UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS

# NOTAS DE MATEMATICA

## RESOLVIENDO LAS ECUACIONES LINEALES CON EL USO DE MODELOS

POR

FRANCISCO RIVERO MENDOZA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA

Universidad de los Andes

**Facultad de Ciencias**

**Departamento de Matemática**

# Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos

Francisco Rivero Mendoza

Notas de Matemática

**Serie: Pre-Print**

**No. 201**

**Mérida - Venezuela**

**2000**

Notas de Matemática, No. 201
Mérida, 2000.

# Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos

Francisco Rivero Mendoza

**Abstract**

El estudio de las ecuaciones de primer grado en la escuela elemental se basa en el aprendizaje mecánico de reglas para manejar los símbolos, carentes de significado y sin referentes concretas. La falta de modelo que aporten significado es uno de los obstáculos más serios en el proceso de enseñanza aprendizaje en la resolución de ecuaciones. En este artículo se da un modelo concreto para la resolución de ecuaciones de primer grado usando fichas y un tablero rectangular, dividido en 4 zonas. Se expone el uso del modelo, como una representación semiótica del sistema de símbolo del álgebra y sus reglas operativas. Se proporciona un método para la instrucción con el modelo en la aula, siguiendo una serie de pasos que conectan los procedimientos con los símbolos dentro de las ecuaciones.

## 1 Introducción

Muchos estudiantes de educación media muestra graves deficiencias en el manejo de las ecuaciones de primer grado con números enteros. Frente a una ecuación del tipo

$$2x + 9 = 4x + 6$$

. Los estudiantes, presenta dificultades en el momento de trabajar con los símbolos para obtener la solución. Es común encontrar errores que provienen del desconocimiento de las propiedades de grupo de los números enteros. Por ejemplo eliminar el 9 del lado izquierdo y colocar un nueve del lado derecho. Otro tipo de error, aun más grave, ocurre cuando el estudiante no posee los elementos claves para establecer una diferencia clara entre la adición y la multiplicación, cuando, por ejemplo se elimina el 2 del lado izquierdo y se coloca un 2 de lado derecho.

Este tipo de problemas se insertan dentro de los problemas generales de enseñanza-aprendizaje del álgebra en la escuela elemental. Al respecto existe una gran cantidad de literatura, ver los trabajos de Filloy y Rojano

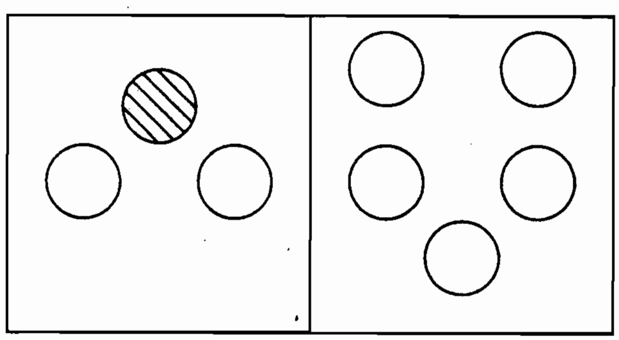
(1985a, 1985b, 1989),Filloy (1987),Kieran(1981), Hercovics, (1980), Hercovics y Lincherski (1994).
Estas dificultades en el manejo de los símbolos de la matemática provienen, en su mayor parte, de un tipo, instrucción tradicional, en donde los objetos matemáticos son tratados solamente de manera formal, mediante símbolos escritos, sin contexto alguno que les puedan dar un significado propio y las operaciones que rigen estos símbolos. Es evidente que la falta de un modelo que sirva de referente adecuado para las ecuaciones, obstaculiza el proceso concreto de la competencia en el manejo de las misma. El uso de un modelo en donde el estudiante pueda comparar las acciones sobre los símbolos, con acciones en el modelo parece ser un mecanismo de apoyo muy claro a los procesos cognitivos que intervienen en el aprendizaje en matemáticas, según se desprende de los trabajos de Hiebert (1988), Duval (1983), Kaput (1987) en esta dirección.

## 2 Un modelo para resolver ecuaciones

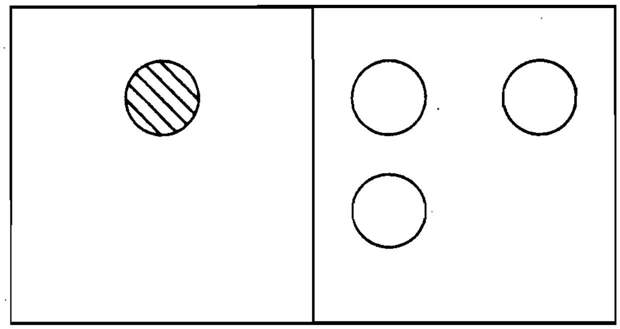
El modelo de la balanza sirve para cubrir algunos aspecto del proceso de resolución de ecuaciones. Podemos dar una representación gráfica del modelo de la balanza considerando un tablero dividido en dos partes iguales y usando fichas blancas sobre el tablero para representar cantidades, y fichas negras para representar las incógnitas. Por ejemplo la ecuación:

$$X + 2 = 5$$

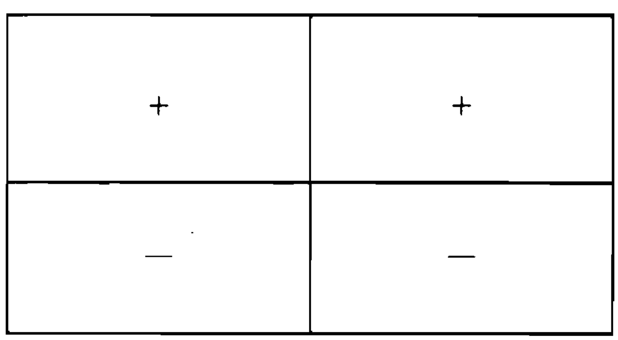
viene representada en el tablero por:



Si ahora cancelamos fichas a ambos lados (principio de balanza), entonces nos queda el tablero de la siguiente forma:



Igualando las cantidades en ambos lados, se deduce que la incógnita debe ser igual a 3, lo cual resuelve el problema planteado.
Nótese que hemos resuelto el problema usando solo fichas y el tablero, sin necesidad de usar los símbolos escritos de la matemática (letras, numeros, ...,etc.). Este modelo concreto para la resolución de ecuaciones funciona bien para ciertos tipo de ecuaciones , en donde no aparezca la operación de restar y además, todas las cantidades involucradas, tanto los términos conocidos como las incógnitas sean enteros positivos.
Podemos extender el modelo anterior para trabajar con números enteros en general(positivos, negativos y el cero ) usando el modelo para los números enteros de las fichas en el plano (MOFIP), (ver F. Rivero 1997). En dicho modelo, los números enteros se representa mediante fichas en un tablero rectangular , dividido en dos partes iguales: una para los positivos y otra para los negativos. Si tomamos dos tablero de éstos y los unimos, podemos formar un tablero dividido en cuatro partes , ver la figura:



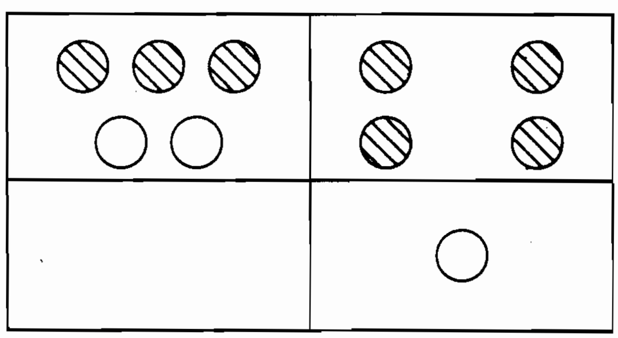

Mediante este tablero es posible dar una representación concreta de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en el conjunto de los números enteros. Cuando nos planteamos resolver una ecuación del tipo:

$$ax + b = cx + d$$

donde $a, b, c$y $d$ son números enteros. La misma se representa de la forma siguiente.
En lado izquierdo del tablero se construye la expresión $ax + b$ y en lado derecho del tablero se construye la expresión $cx + d$, usando las reglas del modelo MOFIP.
Para ilustrar este procedimiento, consideremos la ecuación

$$3x + 2 = 4x - 1$$

cuyo proceso de resolución lo iremos indicando en el tablero por una serie de pasos.
**Paso 1. Representar las expresiones en el tablero.**
Colocamos en el lado izquierdo tres fichas incógnitas (de color negro ) y dos fichas blancas. En el lado derecho colocamos 4 fichas incógnitas y una ficha blanca, en la parte de abajo por ser negativa.



**Paso 2. Aplicación de los principios de cancelación.**
Ahora bien, para poder determinar el valor de la ficha negra o incógnita, debemos aplicar ciertos principios de cancelación en el tablero, que provienen tanto del modelo de la balanza, como del modelo MOFIP para los números enteros. Estos principios los podemos enunciar de la manera siguiente :

Principios de cacelación en el tablero

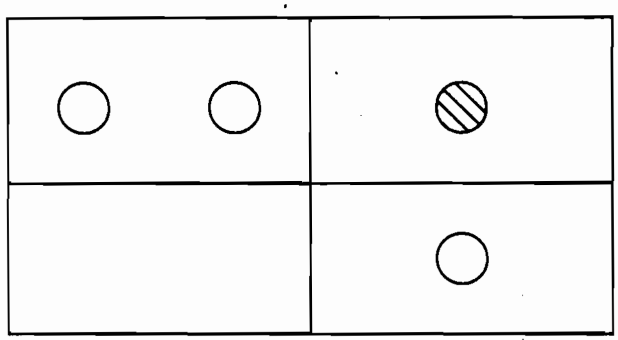
1. Del lado derecho, las fichas en la parte superior se cancelan con fichas en la parte inferior.

2. Del lado izquierdo, las fichas en la parte superior se cancelan con fichas en la parte inferior.

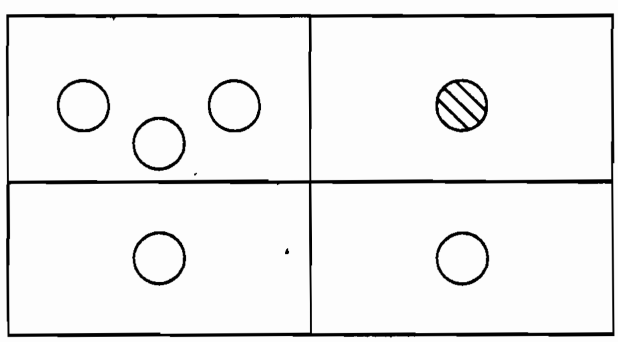
3. En la parte de arriba, las fichas del lado derecho se cancela con el lado izquierdo.

4. En la parte de abajo, las fichas del lado derecho se cancelan con las fichas del lado izquierdo.

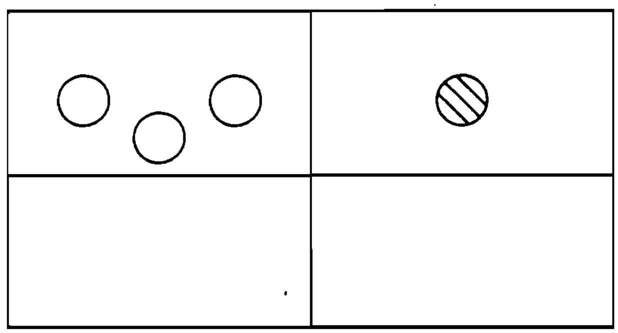
Una vez establecidas estas reglas de trabajo con las fichas en al tablero, procedemos a cancelar y nos queda el tablero de la forma siguiente:



**Paso 3. Aplicación de propiedades de los números enteros.** Seguidamente y aplicando propiedades del tablero MOFIP en el lado izquierdo, podemos agregar una ficha, tanto en la parte de arriba como abajo, con la finalidad de poder cancelar la ficha del lado derecho en la parte de abajo. Gráficamente se obtiene:



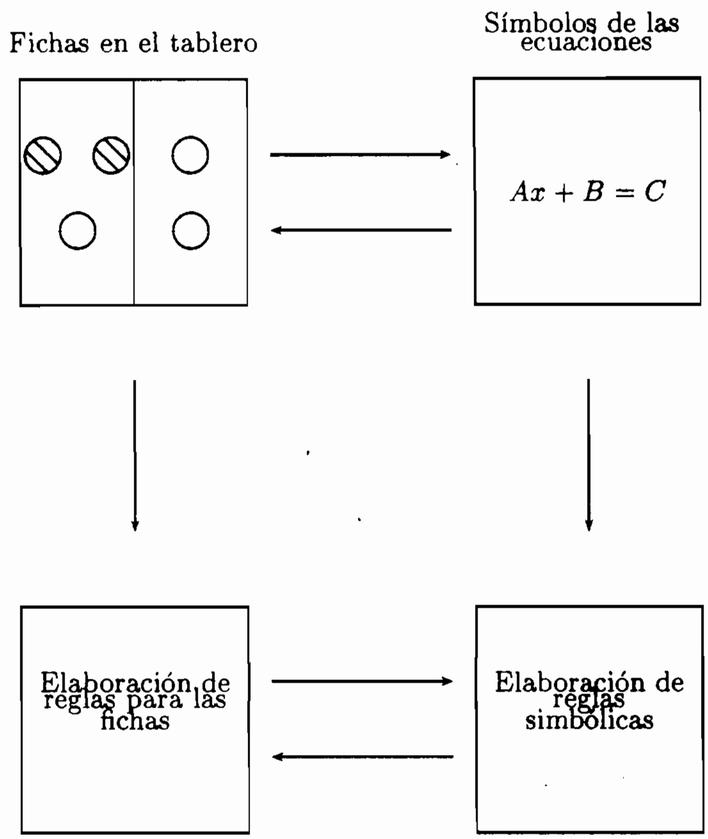
Paso 4. Cancelación final y obtención de la solución.
Luego cancelamos las dos fichas de abajo para llegar a la siguiente posición.



De acuerdo a las reglas de la balanza, se tiene entonces que la ficha **negra** debe ser igual a 3 fichas blancas, y por lo tanto la solución debe ser $x = 3$.

## 3 Sobre el uso del modelo en el aula

El modelo debería usarse en el momento en que el estudiante se inicia en los números enteros , o bien un poco antes. La instrucción con este modelo debe hacerse en forma simultánea con la intrucción del sistema de símbolos escritos para el manejo de las ecuaciones, con la finalidad de establecer un paralelo entre ambos sistemas. El estudiante deberá ser capaz de manipular bien el modelo concreto y atravesar el puente que une al modelo concreto con el sistema de símbolos escritos, tantas veces como sea necesario. De esta manera, el pensamiento operacional con el uso del tablero, servirá de apoyo a los procesos del pensamiento que intervienen en la resolución de ecuaciones (ver el dibujo),




siguiendo las flechas en ambos sentidos. En primer lugar, se debe establecer una correspondencia entre expresiones algebraicas y las fichas , y luego trasladar las operaciones y reglas en el tablero hacia las operaciones y reglas en las ecuaciones expresadas en símbolos. El criterio para la validez en el sistema de símbolos para las ecuaciones, lo proporciona la consistencia de las operaciones con las fichas.

Los pasos a seguir, para el uso del modelo en un proceso de instrucción dentro del aula, vendrán dados por la siguiente secuencia lógica.

1. Identificación de los símbolos en las ecuaciones y las operaciones con las fichas del tablero y las operaciones sobre las fichas.

2. Elaboración de procedimientos para el manejo de las fichas y traslado de estos procedimientos al sistema de símbolos.

3. Mecanización de los procesos utilizados en la resolución de ecuaciones.

# 4 Conclusiones

Hemos señalado una serie de dificultades que enfrentan los estudiantes en la resolución de ecuaciones de primer grado con los números enteros.
Es evidente que la falta de significado para los símbolos y para muchas reglas y procedimientos, incide en forma negativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje tradicional, que pone el mayor énfasis en aquellos aspectos relativos a ejecutar reglas entre símbolos, sin justificación alguna. La tendencia actual consiste en obligar al estudiante a realizar muchos ejercicios de manera rutinaria, hasta lograr una competencia en la resolución de ecuaciones, procedimiento éste que se olvida fácilmente al avanzar en sus estudios.
La inclusión dentro del aula de clases de un modelo como el presentado aquí, puede dotar de significado a los símbolos, facilitando los procesos de desarrollo del conocimiento del áldebra en general, y de la resolución de ecuaciones de primer grado en particular. El estudio de este modelo debe formar parte del curriculum, y no ser tratado como un simple recurso de apoyo. Por supuesto que esto último, implica un cambio radical en la instrucción tradicional usada en la escuela, y podrían presentarse problemas si el docente no aborda el nuevo método siguiendo los pasos indicados.
Si bien el modelo ha sido bien aceptado por un gran número de docentes que han asistido a talleres organizados por el autor, es necesario realizar una investigación sobre el uso de este modelo en el aula, para tener una evidencia cientiffica sobre sus potencialidades. En pruebas empíricas realizadas con niños en forma individual, y trabajando problemas planteados con palabras, estos fueron capaces de plantear las ecuaciones y resolverlas en el tablero en corto tiempo.

# 5 Referencia bibliográfica

1. Duval R. (1993) Registres de representación semiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et des sciences Cognitif IREM Strasburgo. Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN México (1997).

2. Filloy E. (1987). Modeling and teaching of Algebra. En J. C. Bergeron, N, Hercovics y C. Kieran editores, Proceedings of PME-XI, Montreal, Canada, vol.1,295-300.

3. Filloy E. y Rojano T. (1989) Solvong equations: the transition from arithmetic to algebra. For the learning of Matehematics 9(2), 19-25.

4. Filloy E. y Rojano T. (1985a) Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teching strategies. En L. Streefland (editor), Proceedings of PME-IX, OW & OC. State University of Utrech, Holanda, 154-158.

5. Filloy E. y Rojano T. (1985b) Operating the unknown and models of teaching. En S. Damarin y M. Shelton (Editores) Proceedings of PME-NA VII, Columbus, Ohio 75-79.

6. Hercovics N. (1980) Constructing meaning for linear equations: a problem of representation. Recherches en Didactiques des Mathématiquies, vol 1, no. 3, Grenoble, France, 351-385.

7. Hercovics N. y Kieran C. (1980) Constructing meaning for the concept of equation. The Mathematics Teacher 73(8), 572-580.

8. Hercovics N. y Linchevski L. (1994) A cognitive gap between arimthmetic and algebra. Educational Studies in Mathematics 27, 59-78.

9. Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol Edicational Studies in Mathematics 12, 317-326.

10. Rivero F. (1987) Un modelo pedagógico para la enseñanza dè los números enteros y la resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado Acción Pedagógica. Universidad de los Andes, Táchira Venezuela vol.6 (1-2).

11. Socas M. y Palarea M. (1997) Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. Revista Uno de didáctica de las Matemáticas no.14.

Resolviendo las Ecuaciones Lineales
con el uso de Modelos
por
Francisco Rivero Mendoza
Universidad de los Andes
Departamento de Matemáticas
Mérida Venezuela
e-mail: lico@ciens.ula.ve