Universidad de los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática

Propiedades Importantes de los Números de Bernoulli

Glauco Alfredo López Díaz

Notas de Matemática

Serie: Pre-Print

No. 212

Mérida - Venezuela
2001

Diseño de Portada: Juan E. Rondón

Notas de Matemática, No. 212
Mérida, 2001.

Propiedades Importantes de los Números de Bernoulli*

Glauco Alfredo López Díaz

Abstract

En estas notas estudiaremos algunas propiedades importantes de los números de Bernoulli tales como la **Formula de Sumación de Euler-Mac Laurin** y la expansión en series de Fourier de los polinomios de Bernoulli, así como también la aplicación de estas propiedades en el cálculo de la suma de algunas series numéricas convergentes de potencias recíprocas, la función generatriz de los números de Bernoulli y algunas cotas importantes para los números de Bernoulli.

1 Preliminares

Definición 1.1 *Los polinomios de Bernoulli denotados por $B_m(x)$ se definen de la siguiente manera:*

$$B_m(x) = \frac{x^m}{(m-1)!} + m! \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j x^{m-j}}{j!(m-j)!}$$

donde los B_m para todo $m \geq 1$, son los numeros de Bernoulli y estan dados por la siguiente fómula de recurrencia:

$$0 = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} B_j \, , para \, todo \, m \geq 1 \tag{1.1}$$

Lema 1.2 *Los polnomios de Bernoulli $B_m(x)$ satisfacen las siguientes relaciones:*

$$B_m(x) = B_q \, , para \, todo \, m \geq 1 \tag{1.2}$$

$$B_m(1) = B_1 \, , para \, todo \, m \geq 2 \tag{1.3}$$

$$B_1(x) = 1 + B_1$$

$$\frac{1}{m+1} B'_{m+1}(x) = B_m(x) \, , para \, todo \, m \geq 1 \tag{1.4}$$

* This research was partially supported by CDCHT-ULA under proyect C-677-94-05-E.

2 La Fórmula de Sumación de Euler-Mac Laurin

En esta sección estudiaremos como intervienen los polinomios de Bernoulli en el desarrollo de las sumas parciales de una función continua, con tantas derivadas continuas como sea necesario.

Lema 2.1 *Si $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y q-veces diferenciable entonces*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}\left(B_r(x)f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1\right) + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}\,dx \tag{2.5}$$

Demostración. Como $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ se verifica que $B_1'(x)$. A su vez, como $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ se cumple que $f(x)$ es una función integrable en $\mathbb{R}$; en particular, $f(x)$ es integrable en [0,1]. Entonces,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)B_1'(x)$$

De donde, por integración por partes se tiene:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = B_1(x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f(x)\,dx$$

Usando la fórmula 1.4, resulta que:

$$\int_o^1 f(x)\,dx = B_1(x)f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 B_2'(x)f'(x)\,dx$$

De nuevo, integrando por partes, obtenemos:

$$\int_0^1 f'(x)B_2'(x)\,dx = f'(x)B_2(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 B_2(x)f''(x)\,dx$$

Lo cual implica:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = B_1(x)f(x)\big|_0^1 - \frac{1}{2}B_2(x)f'(x) + \int_0^1 B_2(x)f''(x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^0}{1!}B_1(x)f(x)\Big|_0^1 + \frac{(-1)^1}{2!}B_2(x)f^{(1)}\Big|_0^1 + (-1)^2\int_0^1 \frac{B_2(x)}{2!}f^{(2)}(x)\,dx$$

$$= \sum_{r=1}^{2} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} B_r(x) f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^2 \int_0^1 \frac{B_2(x)}{2!} f^{(2)}(x)\, dx$$

Es decir,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{r=1}^{2} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} B_r(x) f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^2 \int_0^1 \frac{B_2(x)}{2!} f^{(2)}(x)\, dx$$

Supongamos por hipótesis de inducción que para $q-1$ es válido:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{r=1}^{q-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} \left(B_r(x) f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1 \right)$$

$$+(-1)^{q-1} \int_0^1 \frac{B_{q-1}(x)}{(q-1)!} f^{(r-1)}(x)\, dx$$

Veamos que para q es cierta. De nuevo, por la fórmula 1.4 se deduce que:

$$\int_0^1 \frac{B_{q-1}(x)}{(q-1)!} f^{(r-1)}(x)\, dx = \frac{1}{q!} \int_0^1 B'_q(x) f^{q-1}(x)\, dx$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{r=1}^{q-1} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} \left(B_r(x) f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1 \right)$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}}{q!} \int_0^1 B'_q(x) f^{(q-1)}(x)\, dx$$

Integrando por partes, nos queda:

$$\int_0^1 f^{(q-1)}(x) B'_q(x)\, dx = f^{(q-1)}(x) B_q(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 B'_q(x) f^{(q-1)}(x)\, dx$$

Así,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} \left(B_r(x) f^{r-1}(x)\Big|_0^1 \right) + \frac{(-1)^q}{q!} \int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(x)\, dx$$

Luego, para q también es válida. Por consiguiente, la fórmula 2.5 es cierta para todo $q \geq 1$. ∎

Teorema 2.2 *Si $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ q-veces diferenciable entonces:*

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(x) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{r=1}^{q}(-1)^r \frac{B_r}{r!}(f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)) + R_q \quad (2.6)$$

para todos los enteros positivos a, b con $a < b$ y

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \int_a^b B_q(x - [x]) f^{(q)}(x)\,dx \quad (2.7)$$

La fórmula 2.6 con Resto 2.7 es conocida como la **Fórmula de Sumación de Euler-Mac Laurin**.

Demostración. Como $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ por la fórmula 2.6 para todo $q \geq 2$ se verifica:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = B_1(x)f(x)\Big|_0^1 + \sum_{r=2}^{q} \frac{(-1)^{(r-1)}}{r!}\left(B_r(x)f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1\right)$$

$$+\frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(x)\,dx = f(1) - \frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

$$+\sum_{r=2}^{q} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}\left(B_r(x)f^{(r-1)}(x)\Big|_0^1\right) + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(x) f^{(q)}\,dx$$

$$= f(1) - \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) + \sum_{r=2}^{q} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}(B_r(1)f^{(r-1)}(1) - B_r(0)f^{(r-1)}(0))$$

$$+\frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(x) f^{(q)}\,dx$$

De donde,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

$$+\sum_{r=2}^{q} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}(B_r(1)f^{(r-1)}(1) - B_r(0)f^{(r-1)}(0)) + \frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(x) f^{(q)}\,dx$$

Lo cual implica que,

$$f(1) = \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

$$-\sum_{r=2}^{q}\frac{(-1)^{r-1}}{r!}(B_r(1)f^{(r-1)}(1)-B_r(0)f^{(r-1)}(0))-\frac{(-1)^q}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}\,dx$$

Por las fórmulas 1.2 y 1.3 se cumple:

$$f(1)=\int_0^1 f(x)\,dx-\left(-\frac{1}{2}\right)(f(1)-f(0))$$

$$+\sum_{r=2}^{q}\frac{(-1)(-1)^{r-1}}{r!}(B_r(1)f^{(r-1)}(1)-B_r(0)f^{(r-1)}(0))$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{(-1)^1}{1!}B_1(f^{(1-1)}(1)-f^{(1-1)}(0))$$

$$+\sum_{r=2}^{q}\frac{(-1)(-1)^{r-1}}{r!}(B_r(1)f^{(r-1)}(1)-B_r(0)f^{(r-1)}(0))$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx+\sum_{r=1}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}B_r(f^{(r-1)}(1)-f^{(r-1)}(0))$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}\,dx$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}f(1) &= \int_0^1 f(x)\,dx+\sum_{r=1}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}B_r(f^{(r-1)}(1)-f^{(r-1)}(0))\\ &+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}(x)\,dx\end{aligned} \tag{2.8}$$

Reemplazando $f(x)$ por $f(n-1+x)$ en la fórmula 1.4 se tiene:

$$\begin{aligned}f(n) &= \int_0^1 f(n-1+x)\,dx+\sum_{r=1}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}B_r(f^{(r-1)}(n)-f^{(r-1)}(n))\\ &+\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_0^1 B_q(x)f^{(q)}(n-1+x)\,dx\end{aligned}$$

Ahora, sumando desde $n = a + 1$ hasta $n = b$ resulta:

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \sum_{n=a+1}^{b} \int_0^1 f(n-1+x)\,dx$$

$$+ \sum_{n=a+1}^{b} \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^r}{r!} B_r (f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(n-1))$$

$$+ \sum_{n=a+1}^{b} \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(n-1+x)\,dx = \sum_{n=a+1}^{b} \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$$

$$+ \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^r}{r!} B_r \sum_{n=a+1}^{b} (f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(n-1))$$

$$+ \sum_{n=a+1}^{b} \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(n-1+x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$+ \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^r}{r!} B_r (f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a))$$

$$+ \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \sum_{n=a+1}^{b} \int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(n-1+x)\,dx$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{n=a+1}^{b} f(n) &= \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^r}{r!} B_r (f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)) \\ &\quad + \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \sum_{n=a+1}^{b} \int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(n-1+x)\,dx \end{aligned}$$

Sea R_q el error de orden q cometido en la estimación de la suma parcial de $f(x)$ entre $a + 1$ y b, definido por:

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \sum_{n=a+1}^{b} \int_0^1 B_q(x) f^{(q)}(n-1+x)\,dx\,, para\, todo\, q \geq 1 \qquad (2.9)$$

Haciendo el cambio de variable $t = n-1+x$ en la fórmula 2.9, nos queda:

$$\begin{aligned} R_q &= \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\sum_{n=a+1}^{b}\int_{n-1}^{n} B_q(t-n+1)f^{(q)}(x)\,dx \\ &= \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\sum_{n=a+1}^{b}\int_{n-1}^{n} B_q(t-(n-1))f^{(q)}(t)\,dx \end{aligned}$$

Luego,

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\sum_{n=a+1}^{b}\int_{n-1}^{n} B_q(t-(n-1))f^{(q)}(t)\,dx$$

Ahora, como $[t] = n-1$ para todo $t \in [n-1, n)$, se deduce que:

$$\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\sum_{n=a+1}^{b}\int_{n-1}^{n} B_q(t-(n-1)f^{(q)}(t)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\sum_{n=a+1}^{b}\int_{n-1}^{n} B_q(t-[t])f^{(q)}(t)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_{a}^{b} B_q(t-[t])f^{(q)}(t)\,dx$$

Por consiguiente,

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_{a}^{b} B_q(t-[t])f^{(q)}(t)\,dx\,, para\, todo\, q \geq 1$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt + \sum_{r=1}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}B_r(f^{(r-1)}(b) - f^{(r-1)}(a)) + R_q$$

Con lo cual se infieren los resultados del teorema. ∎

3 Expansión de Fourier de los Polinomios de Bernoulli

En esta sección definiremos una extensión periódica de los polinomios de Bernoulli y hallaremos su expansión en serie de Fourier.

Teorema 3.1 *Para todo $q \geq 1$ las funciones*

$$\Psi_q(t) = B_q(t - [t]), \, con\, t \in \mathbb{R}$$

tienen una expansión en series de Fourier de la forma:

$$\Psi_{2k-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k (2k-1)! \operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$\Psi_{2k}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1} (2k)! \cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k}} \tag{3.10}$$

para todo $k \geq 1$

Demostración. Como los polinomios de Bernoulli $B_q(t)$ para $q \geq 2$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, y además, por las fórmulas 1.2 y 1.3 se verifica que las funciones $\Psi_q(t)$ para $q \geq 2$ son funciones continuas y periódicas de período 1. A su vez, como $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ se cumple:

$$\Psi_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}, \, para\, todo\, t \in \mathbb{R}$$

también es una función periódica de período 1 pero con discontinuidades de salto de longitud 1 para los $t \in \mathbb{R}$. Entonces, las funciones $\Psi_q(t)$,para $q \geq 1$, son funciones de variación acotada sobre todo intervalo de longitud finita. De donde, $\Psi_q(t)$ para todo $q \geq 1$ tiene una expansión en serie de Fourier, dada por:

$$\Psi_q(t) = \frac{a_0^{(q)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(q)} \cos(2\pi n t) + b_n^{(q)} \operatorname{sen}(2\pi n t)) \tag{3.11}$$

para todo $q \geq 1$, con

$$a_n^{(q)} = 2 \int_0^1 B_q(x) \cos(2\pi n x)\, dx \, , para\, todo\, n \geq 0 \tag{3.12}$$

$$b_n^{(q)} = 2 \int_0^1 B_q(x) \operatorname{sen}(2\pi n x)\, dx \, , para\, todo\, n \geq 1 \tag{3.13}$$

Hallemos los coeficiente de Fourier, considerando primero el caso $n = 0$ en la fórmula 3.12:

$$a_0^{(q)} = 2 \int_0^1 B_q(x)\, dx$$

Por la fórmula 1.4 y el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene:

$$a_0^{(q)} = 2\int_0^1 \frac{1}{q+1} B'_{q+1}(x)\, dx = \frac{2}{q+1}(B_{q+1}(1) - B_{q+1}(0))$$

Por las fórmulas 1.2 y 1.3 resulta:

$$B_{q+1}(0) = B_{q+1}(1) = B_{q+1},\, para\, todo\, q \geq 1$$

Lo cual implica que,

$$a_0^{(q)} = 0,\, para\, todo\, q \geq 1$$

Una vez considerado el caso $n = 0$, consideremos el caso $n \geq 0$. Por integración por partes en la fórmula 3.12 para $n \geq 0$, se deduce que:

$$a_n^{(q)} = 2\left(B_q(x)\frac{2\pi nx}{2\pi n}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{2\pi n} B'_q(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi n} B_q(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_q(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int_0^1 B'_q(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\, dx$$

Esto es,

$$a_n^{(q)} = -\frac{1}{\pi n}\int_0^1 B'_q(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\, dx$$

De acuerdo con la fórmula 1.4 tenemos:

$$-\frac{1}{\pi n}\int_0^1 B'_q(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\, dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^1 qB_{q-1}(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\, dx$$

$$= -\frac{q}{2\pi n} b_n^{(q-1)}$$

Es decir,

$$a_n^{(q)} = -\frac{q}{2\pi n} b_n^{(q-1)},\, para\, todo\, n > 0 \tag{3.14}$$

En particular, tomando $B_0(x) = 1$ cuando $q = 1$ nos queda:

$$a_n^{(1)} = -\frac{1}{2\pi n} b_n^{(0)} = -\frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_0(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)\, dx = \frac{1}{2\pi n}\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\Big|_0^1 = 0$$

O bien,

$$a_n^{(1)} = 0\, para\, todo\, n \geq 1$$

Análogamente, por integración por partes en la fórmula 3.13 para $q \geq 2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} b_n^{(q)} &= 2\left(-B_q(x)\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}B_q'(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi n}\left(B_q(x)\cos(2\pi nx)\Big|_0^1\right) + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_q'(x)\cos(2\pi nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_q'(x) cos(2\pi nx)\,dx \end{aligned}$$

O sea,

$$b_n^{(q)} = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_q'(x)\cos(2\pi nx)\,dx$$

De nuevo por la fórmula 1.4, se verifica:

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_q'(x)\cos(2\pi nx)\,dx = \frac{q}{\pi n}\int_0^1 B_{q-1}(x)\cos(2\pi nx)\,dx = \frac{q}{2\pi n}a_n^{(q-1)}$$

Esto es,

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^1 B_q'(x)\cos(2\pi nx)\,dx = \frac{q}{2\pi n}a_n^{(q-1)}$$

En consecuencia,

$$b_n^{(q)} = \frac{q}{2\pi n}a_n^{(q-1)}\, para\, todo\, q \geq 1 \tag{3.15}$$

En particular, como $B_1(x) = x - \dfrac{1}{2}\, para\, q = 1$ integrando por partes se cumple:

$$b_n^{(1)} = 2\int_0^1 B_1(x)\,\text{sen}(2\pi nx)\,dx$$

$$= 2\left(-B_1(x)\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\Big| + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}B_1'(x)\,dx\right) = -\frac{1}{\pi n}$$

Es decir,

$$b_n^{(1)} = -\frac{1}{1\pi n},\, para\, todo\, n \geq 1 \tag{3.16}$$

Por otra parte,

$$b_n^{(1)} = \frac{(-1)^1 2(2.1-1)!}{(2\pi n)^{2.2-1}}$$

Además,

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{\pi n} b_n^{(1)} = -\frac{1}{\pi n}\left(-\frac{1}{\pi n}\right) = (-1)^{1-1}\frac{2(2.1)!}{(2\pi n)^{2-1}}$$

También,

$$b_n^{(2)} = \frac{1}{\pi n} a_n^{(1)} = 0$$

Por consiguiente,

$$a_n^{(1)} = 0, \qquad b_n^{(2)} = \frac{(-1)^2 2(2.1-1)!}{(2\pi n)^{2.1-1}}$$

$$a_n^{(2)} = \frac{(-1)^{1-1} 2.(2.1)!}{(2\pi n)^{2.1}}, \qquad b_n^{(2)} = 0$$

para todo $n \geq 1$. Supongamos por hipótesis de inducción que para algún $k > 1$ es cierto que:

$$a_n^{(2k-1)} = 0, \qquad b_n^{(2k-1)} = \frac{(-1)^k 2(2k-1)!}{(2\pi n)^{2k-1}}$$

$$a_n^{(2k)} = \frac{(-1)^{k-1} 2(2k)!}{(2\pi n)^{2k}}, \qquad b_n^{(2k)} = 0 \tag{3.17}$$

De donde, por las fórmulas 3.14 y 3.16 para $2k+1$ se tiene:

$$a_n^{(2k+1)} = -\frac{(2k+1)}{2\pi n} b_n^{(2k)} = 0$$

O bien,

$$a_n^{(2k+1)} = 0, \; para\, todo\, n \geq 1$$

Usando la fórmula 3.15 para $2k+1$ resulta:

$$b_n^{(2k-1)} = \frac{2k+1}{2\pi n} a_n^{(2k)} = \frac{(2k+1)(-1)^{k-1} 2(2k)!}{2\pi n (2\pi n)^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k+1)!}{(2\pi n)^{2k+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} 2(2(k+1)-1)!}{(2\pi n)^{2(k+1)-1}}$$

O sea,

$$b_n^{(2k-1)} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2(k+1)-1)!}{(2\pi n)^{2(k+1)-1}}, \; para\, todo\, n \geq 1$$

Lo cual implica que,

$$\begin{aligned} a_n^{(2k+2)} &= -\frac{(2k+2)}{2\pi n} b_n^{(2k+1)} = -\frac{(2k+2)}{2\pi n} \frac{(-1)^{k+1} 2(2(k+1)-1)!}{(2\pi n)^{2(k+1)-1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1} 2(2k+1)!}{(2\pi n)^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2(k+1)-1)!}{(2\pi n)^{2(k+1)-1}} \end{aligned}$$

Esto es,

$$a_n^{(2k+2)} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2(k+1)-1)!}{(2\pi n)^{2(k+1)-1}}, \, para\, todo\, n \geq 1$$

A su vez,

$$b_n^{(2k+2)} = \frac{(2k+2)}{2\pi n} a_n^{(2k+1)} = 0$$

Es decir,

$$b_n^{(2k+2)} = 0, \, para\, todo\, n \geq 1$$

En consecuencia,

$$a_n^{(2(k+1)-1)} = 0, \qquad b_n^{(2(k+1)-1)} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2(k+1)-1)!}{(2\pi n)^{2(k+1)-1}}$$

$$a_n^{(2(k+1))} = \frac{(-1)^{(k+1)-1} 2(2(k+1))!}{(2\pi n)^{2(k+1)}}, \qquad b_n^{(2(k+1))} = 0$$

para todo $n \geq 1$. Así, las fórmulas 3.17 son válidas para $k+1$; y por lo tanto, para todo $k \geq 1$. Luego, por la fórmulas 3.11 y 3.14 se deduce que:

$$\Psi_{2k-1}(t) = B_{2k-1}(t-[t]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(2k-1)! \operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k-1}}$$

y

$$\Psi_{2k}(t) = B_{2k}(t-[t]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2(2k)! \cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k}}$$

para todo $k \geq 1$. Ahora, para $\Psi_1(t)$ los valores enteros deben ser exceptuados por las discontinuidades de salto de $\Psi_1(t)$ en $t=0$. Sin embargo, la serie de Fourier de $\Psi_1(t)$ en $t=0$ converge a:

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0^-} \Psi_1(t) + \lim_{t\to 0^+} \Psi_1(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Esto coincide con la evaluación de $t=0$ en la fórmula 3.10. Por consiguiente, se infiere el resultado del teorema. ∎

4 Suma de Potencias Recíprocas

En esta sección estudiaremos la aplicación de los polinomios de Bernoulli en el cáculo de la suma de algunas series numéricas convergentes de potencias recíprocas.

Teorema 4.1 (Series Geométricas) *Para todo $k \geq 1$ tenemos que la serie numérica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \pi^{2k} P_k,\ con\, P_k \in \mathbb{Q} \tag{4.18}$$

Demostración. De acuerdo con el teorema 2.7 se verifica que para todo $q \geq 1$ las funciones: $\Psi_q(t) = B_q(t - [t])$, para todo $t \in \mathbb{R}$ donde $B_q(t)$ es el q-ésimo polinomio de Bernoulli, son funciones periódicas de período 1. Entonces,

$$\Psi_q(0) = \Psi(1) = B_q(0),\ para\, todo\, q \geq 1$$

A su vez, por las fórmulas 1.2 se cumple:

$$\Psi_(0) = B_q,\ para\, todo\, q \geq 1$$

En particular, $\Psi(0) = B_{2k}$ para todo $k \geq 1$. Por otra parte, de la fórmula 3.10 evaluando en $t = 0$ se tiene:

$$\Psi_{2k}(0) = \frac{2(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},\ para\, todo\, k \geq 1$$

De donde,

$$B_{2k} = \frac{2(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},\ para\, todo\, k \geq 1 \tag{4.19}$$

Lo cual implica que:

$$\frac{2^{2k}\pi^{2k}B_{2k}}{2(-1)^{k-1}(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \pi^{2k}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!},\ para\, todo\, k \geq 1 \tag{4.20}$$

Así, llamando

$$P_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}, \; para\, todo\, k \geq 1$$

obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \pi^{2k} P_{2k}, \; para\, todo\, k \geq 1$$

Luego, como $(-1)^{k-1}, 2^{2k-1}, B_{2k}, (2k)! \in \mathbb{R}$ para todo $k \geq 1$, se deduce que $P_k \in \mathbb{Q}$, para todo $k \geq 1$. ∎

Observación: Considerando distintos valores de k en la fórmula 4.20 obtenemos las siguientes estimaciones interesantes, para $k = 1$ resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 B_2 = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.21}$$

A su vez, si $k = 2$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4 \frac{(-1)2^3 B^4}{4!} = \pi^4 \frac{(-1)B_4}{3} = \frac{\pi^4}{90} \tag{4.22}$$

Nota: Las fórmulas 4.21 y 4.22 fueron conocidas por **Leonard Euler**.

Teorema 4.2 (Serie Geométrica Alternante) *Para todo $k \geq 1$ tenemos:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k-1}} = \pi^{2k-1} \bar{P}_k, \; con\, \bar{P}_k \in \mathbb{Q} \tag{4.23}$$

Demostración. De acuerdo con el teorema 2.7 se verifica:

$$\Psi_{2k-1}(t) = B_{2k-1}(t - [t]), \; para\; todo\, k \geq 1$$

De donde, por la fórmula 3.10 se cumple:

$$\Psi_{2k-1}(t) = \frac{2(-1)^k (2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(2\pi n t)}{n^{2k-1}}, \; para\, todo\, k \geq 1$$

Evaluando las funciones $\Psi_{2k-1}(t)$ en $t = \dfrac{1}{4}$ para todo $k \geq 1$ se tiene:

$$\Psi_{2k-1}\left(\frac{1}{4}\right) = B_{2k-1}\left(\frac{1}{4} - \left[\frac{1}{4}\right]\right) = B_{2k-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

A su vez,

$$\Psi_{2k-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2(-1)^k(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi n\frac{1}{2})}{n^{2k-1}}$$

$$= \frac{2(-1)^k(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k-1}}$$

Lo cual implica que:

$$B_{2k-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2(-1)^k(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k-1}},\ para\ todo\ k \geq 1$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k-1}} = \pi^{2k-1}\frac{(-1)^k 2^{2k-2} B_{2k-1}(\frac{1}{4})}{(2k-1)!},\ para\ todo\ k \geq 1 \tag{4.24}$$

Así, llamando:

$$\bar{P}_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k-2} B_{2k-1}(\frac{1}{4})}{(2k-1)!},\ para\, todo\, k \geq 1$$

obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k-1}} = \pi^{2k-1}\bar{P}_{2k},\ para\, todo\, k \geq 1$$

con $P_{2k} \in \mathbb{Q}$ para todo $k \geq 1$, ya que:

$$(-1)^k, 2^{2k-2}, B_{2k-1}\left(\frac{1}{4}\right), (2k-1)! \in \mathbb{Q},\ para\, todo\, k \geq 1$$

Luego, se infiere el resultado del teorema. ∎

Observación: Aunque para la suma de las potencias impares recíprocas no hay una fórmula conocida análoga a la fórmula 4.18, la fórmula 4.23 es una alternativa para la suma de las potencias impares recíprocas alternas. Sin embargo, si $k = 1$ en la fórmula 4.24 entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)} = -\pi B_1\left(\frac{1}{4}\right)$$

Como $B_1(t) = t - \dfrac{1}{2}$ se verifica que $B_1\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\left(\dfrac{1}{4}\right)$. De donde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

La cual es conocida como la fórmula de **Gregory-Leibniz**. A su vez, si $k = 2$ en la fórmula 4.24 entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \pi^3 \frac{(-1)^2 2^2 B_3(\frac{1}{4})}{3!} = \pi^3 \frac{2}{3} B_3\left(\frac{1}{4}\right)$$

Por otra parte, como $B_3(t) = t(t-1)\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$ se deduce que:

$$B_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4^3}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Teorema 4.3 *Par todo $q \geq 2$ las funciones $\Psi_q(t)$ satisfacen la siguiente desigualdad:*

$$\left|\Psi_q(t)\right| \leq \frac{q!}{12(2\pi)^{q-2}} \tag{4.25}$$

Demostración. De acuerdo con la fórmula 3.10 se verifica:

$$\left|\Psi_{2k-1}(t)\right| = \left|2(-1)^k(2k-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k}}\right| \leq \frac{2(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k-1}}$$

De donde,

$$\left|\Psi_{2k-1}(t)\right| \leq \frac{2(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k-1}} \tag{4.26}$$

De nuevo, por la fórmula 3.10 se cumple:

$$\left|\Psi_{2k}(t)\right| = \left|2(-1)^{k-1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2k}}\right| \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

Lo cual implica que,

$$\left|\Psi_{2k}(t)\right| \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \tag{4.27}$$

En consecuencia, por las fórmulas 4.26 y 4.27 se tiene:

$$\left|\Psi_q(t)\right| \leq \frac{2q!}{(2\pi)^q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}},\ para\, todo\, q \geq 1$$

Así, por la fórmula 4.21 para todo $q \geq 2$ se deduce que:

$$\left|\Psi_q(t)\right| \leq \frac{2q!}{(2\pi)^q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12} \frac{q!}{(2\pi)^{2k}}$$

Luego,

$$\left|\Psi_q(t)\right| \leq \frac{1}{12} \frac{q!}{(2\pi)^{q-2}},\ para\, todo\, q \geq 2$$

Por consiguiente, se infiere el resultado del teorema. ∎

Teorema 4.4 *Par todo* $k \geq 1$ *los números de Bernoulli satisfacen la siguiente desigualdad:*

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq \left|B_{2k}\right| \leq \frac{(2k)!}{12(2\pi)^{2k-2}}$$

Demostración. Por la fórmula 4.19 se verifica:

$$\left|B_{2k}\right| = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \tag{4.28}$$

A su vez,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

De donde,

$$\left|B_{2k}\right| \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\ para\, todo\, k \geq 1$$

Por otra parte, por la fórmula 4.21 se cumple:

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \frac{\pi^2}{6} = \frac{(2k)!}{12(2\pi)^{2k-2}}$$

Lo cual implica que:

$$\left|B_{2k}\right| \leq \frac{(2k)!}{12(2\pi)^{2k-2}},\, para\, todo\, k \geq 1 \tag{4.29}$$

Ahora de la fórmula 4.28 se tiene:

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \geq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}},\, para\, todo\, k \geq 1$$

En consecuencia,

$$\left|B_{2k}\right| \geq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}},\, para\, todo\, k \geq 1 \tag{4.30}$$

Así, de las fórmulas 4.29 y 4.30 se seduce que:

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq \left|B_{2k}\right| \leq \frac{(2k)!}{12(2\pi)^{2k-2}},\, para\, todo\, k \geq 1$$

Luego, se infiere el resultado del teorema. ∎

5 La Función Generatriz de los Números de Bernoulli

En esta sección estudiaremos una serie de potencias muy particular que involucra a los números de Bernoulli; así como también su convergencia y la función que ella genera.

Teorema 5.1 *La siguiente serie de potencias:*

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^r,\, con\, B_0 = 1$$

converge uniformemente a la función:

$$\Psi(z) = z \frac{e^z}{e^z - 1}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ *con* $\left|e^z\right| \neq 1$ *y* $R_e(z) \neq 0$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z = \alpha + \beta i$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que la función:

$$f(x) = e^{xz} = e^{x\alpha}\big(e^{x\beta}\big)^i, \, para\, todo\, x \in \mathbb{R}$$

Sean $f_1(x) = e^{x\alpha}$ y $f_2(x) = e^{x\beta}$, para todo $x \in \mathbb{R}$; las cuales son funciones reales de la variable real x. De donde,

$$f(x) = (f_1(x))(f_2(x))^i, \, para\, todo\, x \in \mathbb{R}$$

De acuerdo con la fórmula 2.6 de **Sumación Euler-Mac Laurin** se cumple:

$$\sum_{n=a+1}^{b} g(x) = \int_a^b g(x)\, dx + \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!}(g^{(r-1)}(b) - g^{(r-1)}(a)) + R_q \quad (5.31)$$

para toda función $g(x)$ continua en $\mathbb{R}$ y q-veces diferenciable con $a < b$ enteros positivos y resto R_q dado por la fórmula 2.7:

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \sum_{n=a+1}^{b} \int_a^b B_q(x) g^{(q)}(n-1+x)\, dx \quad (5.32)$$

Como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$ y q-veces diferenciables, para todo $q \geq 1$; se les puede aplicar la fórmula 5.31. Ahora, tomando la función $f(x) = e^{xz}$ en la fórmula 5.31 para $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$ con $a = o$ y $b = N$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} e^{nz} &= \int_0^N e^{xz}\, dx + \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!}(z^{r-1}e^{Nz} - z^{r-1}) + R_q \\
&= \frac{e^{Nz}}{z} - \frac{1}{z} + (e^{Nz} - 1) \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1} + R_q \\
&= (e^{Nz} - 1)\Big(\frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1}\Big) + R_q
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\sum_{n=1}^{N} e^{nz} = (e^{Nz} - 1)\Big(\frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1}\Big) + R_q \quad (5.33)$$

A su vez, si $\left|e^z\right| \neq 1$ entonces:

$$(e^z - 1)\sum_{r=1}^{N} e^{nz} = (e^z - 1)(e^z + e^{2z} + ... + e^{Nz}) = e^z(e^{Nz} - 1)$$

Lo cual implica que,

$$\sum_{r=1}^{N} e^{nz} = \frac{e^z(e^{Nz} - 1)}{(e^z - 1)}$$

Sustituyendo esto en la fórmula 5.33 se resulta:

$$\frac{e^z(e^{Nz} - 1)}{(e^z - 1)} = (e^{Nz} - 1)\Big(\frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{q}(-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1}\Big) + R_q \tag{5.34}$$

Por otra parte, de la fórmula 5.32 tenemos:

$$\begin{aligned}
R_q &= \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 B_q(x) z^q e^{(n-1+x)z}\, dx \\
&= \frac{(-1)^{q-1}}{q!} z^q \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 B_q(x) e^{(n-1+x)z}\, dx \\
&= \frac{(-1)^{q-1}}{q!} z^q \int_0^1 B_q(x) \sum_{n=1}^{N} e^{(n-1+x)z}\, dx
\end{aligned}$$

Es decir,

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1}}{q!} z^q \int_0^1 B_q(x) \sum_{n=1}^{N} e^{(n-1+x)z}\, dx \tag{5.35}$$

Pero, si $R_e(z) \neq 0$ entonces:

$$(e^z - 1)\sum_{r=1}^{N} e^{(n-1+x)z} = e^{xz}(e^{Nz} - 1)$$

En otras palabras,

$$\sum_{r=1}^{N} e^{(n-1+x)z} = \frac{e^{xz}(e^{Nz} - 1)}{(e^z - 1)}$$

Sustituyendo esto en la fórmula 5.35 nos queda:

$$R_q = \frac{(-1)^{q-1} z^q (e^{Nz} - 1)}{q!(e^z - 1)} \int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx$$

En consecuencia, la fórmula 5.34 obtenemos:

$$\frac{e^z(e^{Nz} - 1)}{(e^z - 1)} = (e^{Nz} - 1)\Big(\frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1}\Big) +$$

$$(e^{Nz} - 1)\frac{(-1)^{q-1} z^q}{q!(e^z - 1)} \int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx$$

O bien,

$$\frac{e^z}{e^z - 1} = \Big(\frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1}\Big) + \frac{(-1)^{q-1} z^q}{q!(e^z - 1)} \int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx \qquad (5.36)$$

Por la estimación dada en la fórmula 4.25:

$$\Big|\frac{(-1)^{q-1}}{q!} \frac{z^q}{(e^z - 1)} \int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx\Big| = \frac{1}{q!}\Big|\frac{e^z}{e^z - 1}\Big|\Big|\int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx\Big|$$

$$\leq \frac{1}{q!} \int_0^1 \big|B_q(x)\big|\big|e^{xz}\big|\, dx \leq \frac{1}{q!} \int_0^1 \frac{q!}{12(2\pi)^{q-2}} e^{|z|}\, dx \leq \frac{e^{|z|}}{12(2\pi)^{q-2}}$$

O sea,

$$\Big|\frac{(-1)^{q-1}}{q!} \frac{z^q}{(e^z - 1)} \int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx\Big| \leq \frac{e^{|z|}}{12(2\pi)^{q-2}}\, , para\, todo\, q \geq 2$$

Así, para $|z| < 2\pi$ se deduce que:

$$\frac{z^q}{q!} \int_0^1 B_q(x) e^{xz}\, dx \overset{q \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

Tomando límite cuando $q \longrightarrow \infty$ en la fórmula 5.36 nos conduce a:

$$\frac{e^z}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^{r-1}$$

Luego,

$$z\frac{e^z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{B_r}{r!} z^r \qquad (5.37)$$

Finalmente, tomando $B_0 = 1$ en la fórmula 5.37 se infiere:

$$z\frac{e^z}{e^z-1} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{B_r}{r!}z^r \tag{5.38}$$

Con lo cual se obtiene el resultado del teorema. ∎

Observación: Considerando la función:

$$\eta(z) = z\frac{e^z}{e^z-1} - \frac{z}{2}$$

para $z \in \mathbb{C}$ con $|e^z| \neq 1$ y $R_e(z) \neq 0$,notamos que:

$$z\frac{e^z}{e^z-1} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\Big(\frac{e^z+1}{e^z-1}\Big) = \frac{z}{2}\Big(\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}\Big)$$

Esto es,

$$z\frac{e^z}{e^z-1} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\Big(\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}\Big)$$

Lo cual indica que la función $\eta(z)$ es par. A su vez, como:

$$B_1 = \frac{1}{2}\; y\, B_{2k+1} = 0,\; para\, todo\, k \geq 1$$

se tiene que la fórmula 5.38 se puede escribir en la forma:

$$z\frac{e^z}{e^z-1} = 1 + \frac{z}{2} + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_{2r}}{(2r)!}z^{r2}$$

Entonces,

$$z\frac{e^z}{e^z-1} = z + 1 - \frac{z}{2} + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_{2r}}{(2r)!}z^{r2}$$

Es decir,

$$z\frac{e^z}{e^z-1} - z = \frac{B_0}{0!}z^0 + \frac{B_1}{1!}z^1 + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_{2r}}{(2r)!}z^{r2}$$

Por consiguiente,

$$z\Big(\frac{e^z}{e^z-1} - 1\Big) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{B_r}{r!}z^r$$

O bien,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r}{r!} z^r \tag{5.39}$$

Obsérvese que la restricción $|z| < 2\pi$ es inevitable ya que la función:

$$\eta(z) + \frac{z}{2} = z \frac{e^z}{e^z - 1}$$

tiene polos en $z = \pm 2\pi i$. Por lo tanto, podemos obviar la restricción $R_e(z) \neq 0$ porque ambos miembros en la fórmula 5.38 son funciones analíticas en la región $|z| < 2\pi$.

6 Algunas Cotas Importantes para los Números de Bernoulli

Ahora presentamos algunos resultados recientes sobre los números de Bernoulli que mejoran el obtenido en el Teorema 0.1; el resultado importante es de **Ciro D'Aniello** en su artículo [**3**] , de 1994 que mejora la desigualdad establecida por **D.J. Leeming** en su artículo [**5**] , de 1993 que dice:

$$4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e} \right)^{2k} < |B_{2k}| < 5\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e} \right)^{2k} , para\, todo\, k \geq 2$$

y cuya cota inferior también había sido obtenida por **A. Laforgia** en [**4**] , donde obtuvo otras cotas superiores incluyendo el caso $k = 1$ de la desigualdad anterior.

Definición 6.1 *La función* **zeta de Riemann** *denotada por* ζ *está definida como:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} , para\, todo\, s \in \mathbb{C}$$

Teorema 6.2 (D'Aniello) *Para todo* $k \geq 1$ *los números de Bernoulli satisfacen la siguiente desigualdad:*

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}(1 - 2^{-2k})} < |B_{2k}| < \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}(1 - 2^{1-2k})} \tag{6.40}$$

Demostración. Por la fórmula 3.10 del teorema 3.1 evaluada en $t = 0$ se verifica:

$$B_{2k}(0) = \frac{(-1)^{k-1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

Como $B_{2k}(0) = B_{2k}$ es el 2k-ésimo número de Bernoulli para todo $k \geq 1$, se cumple:

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \tag{6.41}$$

Relación esta obtenida en la fórmula 4.24. De donde,

$$|B_{2k}| > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)$$

Por la fórmula de Stirling ([1], p.257; 6.1.38)

$$t! = \sqrt{2\pi}\; t^{\left(t+\frac{1}{2}\right)} e^{\left(-x+\frac{\theta}{12t}\right)}$$

para $x > 0$ y $0 < \theta < 1$, aplicada a $t = 2k$ se tiene:

$$(2k)! = \sqrt{2\pi}(2k)^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)} e^{\left(-2k+\frac{\theta}{12\cdot 2k}\right)} = 2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{\left(-2k+\frac{\theta}{24k}\right)}$$

Esto es,

$$(2k)! = 2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{\left(-2k+\frac{\theta}{24k}\right)} \tag{6.42}$$

A su vez, como $0 < \theta < 1$ y $k \geq 1$ obtenemos:

$$2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{\left(-2k+\frac{\theta}{24k}\right)} > 2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k}$$

Lo cual implica que,

$$(2k)! > 2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k} \tag{6.43}$$

En consecuencia,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right) > \frac{2 \cdot 2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k}}{(2\pi)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)$$

Por otra parte,

$$\frac{4\sqrt{\pi k} k^{2k}}{\pi^{2k} e^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right) = 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)$$

Así,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right) > 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)$$

Luego,

$$|B_{2k}| > 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2^{2k}}\right)$$

A pesar de que esta no es la cota inferior de la fórmula 6.40, mejora la cota inferior de la fórmula 4.30 del teorema 4.4; por otro lado, de la fórmula ([1],p.807; 23.2.20):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^k} = (1-2^{-k})\zeta(k)$$

para todo $k \geq 1$, donde $\tau(k)$ es la función zeta de Riemann evaluada en $s = k$, se deduce:

$$\zeta(k) = \frac{1}{(1-2^{-k})}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^k}$$

En particular, para $s = 2k$ nos queda:

$$\zeta(2k) = \frac{1}{(1-2^{-2k})}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}$$

y por la fórmula ([1],p.807, 23.2.16):

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}|B_{2k}|$$

para todo $k \geq 1$, resulta:

$$|B_{2k}| = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k), \quad \text{para todo} \quad k \geq 1$$

Sustituyendo la fórmula 6.41 en la fórmula anterior, tenemos:

$$|B_{2k}| = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\cdot\frac{1}{(1-2^{-2k})}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}$$

Por consiguiente,

$$|B_{2k}| > \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\cdot\frac{1}{(1-2^{-2k})}$$

La cual es la cota inferior de los números de Bernoulli que establece el teorema. Por último, veamos como a partir de aquí podemos obtener la cota inferior de los números de Bernoulli que se establece en **D. J. Leeming** [**5**] . De nuevo, por la fórmula 6.42 es cierto que:

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}(1-2^{-2k})} > \frac{2 \cdot 2\sqrt{\pi k}(2k)^{2k}e^{-2k}}{(2\pi)^{2k}(1-2^{-2k})} = 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}\frac{1}{1-2^{-2k}}$$

O bien,

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \cdot \frac{1}{(1-2^{-2k})} > 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}\frac{1}{1-2^{-2k}}$$

Por lo tanto,

$$|B_{2k}| > 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}\frac{1}{1-2^{-2k}} \tag{6.44}$$

La cual es una desigualdad más fuerte que la establecida en la fórmula 6.43; y en última instancia, por la fórmula ([1],p.805, 23.1.15):

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\left(\frac{1}{1-2^{1-2k}}\right) > (-1)^{k+1}B_{2k} > \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}, \quad \text{para todo} \quad k \geq 1$$

es válido que:

$$|B_{2k}| < \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\left(\frac{1}{1-2^{1-2k}}\right) \quad \text{para todo} \quad k \geq 1 \tag{6.45}$$

De las fórmulas 6.44 y 6.45, se obtiene el resultado del teorema. ∎

Referencias

[**1**] **M. Abramowitz and I.A. Stegun**, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standars, App. Math. Series 55, Washington DC, 1965.
[**2**] **Tom M. Apostol**, Introducción a la Teoría Analítica de los Números, Editorial Reverte, 1980.
[**3**] **Ciro D'Aniello**, On some Inequalities for the for the Bernoulli Numbers, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo XLIII (1994), pp. 329-332.
[**4**] **A. Laforgia**, Inequalities for the Bernoulli and Euler Numbers, Bull. Un. Mat. It. 17-A (1980), pp. 98-101.
[**5**] **D. J. Leeming**, The Real Zeros for the Bernoulli Polynomials , J. App. Theory 58 (1989), pp. 124-150.

[**6**] **G. López** , Notas de Matemáticas N 211, Mérida, Venezuela, 2000.
[**7**] **Hans Rademacher**, Topics in Analytic Number Theory, Springer-Verlag 169, 1973.
[**8**] **Georgi P. Toltov**, Fourier Series, Dover, New York, 1976.

Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Los Andes.
Mérida 5101.
Venezuela
e-mail address: glauco@ciens.ula.ve