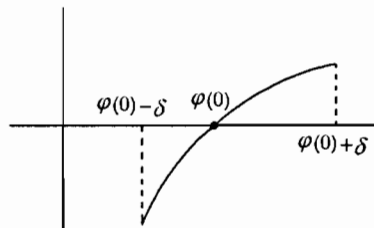
Se cumple:

(B) φ es asintóticamente estable $\iff \varphi$ es aislada (periodo T) y

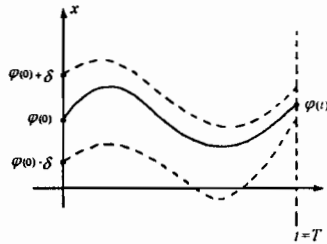
$$\gamma_T(\varphi) = 1$$

Veamos la idea de la demostración.

(La implicación \Rightarrow se sigue de (A). Para probar \Leftarrow observamos que si $\gamma_T(\varphi) = 1$ la aplicación $I - P_T$ tiene una gráfica del tipo



Por tanto, si $\xi \in (\varphi(0), \varphi(0) + \delta)$, $\xi > P_T(\xi)$, mientras que si $\xi \in (\varphi(0) - \delta, \varphi(0))$, $\xi < P_T(\xi)$. En consecuencia el flujo de la ecuación se contraerá después de un periodo de acuerdo a la gráfica



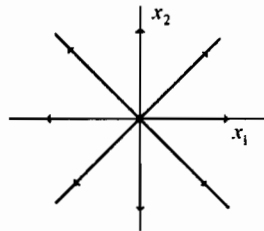
lo que implica que φ es asint. estable

Dimensión N=2

Comenzamos con un ejemplo simple:

$$x' = x \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

El diagrama de fases es de la forma



La solución T -periódica $\varphi \equiv 0$ es aislada y evidentemente inestable.

Calculamos la aplicación de Poincaré, $P_{nT}(\xi) = e^{nT}\xi$.

Por tanto $\gamma_{nT}(\varphi) = \text{sign}[\det((1 - e^{nT})I)] = 1 \quad \forall n \geq 1$

Es decir, en dos dimensiones el recíproco de (A) es falso.

Si analizamos de nuevo el ejemplo observamos que se trata de un flujo expansivo. Vamos a imponer una condición sobre $f(t, x)$ que elimine esta posibilidad. Supondremos

$$(H) \quad \text{div}_x f(t, x) = \partial_{x_1} f_1(t, x) + \partial_{x_2} f_2(t, x) < 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

Es bien sabido que esta condición hace que el flujo contraiga áreas, al contrario de lo que ocurría en el ejemplo. La condición (H) se cumple para las ecuaciones de la mecánica con disipación.

Una consecuencia útil de (H) y la identidad de Jacobi-Liouville es la siguiente: Sea φ solución T -periódica de (*) y μ_1, μ_2 los multiplicadores característicos de la ecuación variacional, entonces $0 < \mu_1 \cdot \mu_2 < 1$.

De este hecho se deriva que si se verifica (H) el índice cumple $|\gamma_T(\varphi)| \leq 1$. Ello se debe a que $I - P_T'(\varphi(0))$, con valores propios $1 - \mu_1, 1 - \mu_2$, no puede ser idénticamente nula.

De todas formas la hipótesis (H) no es suficiente para conseguir un resultado como (B). Ahora el contraejemplo es más delicado pero se puede construir una ecuación lineal no autónoma de la forma

$x' = A(t)x$ con A T -periódica, traza $A(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$, y tal que los multiplicadores cumplan $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$. Entonces $\varphi \equiv 0$ es una solución T -periódica inestable que cumple.

$$\gamma_T(\varphi) = \text{sign}\{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\} = +1.$$

Observamos sin embargo que en este ejemplo

$$\gamma_{2T}(\varphi) = \text{sign}\{(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)\} = -1.$$

El índice de periodo T no es apto para caracterizar la estabilidad asintótica, pero sí lo será el índice de periodo doble. Se cumple:

(C) φ es asintóticamente estable $\iff \varphi$ es aislada (periodo $2T$) y

$$\gamma_{2T}(\varphi) = 1$$

(La demostración es complicada y combina técnicas de la teoría del grado y de variedades invariantes.)

Este resultado permite poner de manifiesto la relación, en principio sorprendente, que hay entre la estabilidad de soluciones T -periódicas y la no existencia de sub-armónicos de orden 2. Lo veremos en un ejemplo.

Ejemplo : Sea de nuevo la ecuación de Duffing

$$y'' + 2y' + y^3 = A \sin t.$$

Vamos a probar que si esta ecuación no tiene sub-armónicos de orden 2 entonces tiene al menos una solución 2π -periódica que es asintóticamente estable.

(Supongamos que no hay sub-armónicos de orden 2, de modo que toda solución 4π -periódica es, en tal caso, 2π -periódica. Por lo ya estudiado sabemos que existe una bola B de \mathbb{R}^2 tal que $\deg[I - P_{2\pi}, B, 0] = 1$. De igual modo podríamos haber trabajado con 4π como periodo inicial y concluir que

$$\deg[I - P_{4\pi}, B, 0] = 1.$$

Un profundo resultado de Nakajima y Seifert establece que el número de soluciones 2π -periódicas de la ecuación de Duffing es finito. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ dichas soluciones. En nuestro caso se cumple (H) y por tanto $|\gamma_{4\pi}(\varphi_i)| \leq 1$, $i = 1, \dots, p$. Además, las propiedades del grado implican

$$1 = \deg[I - P_{4\pi}, B, 0] = \sum_{i=1}^p \gamma_{4\pi}(\varphi_i).$$

Por tanto existe i tal que $\gamma_{4\pi}(\varphi_i) = 1$ y se sigue de (C) que φ_i es asintóticamente estable.

Notas Bibliográficas 5

El resultado de Krasnoselskii (A) se enuncia en [4]. Una demostración se sigue del teorema 39.1 en [6]. Los primeros resultados en los que se obtenía estabilidad a partir del grado se deben probablemente a Cronin [1]. Sin embargo sólo se tratan casos hiperbólicos y con pequeño parámetro. La equivalencia (C) es el resultado de sucesivos refinamientos en [12,13,14] que concluyen en [15], donde se obtiene una extensión de (C) a cualquier dimensión. En estos trabajos también aparecen varias aplicaciones a problemas en mecánica.

El resultado de Nakajima y Seifert a que se hace referencia aparece en [11]. Para valores de A no muy grandes Mawhin probó la existencia de una solución periódica de la ecuación de Duffing asintóticamente estable en [8]

Problemas Abiertos

1. El resultado (C) admite una extensión a sistemas en \mathbb{R}^N $N \geq 3$, e incluso a dimensión infinita, cuando se sustituye (H) por una hipótesis apropiada. Sin embargo las aplicaciones de este resultado obtenidas hasta ahora son siempre en dimensión 2. Sería interesante encontrar aplicaciones en dimensión $N \geq 3$. Un poco más lejos, ¿Cómo se aplican estas ideas a ecuaciones de evolución en derivadas parciales? Probablemente algunas de las ideas recientes sobre sistemas dinámicos en dimensión infinita sean útiles
2. Las órbitas cerradas de un sistema autónomo tienen asociados ciertos índices definidos a partir del grado topológico (ver[6]). ¿Qué relaciones se pueden hallar entre estos índices y la estabilidad orbital?
3. Las relaciones que existen entre la estabilidad (no asintótica) y el grado son bastante complejas. En [6] se trata esta cuestión para puntos de equilibrio de un sistema autónomo, pero el caso de soluciones periódicas no se ha tratado. Resultados en esta línea podrían ser usados en la teoría de sistemas hamiltonianos.

Referencias

- [1] J. Cronin. Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. Math. Surv 11. American Math. Soc., 1964.
- [2] J.M Cushing. Two species competition in a periodic enviroment. J. Math Biology, 10, 385-400 (1980).
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes. Nonlinear oscillations, dipramical systems and bifurcations of vectors fields. Springer-Verlag, 1983.
- [4] M. Krasnoselskii. Translations along trayectories of differential equations. Transl. of Math Mon 19. American Math Soc, 1968.
- [5] M. Krasnoselskii, A. Perov, A. Povoloskiy, P.Zabreiko. Plane vector fields. Academic Press, 1966
- [6] M. Krasnoselskii, P. Zabreiko. Geometrical methods of nonlinear. Springer-Verlag, 1984.
- [7] N. Lloyd. Degree Theory. Cambridge Univ. Press, 1978.
- [8] J. Mawhin. Equations fonctionnelles non lineares et solution periodiques. Equadiff 70, Marseille 1970.
- [9] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations. CIME lectures, 1991. Lecture Notes in Math, 1537. Springer-Verlag, 1993.
- [10] N. Minorsky. Nonlinear oscillations. Edit. Krieger, 1974.
- [11] F. Nakajima, G Seifert. The number of periodic solutions $\bullet f$ 2-dimensional periodic systems. J. Diff. Equs, 49, 430-440 (1983)
- [12] R. Ortega. Stability and index of periodic solutions of on equation of Duffing type. Boll. Un. Mat. Italiana 3B, 533-546 (1989).
- [13] R. Ortega. Stability of a periodic problem of Ambrosetti. Prodi type. Diff.& Integral Equs 3, 275-284 (1990).
- [14] R. Ortega. Topological degree and stability of periodic solutions for certain differential equations. J. London Math Soc. 42,505-516 (1990).

- [15] R. Ortega. A criterion for asymptotic stability based on topological degree. Proc. World Congress of Non An. Tampa, August 92.
- [16] V. Pliss. Nonlocal problems of the theory of oscillations. Academic Press, 1966.
- [17] E. Rothe. Introduction to various aspects of degree theory un Banach spaces. Math Sur 23, American Math Soc, 1986.
- [18] N. Rouche, J Mawhin. Equations differentielles ordinaires. Masson, 1973