UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS DE MATEMATICA

IMPACTO DE LA TOPOLOGIA DEBIL EN ESPACIOS DE BANACH

POR

WILMAN BRITO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 135

IMPACTO DE LA TOPOLOGIA DEBIL EN ESPACIOS DE BANACH

POR

WILMAN BRITO

PRE-PRINT

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1993

IMPACTO DE LA TOPOLOGIA DEBIL EN ESPACIOS DE BANACH

Wilman Brito*
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Mérida-**Venezuela**

***Este trabajo fue financiado por el proyecto CDCHT # C-551-92**

Contenido

1 INTRODUCCION

La noción de compacidad débil ha resultado ser, en la vida de los espacios de Banach, una de las herramientas más profundas y poderosas. ¿Quieren una muestra? Pues bien, todo lo que tienen que hacer es recordar los siguientes hechos: **Teorema de Eberlein-Šmulian**: *Un subconjunto de un espacio de Banach es débilmente compacto si y sólo si el es débilmente secuencialmente compacto.* **Teorema de James**: *La bola unitaria cerrada de un espacio de Banach es débilmente compacta si y sólo si el espacio es reflexivo.* **Teorema de Krein-Milman**: *Todo subconjunto convexo y débilmente compacto de un espacio de Banach es la cápsula convexa cerrada de sus puntos extremales.* ¿Es suficiente? Bien. Comencemos ahora con un espacio de Banach X. El conocimiento de la topología débil sobre X nos brinda, por lo general, una mejor vía para el estudio de la estructura del espacio en sí mismo. Por ejemplo, si la topología débil sobre un espacio de Banach dual X^* es de Lindelöf, entonces dicho espacio posee la propiedad de Radon-Nikodym. En cosecuencia, si se conoce qué propiedades topológicas "*clásicas*" posee la topología débil de un espacio de Banach, entonces es posible determinar como es la estructura de ese espacio. Esa hermosa reunión de la topología de conjuntos con la de los espacios de Banach y, en particular, con la teoría de conjuntos han servido como estímulo fundamental en la búsqueda de nuevos campos de investigación. De hecho, casi todo el trabajo de S. Banach en [Ba] se soporta sobre profundas propiedades de la topología de conjuntos, mientras que muchos de los trabajos actuales descanzan, además, sobre la teoría de conjuntos (por ejemplo [Ne]).

De modo similar, si conocemos el comportamiento de las σ-algebras asociadas a las diferentes topologías sobre X, podemos obtener información sobre la estructura del espacio. Uno de los objetivos de estas notas consistirá en analizar las relaciones de las σ-algebras de Borel, de Baire y la de los conjuntos universalmente medibles que vienen asociadas a las topologías de la norma, la débil y la débil-$*$ en un espacio de Banach. También estudiaremos la estructura de los espacios de Banach a través del estudio de la teoría de medida sobre las σ-algebras ya mencionadas.

Pasamos ahora a exponer brevemente la organización de estas notas. La Sección 1 trata sobre los preliminares topológicos. Ninguna prueba se da en esta sección con excepción de la subsección sobre espacios Čech-completos.

En la Sección 2 se estudian algunas propiedades de los espacios polacos, los Analíticos y los $\mathcal{K}$-analíticos que serán utilizados posteriormente. Se proveen las demostraciones de los resultados expuestos. La siguiente sección, la Sección 4, trata sobre ciertos aspectos de medida y topología. En particular, se hace un breve estudio de las σ-algebras de Borel, de Baire y de los conjuntos universalmente medibles. En esa sección también se dan las pruebas de los resultados establecidos.

Finalmente, la Sección 5, el objeto de este trabajo, se estudian las propiedades topológicas de la topología débil de un espacio de Banach y sus implicaciones en el estudio de la estructura más fina de tales espacios. Esta sección comienza con exhibir cuales propiedades topológicas clásicas posee y cuáles no la topología débil de un espacio de Banach. De inmediato se pasa al estudio de los espacios Eberlein compactos y por ende a los espacios de Banach débilmente compactamente generados (WCG). Allí se exponen los estilos de H. P. Rosenthal y de S. P. Gul'ko sobre la caracterización de tales compactos. El método de Gul'ko es sencillamente hermoso, fácil e imprecionante. Se continúa con un profundo resultado de Rosenthal sobre la norma-separabilidad de cualquier subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$. Pasamos luego al estudio de ciertas propiedades topológicas locales en los espacios de Banach. Especificamente se estudian las implicaçiones de los espacios de Banach cuyas bolas unitarias cerradas provista con la topología débil son Polacas, satisfacen la condición de cadena numerable y son Čech-completas. Algunos resultados simplemente sorprendentes se muestran con estas herramientas. Por ejemplo, todo espacio de Banach con bola Čech-completa es WCG y, más aún, su dual también es WCG.

La siguiente subsección analiza algunas clases de espacios de Banach más generales que los WCG, pero con la particularidad de que cada una de ellas es débilmente Lindelöf. El resultado más importante es el que establece que todo espacio de Banach WCG es débilmente $\mathcal{K}$-analítico.

La última parte trata sobre la relación entre las σ-algebras de Borel asociadas a las topologías de la norma, la débil y la débil-$*$. Las relaciones entre ellas son explotadas para obtener información sobre la estructura del espacio. Por ejemplo, se prueba que todo espacio de Banach X norma-separable, reflexivo y, en general, todo espacio de Banach con una Kadec-norma satisface la igualdad $Borel(X, norma) = Borel(X, débil)$, pero que $X = \ell_\infty$ no la verifica. Sin embargo, si se sustituye "Borel" por "Universalmente medible" entonces la igualdad se cumple para cualquier espacio de Banach X. Un hecho sorprendente es que un espacio de Banach dual X^* posee la propiedad de Radon-Nikodym si y sólo si $Univ(X^*, norma) = Univ(X^*, \omega^*)$ y que si (X^*, ω) es de Lindelöf, entonces X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym; en particular, si X^* es WCG, entonces el tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

Como nota final me gustaría agradecer la inestimable paciencia que tuvo el Profesor Diómedes Bárcenas al leer la totalidad de estas notas y la de hacerme llegar sus observaciones y correcciones las que acepté con mucho entusiasmo. A él mi más profunda gratitud.

2 PRELIMINARES TOPOLOGICOS

El objetivo principal que se persigue con esta importante, pero extensa, sección es la recordar algunas de las de las herramientas topológicas que se utilizarán en el transcurso de estas notas. La mayoría de los resultados expuestos son, o bien bastante conocidos, o se encuentran en casi cualquier texto de topología, por lo que no entraremos en los detalles de sus pruebas. Sin embargo, existen algunas otras nociones no tan bien conocidas, en el sentido de que ellas no aprecen en la mayoría de los textos de topología, pero igualmente importantes, que presentaremos en el transcurso de estas notas. En este caso se proveerán las demostraciones de los resultados enunciados.

2.1 ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES

Puesto que nuestro principal objetivo es el estudio de la topología débil de un espacio de Banach nos vamos a limitar, fundamentalmente, al análisis de los espacios completamente regulares. Para llegar a ellos debemos, previamente, abordar algunas definiciones y resultados de gran utilidad. Las referencias para esta sección son [En], [Du] y [Na].

Como es bien conocido, la unión numerable de conjuntos cerrados no siempre es cerrado, y la intersección numerable de conjuntos abiertos no necesita ser abierto. Sin embargo, estas uniones e intersecciones aparecen con mucha frecuencia en análisis.

Sea X un espacio de Hausdorff. Un subconjunto F de X se llama un F_σ si F es la unión de una colección a lo sumo numerable de conjuntos cerrados de X. Un conjunto G de X se llama un G_δ si G es la intersección de una colección a lo sumo numerable de conjuntos abiertos de X.

No es díficil establecer que:

(1) La unión numerable y la intersección finita de conjuntos F_σ es un F_σ.

(2) La intersección numerable y la unión finita de conjuntos G_δ es un G_δ.

(3) Cada conjunto cerrado es un F_σ y cada conjunto abierto es un G_δ.

(4) En todo espacio métrico, cada conjunto cerrado es un G_δ y cada conjunto abierto es un F_σ.

Recordemos que un espacio topológico $(X, \mathcal{J})$ es de *Hausdorff* si, para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen entornos U_x y V_y de x e y respectivamente tales que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Una condición de separación mucho más fuerte que la de Hausdorff se obtiene remplazando uno de los puntos, en la definición anterior, por un conjunto cerrado.

Definición 2.1.1 *Un espacio de Hausdorff X se llama* **regular** *si para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existen conjuntos abiertos U y V tales que*

$$x \in U, \qquad F \subseteq V \quad y \quad U \cap V = \emptyset.$$

Un hecho importante acerca de los espacios regulares es que ellos son invariantes por subespacios y productos arbitrarios.

Teorema 2.1.2 (1) *Cualquier subespacio de un espacio regular es regular.*

(2) *$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es regular si y sólo si X_α es regular para todo α.*

Una noción mucho más fuerte que la regularidad viene dada por la de normalidad. Estos espacios son importantes porque permiten probar la existencia de funciones continuas sobre dicho espacio.

Definición 2.1.3 *Un espacio de Hausdorff X se llama* **normal** *si para cualquier par de subconjuntos cerrados y disjuntos F y G en X, existen subconjuntos abiertos U y V en X tales que*

$$F \subseteq U, \qquad G \subseteq V \quad y \quad U \cap V = \emptyset.$$

Es importante señalar que los espacios normales no poseen tan buenas propiedades de invariancia. Sin embargo, se tiene

Teorema 2.1.4 (1) *Espacios normales son invariantes bajo aplicaciones cerradas y continuas.*

(2) *Subespacios cerrados de espacios normales son normales.*

(3) *Si $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es normal, entonces X_α es normal para todo α.*

El siguiente resultado justifica la importancia de los espacios normales.

Teorema 2.1.5 (Lema de Urysohn) *Para que un espacio de Hausdorff X sea normal es necesario y suficiente que para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos F y G de X, exista una función continua $f : X \to \mathbf{R}$ tal que:*

$$f(F) = 0 \qquad f(G) = 1 \quad y \quad 0 \leq f \leq 1.$$

El Lema de Urysohn puede ser considerado como un caso especial del siguiente teorema de extensión.

Teorema 2.1.6 (Extensión de Tietze) *Sea X un espacio de Hausdorff. X es normal si y sólo si para cualquier conjunto cerrado F de X , cada función continua $f : F \to \mathbf{R}$ admite una extensión continua $\hat{f} : X \to \mathbf{R}$.*

Otro resultado de suma importancia que poseen los espacios normales es el siguiente, el cual es consecuencia del Teorema de Extensión de Tietze.

Teorema 2.1.7 *Un subconjunto A de un espacio normal X es un conjunto cerrado-G_δ si y sólo si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$.*

Se comprueba fácilmente que:

(1) Todo espacio normal es regular.

(2) Cualquier espacio métrico es normal.

(3) Todo espacio compacto es normal.

Una de las deficiencias que poseen los espacios normales es que ellos no son hereditarios por subespacios; es decir, subespacios de espacios normales no son necesariamente normales. Una noción intermedia entre normalidad y regularidad la constituye la siguiente :

Definición 2.1.8 *Un espacio de Hausdorff X es* **completamente regular** *si para cualquier punto $x \in X$ y cualquier conjunto cerrado F de X con $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que*

$$f(x) = 1 \quad y \quad f(F) = 0.$$

Es fácil probar que:

(a) Cualquier subespacio de un espacio normal es completamente regular.

(b) Cualquier espacio completamente regular es regular.

(c) Cualquier subespacio de un espacio compacto es completamente regular.

Teorema 2.1.9 (1) *Cualquier subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular.*

(2) *Cualquier espacio localmente compacto es completamente regular.*

(3) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *es completamente regular si sólo si* X_α *es completamente regular para todo* α.

Para cualquier espacio X, sea $C(X, I)$ el espacio de todas las funciones continuas $f : X \to I$, donde $I = [0, 1]$. Sea $\mathbf{P} = \prod_{f \in C(X,I)} I_f$, donde $I_f = I$ para toda $f \in C(X, I)$. Un subconjunto A de X se llama un *conjunto cero* si existe una función continua $f : X \to \mathbf{R}$ tal que $A = f^{-1}(0)$. Un conjunto B de X se llama un *conjunto co-cero* si $B = X \setminus Z(f)$, donde $Z(f)$ es un conjunto cero.

Teorema 2.1.10 *Para un espacio de Hausdorff X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X *es completamente regular.*

(2) X *es homeomorfo a un subespacio de* $\mathbf{P}$.

(3) *La familia* $\{coZ(f) : f \in C(X, I)\}$, *de todos los conjuntos co-ceros de* X *es una base para la topología de* X.

2.2 ESPACIOS DE LINDELÖF

En esta sección nos ocuparemos de los espacios que satisfacen el segundo axioma de numerabilidad y de los espacios de Lindelöf. Para una exposición de los resultados aquí mencionados consulte [Du] o [En].

Definición 2.2.1 *Un espacio de Hausdorff X se dice que satisface* **el segundo axioma de numerabilidad o que es segundo numerable** *si este tiene una base numerable.*

El siguiente resultado nos proporciona las propiedades de estabilidad de tales espacios.

Teorema 2.2.2 (1) *Espacios satisfaciendo el segundo axioma de numerabilidad son invariantes bajo aplicaciones continuas, abiertas y sobreyectivas.*

(2) *Cualquier subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable.*

(3) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *es segundo numerable si y sólo si cada* X_α *es segundo numerable y todos los* X_α*, salvo una colección a lo sumo numerable de ellos, consisten de un sólo punto.*

La propiedad más importante que poseen los espacios segundo numerable es la siguiente.

Teorema 2.2.3 (Lindelöf) *Si* X *es un espacio segundo numerable, entonces:*

(1) *cualquier cubrimiento abierto* (U_α) *de* X *admite un subcubrimiento numerable;*

(2) *cualquier colección de conjuntos abiertos no-vacíos y disjuntos dos a dos es numerable.*

El Teorema de Lindelöf nos sugiere las siguientes definiciones:

Definición 2.2.4 *Un espacio de Hausdorff* X *es de* **Lindelöf** *si cada cubrimiento abierto de* X *contiene un subcubrimiento numerable.*

Definición 2.2.5 *Un espacio de Hausdorff* X *se dice que satisface la* **condición de cadena numerable** *si toda familia de conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos es numerable.*

Siguiendo la tradición, diremos que un espacio *satisface la CCC* (countable chain condition) si dicho espacio cumple con la condición de cadena numerable.

El siguiente resultado es fácil de establecer.

Teorema 2.2.6 (1) *Todo subespacio denso de un espacio con la CCC es un espacio con la CCC.*

(2) *La imagen bajo una aplicación continua de un espacio con la CCC es un espacio satisfaciendo la CCC.*

En general, subespacios de un espacio satisfaciendo la CCC no necesariamente son espacios con la CCC

Recordemos que una familia de subconjuntos $\mathcal{H}$, de un conjunto dado X, tiene la *propiedad de intersección numerable* si cualquier subfamilia *numerable* de $\mathcal{H}$ tiene intersección no vacía.

Observación 1.

(a) *X es de Lindelöf si y sólo si para cualquier colección de conjuntos cerrados $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ de X con la propiedad de intersección numerable,*

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset.$$

En efecto, suponga que X es de Lindelöf y que $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección numerable pero tal que

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset.$$

Puesto que $(F_\alpha^c)_{\alpha\in I}$ es un cubrimiento abierto de X y X es de Lindelöf, se sigue que existe un conjunto numerable $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ de I tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{\alpha_i}.$$

Esto, por supuesto, ímplica que

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Imposible, pues $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ tiene la propiedad de intersección numerable.

Reciprocamente, suponga que $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ es un cubrimiento abierto de X el cual no posee subcubrimiento numerable alguno. Es claro que $(O_\alpha^c)_{\alpha\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección numerable y así, por hipotesis,

$$\bigcap_{\alpha \in I} O_\alpha^c \neq \emptyset.$$

Es decir,

$$X \neq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha,$$

lo cual es absurdo.

(b) *X satisface la CCC si y sólo si cualquier familia no numerable de subconjuntos abiertos no vacíos de X contiene dos conjuntos con intersección no vacía.*

Por el Teorema de Lindelöf, todo espacio segundo numerable es de Lindelöf. El recíproco no es cierto. Similarmente, si X es segundo numerable, entonces X es satisface la CCC.

El siguiente resultado enumera algunas de las propiedades más importantes de los espacios de Lindelöf.

Teorema 2.2.7 (1) *Todo espacio de Lindelöf es invariante bajo aplicaciones continuas sobreyectivas.*

(2) *Si X es un espacio regular Lindelöf, entonces X es normal.*

(3) *Todo subespacio cerrado de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf. En particular, cada conjunto F_σ de un espacio de Lindelöf es de Lindelöf.*

(4) *Si $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es de Lindelöf, entonces cada X_α es de Lindelöf.*

2.3 ESPACIOS SEPARABLES

Definición 2.3.1 *Un espacio de Hausdorff X se llama* **separable** *si este contiene un subconjunto denso numerable.*

Cualquier espacio discreto numerable, así como cualquier $\mathbf{R}^n$ es separable.

Teorema 2.3.2 (1) *La imagen continua de un espacio separable es separable.*

(2) *Cualquier subespacio abierto de un espacio separable es separable.*

(3) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *es separable si* X_α *es separable para todo* α *y la cardinalidad de* I *es menor o igual a* $2^{\aleph_0}$.

Teorema 2.3.3 (1) *Si* X *es segundo numerable, entonces* X *es separable.*

(2) *Todo espacio separable es un espacio con la CCC. En particular, cualquier producto de espacios separables tiene la CCC.*

(3) *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Es importante observar que separabilidad y Lindelöf son nociones que, en general, no están relacionadas. Sin embargo, en espacios métricos la vida es más agradable.

Teorema 2.3.4 *En cualquier espacio métrico* X*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El espacio* X *es segundo numerable.*

(2) *El espacio* X *es Lindelöf.*

(3) *El espacio* X *es separable.*

(4) *El espacio* X *satisface la CCC.*

Recordemos la siguiente noción, muy especial, de compacidad: un espacio métrico (X, d) se llama *totalmente acotado o precompacto* si, para cada $\varepsilon > 0$, el cubrimiento abierto $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ de X tiene un subcubrimiento finito, donde $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Teorema 2.3.5 *Un espacio métrico* X *es compacto si y sólo si* X *es totalmente acotado y completo.*

2.4 ESPACIOS DE BAIRE

Sea X un espacio topológico. Un conjunto A de X es **nunca denso** si $int\overline{A} = \emptyset$. Un subconjunto A de X es de **primera categoría** si A es la unión de una familia numerable de conjuntos nunca densos. Lo que sigue puede ser consulatdo en [Du].

Observe que toda unión finita de conjuntos nunca densos es nunca denso y que si A es abierto o cerrado, entonces la frontera de A es nunca denso.

Definición 2.4.1 *Un espacio toplológico X es un* **espacio de Baire** *si para cualquier colección numerable de conjuntos abiertos y densos en X, su intersección es densa en X.*

En la definición anterior, la palabra *numerable* no puede ser sustituida por una colección *no numerable.* En efecto, si para cada $x \in \mathbf{R}$, definimos $O_x = \mathbf{R} \setminus \{x\}$, entonces O_x es abierto y denso en $\mathbf{R}$, pero $\cap_{x \in \mathbf{R}} O_x = \emptyset$.

Otra formulación equivalente a la definición es la siguiente: *cualquier unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.*

Teorema 2.4.2 (Baire) (1) *Espacios métricos completos son de Baire.*

(2) *Cualquier espacio localmente compacto es de Baire.*

(3) *Sea X un espacio de Baire. Si (F_n) es una sucesión de conjuntos cerrados de X tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces existe al menos un n_0 tal que $int F_{n_0} \neq \emptyset$.*

2.5 COMPACTIFICACION DE STONE-ČECH

Los resultados expuestos en esta parte provienen de [En] y [Na].

Definición 2.5.1 *Una* **compactificación** *de un espacio topológico X es un par $(\omega X, \omega)$ donde ωX es un espacio de Hausdorff compacto y ω es un homeomorfismo de X sobre un subespacio* denso *de ωX.*

En la practica siempre identificaremos a X con su imagen $\omega(X) \subseteq \omega X$ y diremos simplemente que ωX es una compactificación de X. Puesto que cualquier subespacio de un espacio compacto es completamente regular, resulta que los únicos espacios que pueden ser compactificados son los espacios completamente regulares.

Teorema 2.5.2 (Stone-Čech) *Cualquier espacio completamente regular X admite una compactificación βX con la siguiente propiedad: toda función continua y acotada $f : X \to \mathbf{R}$ se extiende a una función continua y acotada $\hat{f} : \beta X \to \mathbf{R}$.*

La compactificación obtenida en el teorema anterior se llama **la compactificación de Stone-Čech** y será denotada por βX.

Teorema 2.5.3 (Stone) *Cualquier espacio completamente regular X tiene una compactificación βX tal que para cada espacio compacto K, toda función continua $f : X \to K$, admite una* única *extensión continua $F : \beta X \to K$.*

Obsrvación: Sea X un espacio completamente regular y supongamos que S es un subespacio de βX tal que $X \subseteq S$. Entonces $\beta S = \beta X$. En efecto, puesto que por definición, $\beta X = \overline{X}$ se sigue que S es también denso en βX. Ahora, si f es una función a valores reales continua y acotada sobre S, entonces su restricción a X, $f_{|X}$, sigue siendo continua y acotada. Por el Teorema de Stone-Čech, $f_{|X}$ admite una extesión continua y acotada, digamos F, a βX. Claramente $F = f$, lo cual prueba nuestra afirmación.

Entre los espacios completamente regulares, los localmente compactos se caracterizan por el hecho siguiente:

Teorema 2.5.4 (Alexandroff) *Cualquier espacio localmente compacto X admite una compactificación αX tal que $\alpha X \setminus X$ es un punto.*

La compactificación obtenida en el teorema anterior se llama **la compactificación de Alexandroff o compactificación por un punto** y la denotaremos por αX.

El próximo resultado pone en evidencia la importancia de los espacios localmente compactos.

Teorema 2.5.5 (1) *X es localmente compacto si y sólo si en* cualquier *compactificación $(\omega X, \omega)$, X es abierto en ωX.*

(2) *Si X un espacio localmente compacto, entonces su compactificación de Alexandroff es metrizable si y sólo si X es segundo numerable.*

2.6 ESPACIOS REALCOMPACTOS

La clase de los espacios realcompactos, pseudocompactos y localmente compactos cada uno de ellos contiene a la clase de los espacios compactos. En lo que sigue pasaremos a describir los dos primeros. Los resultados de esta sección están tomados de [En] y [Na].

En esta sección, X denotará un espacio completamente regular. Denotemos por $C(X)$ al espacio de todas las funciones continuas a valores reales sobre X y por $C_b(X)$ los miembros de $C(X)$ que son acotados.

Definición 2.6.1 *Un espacio completamente regular X se dice que es un* **espacio realcompacto** *si este es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha \in I} \mathbf{R}_\alpha$, donde $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}$ para todo α.*

Sea $C(X) = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Defina ahora una aplicación f de X en $\mathbf{P}_1 = \prod_{\alpha \in I} \mathbf{R}_\alpha$, donde $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}$ para todo α, por

$$f(x) = \{f_\alpha(x) \mid \alpha \in I\}, \qquad x \in X.$$

Es fácil ver que f es un homeomorfismo entre X y $f(X) \subseteq \mathbf{P}_1$. Identificando a X con $f(X)$, entonces podemos pensar a X, y así lo haremos, como un subconjunto de $\mathbf{P}_1$. Desde este punto de vista, cada $x \in X$ puede ser expresado como

$$x = \{f_\alpha(x) \mid \alpha \in I\}.$$

Si $\nu X = \overline{X}$ (la clausura de X en $\mathbf{P}_1$), entonces νX es obviamente un espacio realcompacto y contiene a X como un subconjunto denso. Más aún, cualquier miembro de $C(X)$ se extiende continuamente a νX. Esto nos dice que νX es una compactificación de X satisfaciendo

$$\nu X \subseteq \beta X.$$

Resumiendo, tenemos:

Teorema 2.6.2 (Hewitt) *Sea X un espacio completamente regular. Entonces existe un espacio realcompacto νX tal que:*

(1) *X es un subconjunto denso de νX.*

(2) *Cualquier función continua $f : X \to \mathbf{R}$ puede ser extendida a una función continua sobre νX.*

El espacio νX obtenido en el teorema anterior se le llama la **realcompactificación o la compactificación de Hewitt** de X.

El siguiente resultado establece una de las caracterizaciones más importantes de los espacios realcompactos.

Teorema 2.6.3 *Para un espacio completamente regular X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es realcompacto.*

(2) *Para cualquier punto $x_0 \in \beta X \setminus X$ existe una función continua $f : \beta X \to [0,1]$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in X$.*

(3) *$\nu X = X$.*

Algunas de las propiedades que poseen los espacios realcompactos, enumeradas a continuación, se deducen directamente de la definición.

(1) Cualquier subespacio cerrado de un espacio realcompacto es realcompacto.

(2) $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, donde $X_\alpha \neq 0$ para $\alpha \in I$, es realcompacto si y sólo si todos los espacios X_α son realcompactos.

(3) Cualquier espacio compacto es realcompacto.

(4) Cualquier espacio de Lindelöf es realcompacto.

Definición 2.6.4 *Un espacio de Hausdorff X se llama* **pseudocompacto** *si cualquier función continua $f : X \to \mathbf{R}$ es acotada.*

Es claro que cualquier espacio compacto es pseudocompacto.

El siguiente resultado caracteriza compacidad en términos de realcompacidad y pseudocompacidad.

Teorema 2.6.5 *Un espacio X es compacto si y sólo si X es realcompacto y pseudocompacto.*

2.7 ESPACIOS ČECH-COMPLETOS

Los resultados de esta sección provienen de [En].

Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de un espacio topológico X. Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se dice que es **$\mathcal{A}$-pequeña** si existen un $F \in \mathcal{F}$ y un $A \in \mathcal{A}$ tal que $F \subseteq A$.

Definición 2.7.1 *Un espacio completamente regular X se dice que es* **Čech-completo** *si existe una familia numerable $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cubrimientos abiertos de X con la propiedadde que cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad deintersección finita y $\mathcal{A}_n$ - pequeña para cada n, entonces $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

El siguiente resultado caracteriza espacios Čech-completos en términos de su compactificación de Stone-Čech.

Teorema 2.7.2 *Para un espacio completamente regular X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es Čech-completo.*

(2) *X es un conjunto G_δ en βX.*

(3) *X es un conjunto G_δ en cualquier compactificación ωX de X.*

Prueba:(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que X es Čech-completo y sea $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de cubrimintos abiertos de X satisfaciendo las propiedades establecidas en la definición. Pongamos $\mathcal{A}_n = \{U_{s,n}\}_{s\in S_n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Puesto que $X \subseteq \beta X$, existen conjuntos abiertos $V_{s,n}$ en βX tal que $U_{s,n} = X \cap V_{s,n}$ para $s \in S_n$ y $n = 1, 2, \ldots$ Claramente

$$X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\in S_n} V_{s,n}.$$

Para demostrar que X es un G_δ en βX es suficiente probar la otra inclusión.

Tomemos un punto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\in S_n} V_{s,n}$ y sea $\mathcal{B}(x)$ la familia de todos los entornos de x en βX. La familia $\mathcal{F} = \{X \cap \overline{V} \mid V \in \mathcal{B}(x)\}$, donde $\overline{V}$ es la clausura de V en βX, consiste de subconjuntos cerrados del espacio X y tiene la propiedad de intersección finita. Puesto que para cualquier n existe un $s \in S_n$ tal que $x \in V_{s,n}$, se sigue de la regularidad de βX (βX es un compacto de Hausdorff) que la familia $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}_n$ - pequeña para cada $n = 1, 2, \ldots$ Por hipótesis, tenemos que

$$X \cap \bigcap_{V\in\mathcal{B}(x)} \overline{V} \neq \emptyset,$$

y ya que βX es Hausdorff,

$$\bigcap_{V\in\mathcal{B}(x)} \overline{V} = \{x\},$$

de donde se tiene que $x \in X$. Esto prueba que X es un G_δ en βX.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X es un G_δ en βX. Entonces existe una sucesión $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos abiertos de βX tal que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Para cualquier $x \in X$ y $n = 1, 2, \ldots$, escojamos un conjunto abierto $V_{x,n} \subseteq \beta X$ tal que

$$x \in V_{x,n} \subseteq \overline{V}_{x,n} \subseteq G_n.$$

Sea

$$\mathcal{A}_n = (X \cap V_{x,n})_{x \in X}.$$

Demostraremos ahora que la familia $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ de cubrimientos abiertos de X tiene la propiedad requerida.

Consideremos una familia $\mathcal{F} = (F_s)_{s \in S}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita y $\mathcal{A}_n$-pequeña para todo n. Como la familia $(\overline{F}_s)_{s \in S}$ consiste de subconjuntos cerrados de βX con la propiedad de intersección finita, y βX es compacto, se obtiene que $\bigcap_{s \in S} \overline{F}_s \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap_{s \in S} \overline{F}_s$. Para ver que $x \in \bigcap_{s \in S} F_s$ será suficiente probar que $x \in X$.

Ya que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}_n$ - pequeña para todo n, escojamos para cada n, un $s_n \in S$ tal que $F_{s_n} \subseteq A_n$ para algún $A_n \in \mathcal{A}_n$ y un $x_n \in X$ tal que

$$F_{s_n} \subseteq X \cap V_{x_n,n}.$$

Puesto que

$$x \in \overline{F}_{s_n} \subseteq \overline{X \cap V}_{x_n,n} \subseteq \overline{V}_{x_n,n} \subseteq G_n$$

para $n = 1, 2, \ldots$, tenemos que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X.$$

Claramente (3) $\Rightarrow$ (2), por lo que nos resta probar que (2) $\Rightarrow$ (3).

Supongamos que X es un G_δ en βX. Entonces $\beta X \setminus X$ es un F_σ; es decir, existen subconjuntos cerrados F_n de βX tal que $\beta X \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Consideremos una compactificación ωX de X y una una aplicación $f : \beta X \to \omega X$ tal que $f\beta = \omega$, donde β y ω son los homeomorfismos en las compactifiaciones de Stone-Čech y ωX respectivamente. No es díficil ver que

$$\omega X \setminus X = f(\beta X \setminus X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

y puesto que $f(F_n)$ es cerrado en ωX, se concluye que $\omega X \setminus X$ es un conjunto F_σ en ωX. $\square$

En cualquier espacio Čech-completo vale el Teorema de Baire; esto es:

Teorema 2.7.3 (Categoría de Baire) *Sea X un espacio Čech-completo. Si $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, donde $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos densos y abiertos de X, entonces G es un conjunto denso en X.*

Prueba: Sea X un espacio Čech-completo y suponga que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, donde $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos densos y abiertos de X. Para demostrar que G es denso en X, será suficiente ver que para todo abierto V de X, $V \cap G \neq \emptyset$.

Sea $(\mathcal{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ una familia de cubrimientos abiertos de X teniendo las propiedades establecidas en la definición de Čech-completo y sea V un subconjunto abierto de X. Como G_1 es denso en X, existe un punto $x \in V \cap G_1$ y un entorno V_1 de x tal que

$$\overline{V}_1 \subseteq V \cap G_1 \quad \text{y} \quad \overline{V}_1 \subseteq A_1 \quad \text{para algún} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1.$$

Similarmente, repitiendo el proceso anterior al conjunto no vacío $V_1 \cap G_2$, uno obtiene un conjunto abierto V_2 tal que

$$\overline{V}_2 \subseteq V_1 \cap G_2 \quad \text{y} \quad \overline{V}_2 \subseteq A_2 \quad \text{para algún} \quad A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Por inducción uno define una sucesión $V_1, V_2, \ldots$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X satisfaciendo

$$V \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots, \quad \overline{V}_n \cap G_n \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{V}_n \subseteq A_n, \quad \text{para algún} \quad A_n \in \mathcal{A}_n.$$

Ya que $\mathcal{F} = (\overline{V}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita, resulta que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \neq \emptyset,$$

de donde se deduce que $V \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Recordemos que un espacio de Hausdorff X se llama **completamente metrizable** si existe una métrica completa sobre X. Es bien conocido que si X es un espacio completamente metrizable y M es un subconjunto G_δ de X, entonces M es completamente metrizable ([En, Teorema 4.3.23, p. 342]). Con esto en mente, tenemos:

Teorema 2.7.4 *Un espacio de Hausdorff X es completamente metrizable si y sólo si X es Čech-completo metrizable.*

Prueba: Una implicación es el próximo EJEMPLO I.1. Para la prueba del recíproco, supongamos que X es un espacio metrizable el cual es Čech- completo. Tome la completación $\tilde{X}$ del espacio X y una compactificación $\gamma\tilde{X}$ del espacio $\tilde{X}$; claramente $\gamma\tilde{X}$ es una compactificación de X. Un llamado al Teorema 2.7.2 nos confirma que X es un conjunto G_δ en $\gamma\tilde{X}$, y en consecuencia un conjunto G_δ en $\tilde{X}$. Por esto X es completamente metrizable. □

EJEMPLOS I.

(1) Todo **espacio métrico completo** (X, d) es Čech-completo.

En efecto, para cada n, sea $\mathcal{A}_n$ la familia de todos los subconjuntos abiertos de X de diámetro menor que $1/n$. Sea ahora $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita y la cual es $\mathcal{A}_n$-pequeña para cada n. Veamos que

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

En efecto, como $\mathcal{F}$ es $\mathcal{A}_n$-pequeña para todo n existen, para cada n, un $F_n \in \mathcal{F}$ y un $A_n \in \mathcal{A}_n$ tal que $F_n \subseteq A_n$. Por consiguiente, $d - diam F_n < 1/n$ para todo n. Si ahora definimos

$$\hat{F}_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i,$$

resulta que $(\hat{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X cuyos diámetros tienden a cero. Se sigue del Teorema de Encaje de Cantor que existe un $x \in X$ tal que

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n.$$

Tome ahora un elemento arbitrario F de $\mathcal{F}$ y defina

$$K_1 = F \quad \text{y} \quad K_n = F \cap \hat{F}_{n-1} \quad \text{n=2,3, \ldots} \quad .$$

De nuevo, la sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface las condiciones del Teorema de Encaje de Cantor y, por consiguiente,

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = F \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n = F \cap \{x\}.$$

Esto nos muestra que $x \in F$ y así, $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

(2) Cualquier **espacio localmente compacto** es Čech-completo.

Si para cada n, tomamos $\mathcal{A}_n$ como la colección de todos los conjuntos abiertos relativamente compactos, entonces la prueba sigue como en el ejemplo anterior.

Sea $\mathbf{Q}$ el conjunto de los números racionales. Entonces $\mathbf{Q}$ es un F_σ de $\mathbf{R}$ y en consecuencia $\mathbf{I} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ es un G_δ. Puesto que $\mathbf{R}$ es homeomorfo a $(0,1)$, el intervalo cerrado $[0,1]$ es una compactificación de $\mathbf{R}$ y también de $\mathbf{I}$. Siendo $\mathbf{I}$ un G_δ en $[0,1]$, el es Čech-completo, pero no localmente compacto. Por otro lado, $\mathbf{Q}$ no es Čech-completo. En efecto, si representamos a $\mathbf{Q}$ como una sucesión, digamos $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$, entonces $U_n = \mathbf{Q} \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}$ es un conjunto abierto denso de $\mathbf{Q}$ satisfaciendo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset.$$

De allí que por el Teorema de Categoría de Baire, $\mathbf{Q}$ no puede ser Čech-completo.

(3) Si X_n es Čech-completo para cada n, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es Čech-completo.

En efecto, suponga que X_n es Čech-completo para cada n. Por el Teorema 2.7.2 $\beta X_n \setminus X_n$ es un F_σ en βX_n. Por el Teorema de Tychonoff $\prod_{n=1}^{\infty} \beta X_n$ es una compactificación del espacio completamente regular $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ (Teorema 2.1.9). Note que no es cierto, en general, que $\prod_{n=1}^{\infty} \beta X_n = \beta \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Los conjuntos $F_j = \prod_{n=1}^{\infty} A_{n,j}$, donde $A_{j,j} = \beta X_j \setminus X_j$ y $A_{n,j} = \beta X_n$ siempre que $n \neq j$, son conjuntos F_σ en $\prod_{n=1}^{\infty} \beta X_n$ para $j = 1, 2, \ldots$ Puesto que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \beta X_n \setminus \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} Fj,$$

entoces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es Čech-completo.

(4) Čech-completitud es **hereditaria** con respecto a subconjuntos **cerrados** y a subconjuntos G_δ.

La primera afirmación sigue inmediatamente del teorema anterior, mientras que la segunda sigue de la observación de que si X es un G_δ en βX y G es un G_δ en X, entonces G es un G_δ en βX y , en consecuencia, en la clausura $\overline{G} \subseteq \beta X$ la cual es una compactificación de G.

3 CONJUNTOS ANALITICOS

El objetivo de esta sección consistirá en estudiar algunos aspectos de la Teoría de Conjuntos Analíticos y su vinculación, posteriormente, con la teoría de espacios de Banach. Dentro de esta teoría, los espacios polacos, los espacios analíticos y los $\mathcal{K}$-analíticos conformarán los pilares fundamentales en nuestro estudio sobre la estructura de los espacios de Banach. Las referencias para esta sección son [RJ] y [Co].

La teoría de los conjuntos analíticos estaba bien desarrollada en la década de los cuarenta; sin embargo, el gran impulso de esta teoría comienza en el año de 1949 cuando J. von Neumann publicó y usó su teorema de selección medible. Posteriormente, Roy O. Davies y G. Choquet en 1952 y 1953, respectivamente, probaron la potencia de los conjuntos analíticos cuando cada uno de ellos pudieron resolver algunos problemas pendientes en la teoría de medidas de Hausdorff y en la teoría de los espacios topológicos. Cada una de estos investigaciones dió origen a muchos desarrollos y aplicaciones.

EL CONJUNTO N^N

Por su importancia en la teoría de los conjuntos analíticos, el conjunto $\mathcal{N} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$será objeto de un análisis.

Recordemos que $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ representa el conjunto de todas las sucesiones infinitas en $\mathbf{N}$. Si d es la métrica discreta sobre $\mathbf{N}$, entonces es bien conocido y fácil de probar que $(\mathbf{N}, d)$ es un espacio métrico completo y separable. En consecuencia, $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{N_n}$, donde $\mathbf{N_n} = \mathbf{N}$ para todo n, es también un espacio *métrico completo y separable.* En efecto, si para cada $k \in N$ y $n_1, \ldots, n_k \in N$ definimos

$$\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k) = \{\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathcal{N} \mid \sigma_1 = n_1, \ldots, \sigma_k = n_k\},$$

entonces la familia de todos estos conjuntos, constituyen los entornos básicos de la topología producto de $\mathcal{N}$. Sin embargo, no es difícil verificar que la topología de $\mathcal{N}$ es generada por la métrica

$$D(\sigma, \varrho) = 1/min\{k \mid \sigma_k \neq \varrho_k\} \quad \text{si} \quad \sigma \neq \varrho, \qquad D(\sigma, \sigma) = 0.$$

Resulta que $\mathcal{N}$ con la métrica D es completo y separable.

También es conocido que $\mathcal{N}$ se puede identificar con el espacio $\mathcal{I}$ de los números irracionales entre 0 y 1 por medio de la función $c : \mathcal{N} \to \mathcal{I}$, dada por

$$c(\sigma) = \frac{1}{\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_2 + \frac{1}{\sigma_3 + \cdots}}},$$

donde el lado derecho de esta última igualdad representa la fracción continua de la sucesión $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$.

En beneficio de la comodidad denotaremos por $\mathbf{N}^{(N)}$ al conjunto de todas las sucesiones finitas s de enteros positivos, provisto de la topología discreta. Usaremos $l(s)$ para designar la longitud de s. Si $\sigma \in \mathcal{N}$ y $n \in \mathbf{N}$ entonces usaremos el símbolo $\sigma|n$ para denotar al elemento $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de $\mathbf{N}^{(N)}$ de longitud n. Observe que con esta nueva notación, si $s = (n_1, \ldots, n_k)$ entonces

$$\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k) = \mathcal{N}(s) = \{\sigma \in \mathcal{N} : \sigma|k = s\}.$$

Si $\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto X, diremos que un conjunto A en X es un conjunto *Souslin-$\mathcal{L}$* si A se puede representar en la forma

$$A = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} S(\sigma|n),$$

donde $S(\sigma|n) \in \mathcal{L}$ para todas las sucesiones finitas $S(\sigma|n)$ de enteros positivos.

Si ocurre, además, que para todo $\sigma, \varrho \in \mathcal{N}$, con $\sigma \neq \varrho$,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S(\sigma|n)\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} S(\varrho|n)\right) = \emptyset,$$

entonces diremos que el conjunto A tiene una *representación de Souslin-$\mathcal{L}$ disjunta.*

Si X es un espacio de Hausdorff, usaremos $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{Z}(X)$, o simplemente $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{Z}$,para denotar, respectivamente, la familia de los conjuntos cerrados, los conjuntos abiertos, los conjuntos compactos y los conjuntos ceros de funciones a valores reales continuas sobre X.

3.1 ESPACIOS POLACOS

Comenzaremos con la definición de espacios polacos y algunos ejemplos de tales espacios.

Definición 3.1.1 *Un espacio de Hausdorff* $(X, \mathcal{J})$ *se dice que es un* **espacio polaco** *si el es homeomorfo a un espacio métrico completo y separable.*

EJEMPLOS II.

1.) Subespacios **cerrados** de espacios polacos son polacos.

Ésta afirmación sigue del hecho de que en espacios completos los únicos subconjuntos cerrados de dicho espacio son los completos.

2.) Espacios **métricos compactos** son polacos.

Esto es consecuencia del hecho de que todo espacio métrico compacto es a su vez completo y separable.

3.) Subespacios **abiertos** de espacios polacos son polacos.

Prueba: Sea X un espacio polaco y sea d una métrica completa sobre X que genera su topología separable. Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto no-vacío de X, con $\mathcal{O} \neq X$. Defina ahora la siguiente métrica D sobre $\mathcal{O}$:

$$D(u,v) = d(u,v) + \left| \frac{1}{d(u,\mathcal{O}^c)} - \frac{1}{d(v,\mathcal{O}^c)} \right|.$$

Es fácil ver que D y d disfrutan de las mismas suceciones convergentes. En efecto, puesto que $D \geq d$ entonces, si $u_n \xrightarrow{D} u$ también $u_n \xrightarrow{d} u$. Por otro lado, si $u_n \xrightarrow{d} u$, entonces, como $u_n, u \in \mathcal{O}$ resulta que

$$\frac{1}{d(u_n,\mathcal{O}^c)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{d(u,\mathcal{O}^c)}$$

son reales y puesto que $d(u_n,\mathcal{O}^c) \longrightarrow d(u,\mathcal{O}^c)$, entonces

$$d(u_n,\mathcal{O}^c)^{-1} \longrightarrow d(u,\mathcal{O}^c)^{-1}.$$

De aqui se concluye que $u_n \xrightarrow{D} u$.

Lo antes expuesto nos permitirá ahora deducir que D es una métrica *completa*. En efecto, si $(u_n)_n$ es D-Cauchy, entonces $(u_n)_n$ es d-Cauchy y en consecuencia convergente a algún $x \in X$ en la d-métrica. Afirmamos que $x \in \mathcal{O}$. Suponga por un momento que $x \notin \mathcal{O}$. Entonces $x \in \mathcal{O}^c$ y así, $d(x, \mathcal{O}^c) = 0$. Pero como $d(u_n, \mathcal{O}^c) \to d(x, \mathcal{O}^c)$ se tiene que $\lim_n d(u_n, \mathcal{O}^c) = 0$. De aquí se sigue que podemos encontrar una subsuceción (u_{n_k}) de (u_n) tal que

$$\left| \frac{1}{d(u_{n_k}, \mathcal{O}^c)} - \frac{1}{d(u_{n_j}, \mathcal{O}^c)} \right| \geq k, \qquad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Por estó,

$$\overline{\lim_{m,k}} D(u_{n_m}, u_{n_k}) = \infty,$$

contradiciendo el hecho de que (u_{n_k}) es D-Cauchy. Esto confirma que $x \in \mathcal{O}$ y termina la prueba. □

4.) **Sumas disjuntas numerables** de espacios polacos son polacos.

Recordemos que si (X_n) es una familia numerable de espacios topológicos, los cuales suponemos disjuntos dos a dos, entonces

$$\oplus_{n=1}^{\infty} X_n,$$

denota al espacio topológico

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

cuya topología $\mathcal{J}$ viene dada por: $U \in \mathcal{J}$ si y sólo si $U \cap X_n$ es abierto en X_n para todo n. En nuestro caso, si cada (X_n, d_n) es un espacio métrico completo separable, $\oplus_{n=1}^{\infty} X_n$, también es un espacio métrico completo separable con la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} d_n(x, y) & \text{si } x, y \in X_n \\ 1 & \text{si } x \in X_m,\ y \in X_n \text{ para } m \neq n. \end{cases}$$

5.) **Productos numerables** de espacios polacos son Polacos.

En efecto, si $(X_n)_n$ es una sucesión de espacios métricos completos y separables, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ también es un métrico completo y separable.

6.) **TEOREMA DE ALEXANDROFF.** *Sea X un espacio polaco. Un subconjunto S de X es polaco si y sólo si S es un G_δ en X.*

Prueba. Supongamos en primer lugar que $S \subseteq X$ es un G_δ. Entonces $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ donde U_n es abierto en X. Por el Ejemplo 4, cada U_n es polaco y así, $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$ es polaco gracias al Ejemplo 6. Definamos ahora

$$\Delta = \left\{ (u_n)_n \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} U_n \mid u_j = u_k \quad \text{para todo} \quad j,k \right\}.$$

Δ es un subespacio cerrado del espacio polaco $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$, y en consecuencia, Δ es polaco.

Es fácil ver ahora que la aplicación

$$\Theta : S \to \Delta$$

definida por

$$\Theta(u) = (u_n)_n,$$

donde $u = u_n$ para todo n, es un homeomorfismo del primer espacio sobre el segundo. Esto nos demuestra que S es polaco.

Reciprocamente, supongamos que S es un subespacio polaco del espacio métrico completo y separable (X, d). Sea D una métrica completa que genera la topología de S. Observe que d y D generan la misma topología de S. Para cada n, sea

$$V_n = \bigcup \{W \subseteq X \mid W \quad \text{es abierto}, \quad W \cap S \neq \emptyset,\ D - diam W \cap S \leq 1/n\}.$$

Afirmamos que

$$S = \overline{S} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

En efecto, sea $s \in S$ y miremos el conjunto

$$U = \{z \in S : D(z,s) < 1/3n\}.$$

U es claramente D-abierto en S y puesto que D y d generan la misma topología, U es d-abierto en S; es decir, U es de la forma $U = W \cap S$ para algún conjunto d-abierto $W \subseteq X$. Más aún, como $D - diamU \leq 2/3n$, resulta que $s \in V_n$ para todo n. De aquí se sigue que

$$S \subseteq \overline{S} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

Supongamos ahora que

$$s \in \overline{S} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

Puesto que $s \in \cap_{n=1}^{\infty} V_n$, entonces existe para cada n, un conjunto W_n d-abierto en X tal que $s \in W_n$, $W_n \cap S \neq \emptyset$ y con $D - diamW_n \cap S \leq 1/n$. Remplazando W_n por $W_1 \cap \ldots \cap W_n$ si fuese necesario, podemos suponer que los W_n son decrecientes. Más aún, mirando las bolas d-abiertas con centro en s, podemos asumir también que $d - diamW_n < 1/n$. Teniendo en mente que $s \in \overline{S}$, entonces la pertencia de s a W_n aún nos asegura que $W_n \cap S \neq \emptyset$. Considere ahora la sucesión de conjuntos $(\overline{W_n \cap S}^D)_n$. Es claro que ella es decreciente y sus diámetros tienden a cero. El Teorema de encaje de Cantor nos dice que existe un único $x \in S$ común a todos los $\overline{W_n \cap S}^D$. Por otro lado, s es el único elemento común a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{W_n}^{(X,d)}$. Notemos finalmente que

$$\overline{W_n \cap S}^{(S,D)} = \overline{W_n \cap S}^{(S,d)} \subseteq \overline{W_n}^{(X,d)},$$

por lo que $x = s$ y así, $s \in S$. Esto prueba que

$$S = \overline{S} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right).$$

Ahora bien, como $\overline{S}$ es cerrado en el espacio metrizable X entonces $\overline{S}$ es un G_δ y en consecuencia S, siendo la intersección de dos G_δ, es también un G_δ. Esto termina la prueba. □

7.) Espacios de Hausdorff **localmente compactos** satisfaciendo **el segundo axioma de numerabilidad** son polacos.

En efecto, recordemos que un espacio Hausdorff X es localmente compacto si y sólo si X admite una compactificación por un punto (Teorema 2.33). Más aún, si se supone que X satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces su compactificación αX es metrizable (Teorema 2.34 (2)). Pero como X es abierto en αX (Teorema 2.34 (1)) el resultado sigue del Ejemplo 7.

8.) **TEOREMA 1.** *Cualquier espacio polaco es una imagen continua de $\mathcal{N}$.*

Prueba: Sea X un espacio polaco y suponga que d es una métrica completa sobre X que genera su topología separable.

Nuestro primer objetivo será construir una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, digamos

$$(F(n_1, \dots, n_k))_{(n_1,\dots,n_k)\in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}},$$

para $k = 1, 2, \dots$, con las siguientes propiedades:

(a) $d - diam F(n_1, \dots, n_k) \leq 1/k$,

(b) $F(n_1, \dots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k} F(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k)$, y

(c) $X = \cup_{n_1} F(n_1) = \bigcup_{n_1,n_2} F(n_1, n_2) = \dots$.

Para comenzar con este proceso inductivo tomemos $k = 1$. Sea $(x_{n_1})_{n_1}$ un conjunto denso numerable en X. Para cada n_1 sea $F(n_1)$ la bola cerrada con centro en x_{n_1} y radio $1/2$. Es claro que

$$X = \bigcup_{n_1} F(n_1).$$

Observemos que $(F(n_1))_{n_1}$ es una colección numerable de subconjuntos separables de X. Seleccionemos ahora, en cada $F(n_1)$, $n_1 = 1, 2, \dots$, un subconjunto denso numerable, digamos $(x_{n_1}^j)_{j=1}^{\infty}$, y elijamos ahora todas las bolas cerradas con centro en esos puntos y radio $1/4$. Si enumeramos por n_2 todos los subíndices obtenidos en este paso y denotamos todas las bolas anteriores por $(F(n_1, n_2))_{n_2}$, resulta que (a), (b) y (c) se satisfacen trivialmente.

Continuando inductivamente con este proceso se obtiene la sucesión

$$(F(n_1, \dots, n_k))_{(n_1,\dots,n_k)\in \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}},$$

con las propiedades requeridas.

Para definir nuestra función $f : \mathcal{N} \to X$, tomemos $\mathbf{n} = (n_i) \in \mathcal{N}$. La sucesión

$$(F(n_1, \ldots, n_k))_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbf{N}^{(\mathcal{N})}}$$

es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos del espacio métrico completo (X, d), cuyos d-diámetros tienden a cero. El Teorema de Encaje de Cantor nos asegura la existencia de un único $x_{\mathbf{n}}$ común a todos los $F(n_1, \ldots, n_k)$. Sea

$$f(\mathbf{n}) = x_{\mathbf{n}}.$$

De inmediato probaremos que f es continua. En efecto, si $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{N}$ y $m_i = n_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $F(m_1, \ldots, m_k) = F(n_1, \ldots, n_k)$ y así, $f(\mathbf{m}), f(\mathbf{n}) \in F(n_1, \ldots, n_k)$. De esto se sigue que

$$d(f(\mathbf{m}), f(\mathbf{n})) \leq 1/k.$$

Pero esto lo que nos está diciendo es que todo par de puntos muy próximos $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{N}$ tienen imágenes muy próximas $f(\mathbf{m}), f(\mathbf{n})$ en X. Por esto, f es continua.

La prueba concluirá si logramos demostrar que f es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Por (c), $x \in F(n_1)$ para algún n_1, pero por (b) y (c), $x \in F(n_1, n_2)$ para algún n_1, n_2. Continuando con este procedimiento se obtiene un $\mathbf{n} = (n_j) \in \mathcal{N}$ tal que

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F(n_1, \ldots, n_k),$$

y así, $f(\mathbf{n}) = x$.

10.) $\mathbf{I}$, el conjunto de los **números irracionales**, es polaco.

En efecto, puesto que $\mathbf{R}$ es polaco y $\mathbf{I}$ es un G_δ en $\mathbf{R}$, el resultado sigue del Ejemplo 7. Observemos que $\mathbf{Q}$, el conjunto de los números racionales es un F_σ.

3.2 ESPACIOS ANALITICOS

Algunos objetos especiales más generales que los espacios polacos y que han demostrado ser herramientas poderosas en el análisis, son los llamados espacios analíticos. Más aún, si estos objetos viven dentro de un espacio polaco, entonces ellos se comportan de una forma muy agradable.

El Teorema 1 del Ejemplo II (9), permite formular la siguiente:

Definición 3.2.1 *Un espacio de Hausdorff X se llama* **analítico o Souslin** *si existen un espacio polaco Z y una función continua $f : Z \to X$ tal que $f(Z) = X$; es decir, X es una imagen continua de un espacio polaco.*

Es claro que todo espacio polaco es un espacio analítico. Más aún, puesto que $\mathcal{N}$ es un espacio polaco resulta que:

Teorema 3.2.2 *Un espacio de Hausdorff X es analítico si y sólo si X es una imagen continua de $\mathcal{N}$.*

Prueba: Sea X un espacio analítico. Entonces existen un espacio polaco Z y una función continua $f : Z \to X$ tal que $f(Z) = X$. Como Z es polaco, por Ejemplo II (10), existe una función continua $\varphi : \mathcal{N} \to Z$ tal que $\varphi(\mathcal{N}) = Z$. Claramente la función $f \circ \varphi : \mathcal{N} \to X$ es continua y satisface $f \circ \varphi(\mathcal{N}) = X$. El recíproco es trivial. □

EJEMPLOS III.

1.) Cualquier subespacio **cerrado** de un espacio analítico es analítico.

En efecto, sea X un espacio analítico. Entonces existe una función continua $f : \mathcal{N} \to X$ tal que $f(\mathcal{N}) = X$. Si A es cerrado en X también lo es $f^{-1}(A)$ en $\mathcal{N}$. Así, $f^{-1}(A)$ es Polaco. La restricción de f a $f^{-1}(A)$ es claramente una función continua de $f^{-1}(A)$ sobre A.

2.) Cualquier subconjunto **abierto** de un espacio analítico es analítico.

La prueba es idéntica a la anterior.

3.) Cualquier conjunto G_δ en un espacio polaco es analítico.

Consecuencia inmediata del Teorema de Alexandroff.

4.) Si X_n es analítico para cada n, entonces:

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ es analítico.

(b) $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es analítico.

(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ es analítico.

Prueba: (a). Para cada n, sean Z_n un espacio polaco y $f_n : Z_n \to X_n$ una aplicación continua tal que $f_n(Z_n) = X_n$. Sea $Z = \oplus_{n=1}^{\infty} Z_n$ la suma disjunta de los Z_n. Z es polaco (Ejemplo II (5)). Para cada $z \in Z$ existe un único n tal que $z \in Z_n$. Definamos ahora $f : Z \to \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ por $f(z) = f_n(z)$. Es fácil ver que f es continua y que $f(Z) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

(b) Para cada n, sean Z_n un espacio polaco y $f_n : Z_n \to X_n$ una aplicación continua tal que $f_n(Z_n) = X_n$. Si $Z = \prod_{n=1}^{\infty} Z_n$, entonces Z es polaco (Ejemplo II). Defina $f : Z \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ por $f((z_n)_n) = (f(z_n))_n$. Entonces f es continua y claramente $f(Z) = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

(c) Sean Z_n y f_n como en los casos anteriores. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} Z_n$ es polaco y

$$\Delta = \left\{ (z_n)_n \in \prod_{n=1}^{\infty} Z_n \mid f_j(z_j) = f_k(z_k) \quad \text{para cada} \quad j, k \right\}$$

es un cerrado en $\prod_{n=1}^{\infty} Z_n$ y por consiguiente polaco. Si definimos

$$f : \Delta \to \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$$

por

$$f((z_n)_n) = f_1(z_1),$$

entonces f es continua y $f(\Delta) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

5.) Cualquier subconjunto de **Borel** de un espacio **polaco** es analítico.

Prueba: Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos analíticos de un espacio polaco X y sea $\mathcal{P}$ la familia más pequeña de subconjuntos de X satisfaciendo las siguientes condiciones:

(a) cualquier conjunto abierto está en $\mathcal{P}$;

(b) cualquier conjunto cerrado está en $\mathcal{P}$;

(c) si $(F_n)_n$ es una colección numerable de miembros de $\mathcal{P}$, entonces $\bigcap\limits_n F_n \in \mathcal{P}$; y

(d) si $(F_n)_n$ es una colección numerable y disjunta dos a dos de miembros de $\mathcal{P}$, entonces $\bigcup\limits_n F_n \in \mathcal{P}$.

Primeramente demostraremos la siguiente:

Afirmación: $Bo(X)$, la σ-algebra de Borel de X, coincide con $\mathcal{P}$.

En efecto, sea $\mathcal{P}_0 = \{F \in \mathcal{P} \mid F^c \in \mathcal{P}\}$. Claramente $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq Bo(X)$. Más aún, (a) y (b) juntos nos aseguran que $\mathcal{P}_0$ contiene cualquier subconjunto abierto de X y, además, que $\mathcal{P}_0$ es cerrado bajo la operación de tomar complementos. Suponga ahora que $(F_n)_n$ es una sucesión de miembros de $\mathcal{P}_0$. Entonces

$$\bigcup_n F_n = F_1 \cup (F_2 \cap F_1^c) \cup (F_3 \cap F_1^c \cap F_2^c) \cup \ldots \quad \in \mathcal{F},$$

y

$$\left(\bigcup_n F_n\right)^c = \bigcap_n F_n^c \quad \in \mathcal{P},$$

por lo que $\bigcup_n F_n \in \mathcal{P}_0$. Lo acabado de probar nos muestra que $\mathcal{P}_0$ es una σ-algebra de subconjuntos de X conteniendo a todos los conjuntos abiertos. Así,

$$\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P} \subseteq Bo(X) \subseteq \mathcal{P}_0.$$

Puesto que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$, gracias al Ejemplo (4), el resultado queda demostrado.

6.) **TEOREMA DE SEPARACION.** *Sean X un espacio polaco y A_1, A_2 subconjuntos analíticos y disjuntos de X. Entonces A_1 y A_2 están separados.*

Antes de probar este resultado necesitaremos precisar qué significa que dos conjuntos esten separados..

Diremos que dos conjuntos disjuntos A_1 y A_2 en X están **separados** si existen conjuntos de Borel disjuntos B_1 y B_2 tales que $A_i \subseteq B_i$ para $i = 1, 2$.

He aquí dos hechos que nos interesan de los conjuntos separados:

(A) Si $C_1, C_2, \ldots$ y D son subconjuntos de X tal que para cada n, C_n y D están separados, entonces $\bigcup_n C_n$ y D están separados.

En efecto, para cada n existe un conjunto de Borel B_n tal que $C_n \subseteq B_n$ y $D \subseteq B_n^c$. Puesto que $\bigcup_n C_n \subseteq \bigcup_n B_n := B$ y $D \subseteq \bigcap_n (B_n^c) = (\bigcup_n B_n)^c = B^c$, entonces B y B^c son los conjuntos de Borel deseados.

(B) Si $E_1, E_2, \ldots$ y $F_1, F_2, \ldots$ son subconjuntos de X tales que para cada m y n, E_m y F_n están separados, entonces $\bigcup_m E_m$ y $\bigcup_n F_n$ están separados.

En efecto, por una aplicación repetida de (A) vemos que para cada m, E_m y $\bigcup_n F_n$ están separados. Aplicando una vez más (A), se obtiene que $\bigcup_m E_m$ y $\bigcup_n F_n$ están separados.

Prueba del Teorema de Separación: Por el Teorema 3.2.2, existen funciones continuas $f, g : \mathcal{N} \to X$ tales que $f(\mathcal{N}) = A_1$ y $g(\mathcal{N}) = A_2$.

Supongamos por un momento que A_1 y A_2 no pueden ser separados. Para cada $k \in \mathbf{N}$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}^{(N)}$, recordemos que

$$\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k) = \{\sigma = (\sigma_i)_i \in \mathcal{N} \mid \sigma_1 = n_1, \ldots, \sigma_k = n_k\},$$

y

$$A_1 = \bigcup_{m_1} f(\mathcal{N}(m_1)) \quad \text{y} \quad A_2 = \bigcup_{n_1} g(\mathcal{N}(n_1)).$$

Por (B), existen m_1 y n_1 tales que $f(\mathcal{N}(m_1))$ y $g(\mathcal{N}(n_1))$ no pueden ser separados. Pero

$$f(\mathcal{N}(m_1)) = \bigcup_{m_2} f(\mathcal{N}(m_1, m_2)) \quad \text{y} \quad g(\mathcal{N}(n_1)) = \bigcup_{n_2} g(\mathcal{N}(n_1, n_2)),$$

de modo que existen m_2 y n_2 tales que $f(\mathcal{N}(m_1, m_2))$ y $g(\mathcal{N}(n_1, n_2))$ no pueden ser separados.

Continuando inductivamente con este proceso se obtienen $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{N}$ tales que para cada k,

$$f(\mathcal{N}(m_1, \ldots, m_k)) \quad \text{y} \quad g(\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k))$$

no pueden ser separados.

Lo anterior da origen al siguiente hecho: $f(\mathbf{m}) = g(\mathbf{n})$.
En efecto, si $f(\mathbf{m}) \neq g(\mathbf{n})$ entonces existen, puesto que X es Hausdorff, dos conjuntos abiertos y disjuntos en X, digamos U y V, tales que U contiene a $f(\mathbf{m})$ y V a $g(\mathbf{n})$. Las pre-imágenes de estos conjuntos abiertos, $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$, son conjuntos abiertos y disjuntos en $\mathcal{N}$. Pero la sucesiones,

$$(\mathcal{N}(m_1, \ldots, m_k))_{(m_1,\ldots,m_k)\in\mathbf{N}^{(N)}} \quad \text{y} \quad (\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k))_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbf{N}^{(N)}}$$

de conjuntos abiertos constituyen una base de entornos alrededor de $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ respectivamente. De aquí se sigue que algún $\mathcal{N}(m_1, \ldots, m_k)$ está en $f^{-1}(U)$ y algún $\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k)$ dentro de $g^{-1}(V)$. Esto nos dice

$$f(\mathcal{N}(m_1, \ldots, m_k)) \quad \text{y} \quad g(\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k))$$

están separados. Imposible. Así, $f(\mathbf{m}) = g(\mathbf{n})$.

Todo lo anterior es contradictorio, ya que al suponer que los conjuntos *disjuntos* A_1 y A_2 no pueden ser separados conduce a la conclusión de que $f(\mathbf{m}) = g(\mathbf{n})$, donde $f(\mathbf{m}) \in A_1$ y $g(\mathbf{n}) \in A_2$. □

7.) **Corolario:** *Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Si A y A^c son ambos analíticos, entonces A es de Borel.*

Prueba: En efecto, por el Teorema de Separación, existe un conjunto de Borel B tal que $A \subseteq B$ y $A^c \subseteq B^c$. De aquí se sigue que $A = B$.

Definición 3.2.3 *Un espacio de Hausdorff X se dice que es un* **espacio de Lusin** *si existen un espacio polaco Y una función continua inyectiva de Y sobre X.*

Es claro que todo espacio de Lusin es analítico. En consecuencia, **todas las propiedades obtenidas en el Ejemplo III siguen siendo válidas para los espacios de Lusin.**

3.3 ESPACIOS $\mathcal{K}$-ANALITICOS

La noción de espacios $\mathcal{K}$-analíticos, la cual se debe a G. Choquet, es más general que la de conjunto analítico. Comenzaremos por dar la definición clásica de espacios $\mathcal{K}$-analíticos y posteriormente daremos otra definición equivalente, la cual resultará ser más útil en la práctica.

Un subconjunto K de un espacio de Hausdorff X se dice que es un $K_{\sigma\delta}$, si existe una sucesión (K_{mn}) de subconjuntos compacto de X tal que

$$K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{mn}.$$

Definición 3.3.1 (G. Choquet) *Un espacio de Hausdorff X se llama* **$\mathcal{K}$-analítico**, *si X es la imagen continua de algún $K_{\sigma\delta}$ situado en un conjunto compacto; esto es, X es $\mathcal{K}$-analítico si existen un compacto W, un subconjunto K de W, el cual es un $K_{\sigma\delta}$, y una función continua $f : K \to X$ tal que $f(K) = X$.*

Para poder formular la otra definición equivalente, necesitaremos introducir algunas notaciones.

Recordemos que $\mathcal{K}(X)$ denota la colección de todos los subconjuntos compactos de X, y como siempre $\mathcal{N} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

Sea X un espacio de Hausdorff. Una aplicación $K : \mathcal{N} \to \mathcal{K}(X)$ se dice que es **semi-continua superior** si para cada $f \in \mathcal{N}$ y cada conjunto abierto G en X con $K(f) \subseteq G$ existe un entorno U de f tal que $K(g) \subseteq G$ para cada $g \in U$.

Teorema 3.3.2 [*Jayne*] *Sea X un espacio de Hausdorff. Las siguientes condicianes son equivalentes:*

(1) *X es $\mathcal{K}$-analítico.*

(2) *Existe una aplicación semi-continua superior $K : \mathcal{N} \to \mathcal{K}(X)$ tal que*

$$\bigcup_{f \in \mathcal{N}} K(f) = X.$$

La demostración del teorema anterior es obra de J. E. Jayne. Una prueba del Teorema 3.3.2 se encuentra en [RJ, sec. 2.8,].

Entre los espacios $\mathcal{K}$-analíticos más conocidos están los analíticos. En efecto, si X un espacio analítico, entonces existe una función continua

$$\psi : \mathcal{N} \to X$$

tal que $\psi(\mathcal{N}) = X$. Defina ahora

$$K : \mathcal{N} \to \mathcal{K}(X)$$

por $K(f) = \{\psi(f)\}$, para cada $f \in \mathcal{N}$. Es claro que K es semi-continua superior y satisface

$$\bigcup_{f \in \mathcal{N}} K(f) = X.$$

Uno de los resultados que más nos interesan de los espacios $\mathcal{K}$-analíticos es el siguiente:

Teorema 3.3.3 (1) *Cada espacio $\mathcal{K}$-analítico es de Lindelöf.*

(2) *Cada espacio regular $\mathcal{K}$-analítico es normal, y de aquí completamente regular.*

Prueba: (1) Sea $\mathcal{O}$ un cubrimiento abierto de un espacio $\mathcal{K}$-analítico X. Escojamos una aplicación semi-continua superior $K : \mathcal{N} \to \mathcal{K}(X)$ tal que $\bigcup_{f \in \mathcal{N}} K(f) = X$. Para cada $f \in \mathcal{N}$ existe, por la compacidad de $K(f)$, una familia finita $\mathcal{O}_f \subseteq \mathcal{O}$ la cual cubre a $K(f)$. Ahora bien, como K es semi-continua superior, podemos encontrar un entorno abierto V_f de f con

$$\bigcup_{g \in V_f} K(g) \subseteq \bigcup \mathcal{O}_f.$$

Claramente $\mathcal{N} = \bigcup_{f \in \mathcal{N}} V_f$ y puesto que $\mathcal{N}$ es de Lindelöf, existe un subconjunto numerable C de $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} = \bigcup_{f \in C} V_f$. De esto se sigue

$$\bigcup_{f \in C} \mathcal{O}_f$$

es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{O}$.

(2) Sea X un espacio regular $\mathcal{K}$-analítico. Por (1) y el Teorema 2.2.7 se tiene que X es normal y, por consiguiente, completamente regular. □

Nos interesa ahora algunas propiedades de estabilidad de los conjuntos $\mathcal{K}$-analíticos.

Teorema 3.3.4 *La imagen bajo una aplicación semi-continua superior de un conjunto $\mathcal{K}$-analítico es $\mathcal{K}$-analítico.*

Prueba: Sean X y Y espacios de Hausdorff y sea $F : Y \to \mathcal{K}(X)$ una aplicación semi-continua superior. Sea K un subconjunto compacto de Y. Primeramente demostraremos que

$$F(K) = \bigcup_{x \in K} F(x)$$

es un compacto en X. Sea $(G_\beta)_{\beta \in B}$ un cubrimiento abierto de $F(K)$. Para cada x en K, el compacto $F(x)$ está cubierto por $(G_\beta)_{\beta \in B}$, y por lo tanto podemos escojer un subconjunto finito $B(x)$ contenido en B tal que

$$F(x) = \bigcup_{\beta \in B(x)} G_\beta.$$

Sea F^{-1}, la *imagen inversa* de F, definida por

$$F^{-1}(Z) = \{x \mid F(x) \subseteq Z\}.$$

Como F es semi-continua superior, el conjunto

$$U(x) = F^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in B(x)} G_\beta\right)$$

es un abierto conteniendo a x. Puesto que K es compacto y está cubierto por la familia de abiertos $(U(x))_{x\in K}$, podemos seleccionar un subconjunto finito H de K con

$$K \subseteq \bigcup_{x\in H} U(x).$$

Ahora

$$F(K) \subseteq \bigcup_{x\in H} F\left(F^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in B(x)} G_\beta\right)\right) \subseteq \bigcup_{x\in H}\bigcup_{\beta\in B(x)} G_\beta.$$

Por esto $F(K)$ es compacto.

Suponga ahora que Y es $\mathcal{K}$-analítico y tiene la representación

$$Y = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}} K(\sigma)$$

con K una aplicación semi-continua superior de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{K}(Y)$.

Ya que

$$F(Y) = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}} F(K(\sigma))$$

y $F\circ K$ aplica $\mathcal{N}$ en $\mathcal{K}(X)$, entonces sólo nos resta demostrar que $F\circ K$ es semi-continua superiormente. Para este fin, sea $\sigma\in\mathcal{N}$ y sea G un conjunto abierto en X con

$$F(K(\sigma)) \subseteq G.$$

Como F es semi-continua superior el conjunto $F^{-1}(G)$ es abierto en Y conteniendo a $K(\sigma)$. Pero al ser también K semi-continua superior, podemos escojer un entorno abierto V de σ con

$$K(V) \subseteq F^{-1}(G).$$

Esto nos asegura que

$$F(K(V)) \subseteq F(F^{-1}(G) \subseteq G.$$

Por consiguiente $F \circ K$ es semi-continua superior, y $F(Y)$ es $\mathcal{K}$-analítico. $\square$

Teorema 3.3.5 *Sea X un espacio de Hausdorff.*

(1) *Si X es Souslin-$\mathcal{K}(X)$, entonces X es $\mathcal{K}$-analítico.*

(2) *Si X es $\mathcal{K}$-analítico, entonces X es un conjunto Souslin-$\mathcal{F}(\mathcal{X})$.*

Prueba: (1) Si X es Souslin-$\mathcal{K}$(X), entonces

$$X = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma|n),$$

donde $K(\sigma|n) \in \mathcal{K}(X)$ para cada $\sigma \in \mathcal{N}$ y $n \in \mathbf{N}$. Remplazando $K(\sigma|n)$ por $\bigcap_{k=1}^{n} K(\sigma|k)$, si fuera necesario, podemos asumir que $(K(\sigma|n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente. Haciendo

$$K(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma|n) \quad \text{para cada} \quad \sigma \in \mathcal{N},$$

se verifica fácilmente que $\sigma \mapsto K(\sigma)$ es una aplicación semi-continua superior. Esto implica que X es $\mathcal{K}$-analítico.

(2) Sea $X = K(\mathcal{N})$, donde K es una aplicación semi-continua superior de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{K}(X)$. Consideremos la familia $(F(s))_s$ de subconjuntos cerrados de X definida por

$$F(s) = \overline{K(\mathcal{N}(s))}, \qquad s \in \mathbf{N}^{(N)},$$

donde $\mathcal{N}(s) = \{\sigma \in \mathcal{N} : \sigma|n = s\}$. Claramente, para cada σ en $\mathcal{N}$,

$$K(\sigma) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} F(\sigma|n).$$

Supongamos ahora que

$$f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(\sigma|n) \quad \text{pero que} \quad f \notin K(\sigma).$$

Como $K(\sigma)$ es compacto y X es de Hausdorff, entonces X es regular y así, podemos escoger un conjunto abierto G y un conjunto cerrado H con

$$K(\sigma) \subseteq G \subseteq H \quad \text{y} \quad f \notin H.$$

Puesto que K es semi-continua superior podemos eligir ahora un n_0 tal que

$$K(\mathcal{N}(\sigma|n_0)) \subseteq G \subseteq H,$$

de donde resulta que

$$f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(\sigma|n) \subseteq F(\sigma|n_0) = \overline{K(\mathcal{N}(\sigma|n_0))} \subseteq H,$$

lo cual es imposible. Por esto,

$$K(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(\sigma|n)$$

y

$$X = K(\mathcal{N}) = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}} K(\sigma) = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} F(\sigma|n),$$

es un conjunto Souslin-$\mathcal{F}(X)$. □

Definición 3.3.6 *Un espacio de Hausdorff X se llama un espacio* $\mathcal{K}$**-Lusin** *si existe una aplicación semi-continua superior*

$$K : \mathcal{N} \to \mathcal{K}(X)$$

tal que

$$X = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{N}} K(\sigma),$$

con la propiedad de que

$$K(\sigma) \cap K(\varrho) = \emptyset,$$

siempre que $\sigma, \varrho \in \mathcal{N}$ y $\sigma \neq \varrho$.

Una clase de espacios ligeramente más amplia que la de los $\mathcal{K}$ - analíticos la constituye la de los espacios $\mathcal{K}$-numerablemente determinados, introducidos por L. Vašak.

Definición 3.3.7 *Un espacio de Hausdorff X se dice que es $\mathcal{K}$-**numerablemente determinado** si X es la imagen de algún subconjunto de $\mathcal{N}$ bajo una aplicación semi-continua superior a valores compactos.*

De la definición anterior se desprende que **todos los espacios métricos separables así como todos los espacios $\mathcal{K}$-analíticos son $\mathcal{K}$-numerablemente determinados, y estos espacios son todos Lindelöf.**

El siguiente resultado justifica la terminología de la definición anterior.

Teorema 3.3.8 *Las siguientes condiciones sobre un subespacio E de un espacio compacto de Hausdorff X son equivalentes:*

(1) *E es $\mathcal{K}$-numerablemente determinado.*

(2) *Existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos de X tal que para cada $x \in E$ y $z \in X \setminus E$ existe un $m \in \mathbf{N}$ tal que $x \in K_m$ y $z \notin K_m$.*

(3) *Existe un subconjunto S de $\mathcal{N}$ y un familia de subconjuntos compactos $(K(\sigma|n))_{\sigma|n\in\mathbf{N}^{(N)}}$ de X tal que*

$$E = \bigcup_{\sigma\in S}\bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma|n).$$

Prueba: (1) ímplica (3). Si $F : S \to \mathcal{K}(X)$ es la aplicación dada por (1), entonces

$$E = \bigcup_{\sigma\in S}\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F(\{\varrho \in S : \varrho|n = \sigma|n\})},$$

donde la clausura es tomada en X.

(3) ímplica (1). Si

$$E = \bigcup_{\sigma\in S}\bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma|n),$$

entonces la aplicación $F : S \to \mathcal{K}(X)$, definida por

$$F(\sigma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma|n),$$

tiene las propiedades requeridas.

(3) ímplica (2). La familia numerable $(K(\sigma|n))_{\sigma|n\in\mathcal{N}^{(N)}}$ tiene las propiedades requeridas.

(2) ímplica (3). Para $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=\sigma|n$, defina

$$K(\sigma|n)=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{\sigma_i}.$$

El resultado sigue de esto. $\square$

4 MEDIDA Y TOPOLOGIA

En esta sección vamos a discutir la teoría de la medida sobre un espacio topológico completamente regular. El objetivo principal que se persigue es caracterizar algunas propiedades topológicas en términos de medidas y mostrar ciertas relaciones entre estos dos conceptos, medida y topología. Existen en la literatura excelentes desarrollos sobre el tema, entre ellos debemos mencionar los artículos de V. S. Varadarajan ([Va]), R. F. Wheeler ([Wh]), R. J. Gardner ([Ga]), R. J. Gardner - W. F. Pfeffer ([GP]) y las referencias allí citadas.

4.1 NOTACIONES Y DEFINICIONES

Sea X un conjunto, y sea $\mathcal{M}$ una σ-algebra en X. Una *medida* sobre $\mathcal{M}$ es una una función σ-aditiva $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Una medida μ sobre $\mathcal{M}$ se llama *trivial* si $\mu(X) = 0$, *finita* si $\mu(X) < +\infty$, *σ-finita* si $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $X_n \in \mathcal{M}$ y $\mu(X_n) < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$. Una *probabilidad* sobre $\mathcal{M}$ es una medida μ sobre $\mathcal{M}$ para la cual $\mu(X) = 1$. Una medida μ sobre $\mathcal{M}$ que toma sólamente los valores 0 y 1 es llamada *2-valuada.* Si μ es una medida sobre $\mathcal{M}$, entonces a la tripleta $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se le llama un *espacio de medida.*

Siguiendo nuestra costumbre, todos los espacios topológicos considerados en estas notas serán de Hausdorff. Como siempre, si X un espacio topológico, entonces $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{Z}(X)$ y $co\mathcal{Z}(X)$, denotarán las familias de todos los subconjuntos abiertos, cerrados, compactos, ceros y coceros de X, respectivamente.

4.2 MEDIDAS DE BOREL

La **σ-algebra de Borel** $Bo(X)$ en X es la σ-algebra más pequeña en X conteniendo a $\mathcal{G}$(X). Los elementos de $Bo(X)$ son llamados *conjuntos de Borel.*

Definición 4.2.1 *Una* **medida de Borel** *es una medida definida sobre $Bo(X)$.*

Si μ es una medida de Borel en X y $B \subseteq X$, definimos

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(G) \mid B \subseteq G, G \in \mathcal{G}\},$$

y

$$\mu_*(B) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq B, F \in \mathcal{F}\}.$$

Un subconjunto A de X se llama **μ-medible** si existen $B_1, B_2 \in Bo(X)$ [dependiendo de μ] con

$$B_1 \subseteq A \subseteq B_2 \quad \text{y} \quad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0;$$

es decir, A es μ-medible si y sólo si $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

La σ-algebra de todos los conjuntos μ-medibles se denota por $Bo(X)_\mu$. Es fácil establecer que

$$Bo(X) \subseteq Bo(X)_\mu$$

para cada medida de Borel μ.

En tanto que μ^* y μ_* no son medidas, ellas exhiben algunas propiedades similares a las de una medida. He aquí una que necesitaremos.

Lema 4.2.2 *Sea X un espacio de Hausdorff y sea μ una medida de probabilidad de Borel en X. Si $(A_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión creciente de subconjuntos de X, entonces*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_n \mu^*(A_n).$$

Prueba: Se sigue inmediatamente de la definición que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ siempre que $A \subseteq B \subseteq X$. De aquí se deduce, puesto que μ es finita, que $\lim_n \mu^*(A_n)$ existe y, además,

$$\lim_n \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right).$$

Para demostrar la desigualdad recíproca, sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, escojamos un $B_n \in Bo(X)$ con $A_n \subseteq B_n$ y tal que

$$\mu(B_n) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión $(B_n)_n$ es creciente. En efecto, si tal sucesión no fuese creciente entonces, remplazando B_n por $D_n = B_n \cap B_{n+1} \cap \ldots$, resulta que D_n pertenece a $Bo(X)$, $A_n \subseteq D_n$ y $\mu(D_n) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon$. De modo que asumiremos que la sucesión $(B_n)_n$ es creciente. Aceptando lo anterior, la σ-aditividad de μ nos permite afirmar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_n \mu(B_n).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) &\leq \mu\left(\bigcup_n B_n\right)\\
&= \lim_n \mu(B_n)\\
&\leq \lim_n(\mu^*(A_n) + \varepsilon)\\
&= \lim_n \mu^*(A_n) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual termina la prueba. □

Definición 4.2.3 *Una medida de Borel μ en X se llama* **debilmente regular** *si*

$$\mu(B) = \mu^*(B) = \mu_*(B), \quad \textit{para todo} \quad B \in Bo(X),$$

y es **regular o de Radon** *si*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B, K \in \mathcal{K}\}, \quad \textit{para todo} \quad B \in Bo(X).$$

Observemos que μ es **débilmente regular si y sólo si, dado $B \in Bo(X)$ y $\varepsilon > 0$, existen un conjunto cerrado F y un conjunto abierto G tales que $F \subseteq B \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.**

Similarmente, μ es **regular si y sólo si, dado $B \in Bo(X)$ y $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq B$ tal que $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$.**

Nuestro próximo objetivo es probar que toda medida de Borel sobre un espacio polaco es regular. Pero previamenmte demostraremos que toda medida de probabilidad de Borel sobre un espacio métrico es débilmente regular.

Teorema 4.2.4 *Sea (X, d) un espacio métrico. Si μ es una medida de probabilidad de Borel en X, entonces μ es débilmente regular.*

Prueba: Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos B de $Bo(X)$ que satisfacen $\mu^*(B) = \mu_*(B)$. Queremos probar que $Bo(X) = \mathcal{B}$. Ello se logra demostrando dos cosas:

<u>*Primera Afirmación:*</u> $\mathcal{F}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{B}$.

En efecto, si F es cerrado y si definimos $f(x) = d(x, F)$ para todo $x \in X$ resulta que f es una función continua para la cual

$$F = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

donde $G_n = \{x \in X \mid f(x) < 1/n\}, n = 1, 2, \ldots$. Puesto que (G_n) es una sucesión de conjuntos abiertos decreciendo a F y μ es finita, se tiene que

$$\mu(F) = \lim_n \mu(G_n).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Si ahora elejimos un n_0 tal que

$$\mu(G_{n_0} \setminus F) = \mu(G_{n_0}) - \mu(F) < \varepsilon,$$

se deduce $\mu(F) = \mu^*(F)$ y nuestra primera afirmación queda establecida.

<u>*Segunda Afirmación:*</u> **$\mathcal{B}$ es una $\sigma -$ algebra.**

Claramente $\mathcal{B}$ es cerrada bajo la acción de tomar complementos, pues dado $B \in \mathcal{B}$ y dado $\varepsilon > 0$, existen un F cerrado y un G abierto tales que $F \subseteq B \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Ya que

$$F^c \supseteq B^c \supseteq G^c \quad \text{y} \quad F^c \setminus G^c = G \setminus F,$$

obtenemos que $\mu(F^c \setminus G^c) < \varepsilon$, lo cual prueba que $B^c \in \mathcal{B}$.

Finalmente, si $B_n \in \mathcal{B}$ para cada n, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Para ver esto, sea $\varepsilon > 0$ y escojamos conjuntos cerrados $F_n \subseteq B_n$ y conjuntos abiertos $G_n \supseteq B_n$ tales que $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Teniendo en cuenta que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

podemos encontrar un n_0 para el cual

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n_0} F_k\right) < \varepsilon/2.$$

Sea $F = \bigcup_{k=1}^{n_0} F_k$. Entonces F es cerrado, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ es abierto, $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Esto nos demuestra que $\mathcal{B}$ es una σ-algebra y por lo tanto $Bo(X) = \mathcal{B}$. □

Teorema 4.2.5 *Sea X un espacio polaco. Si μ es una medida de probabilidad de Borel en X, entonces μ es regular.*

Prueba: Puesto que todo espacio polaco es homeomorfo a un espacio métrico completo y separable, supondremos que (X, d) es un espacio métrico completo y separable. Supuesto esto, la separabilidad de X nos asegura la existencia de una sucesión (x_k) densa en X. Sea $B_k(n)$ la bola d-abierta con centro en x_k y radio $1/n$; esto es,

$$B_k(n) = \{x \in X \mid d(x_k, x) < 1/n\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que para cada n, la sucesión $(B_k(n))_{k=1}^{\infty}$ cubre a X y teniendo en cuenta la σ-aditividad de μ, y el hecho de que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(n) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j(n)\right)$$

resulta que para cada n podemos elegir un entero positivo k_n verificando

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{k_n} B_k(n)\right) < \varepsilon/2^n.$$

Sea

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} \overline{B_k(n)}.$$

Claramente K es un subconjunto cerrado del espacio métrico completo X por lo que también resulta ser completo. Más aún, puesto que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_n} \overline{B_k(n)}$

para todo n y ya que tales conjuntos son totalmente acotados, se sigue que K es totalmente acotado. La conclusión es que K, siendo completo y totalmente acotado es un espacio métrico, es compacto. Además,

$$\mu(X \setminus K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{k_n} B_k(n)\right) < \varepsilon.$$

Finalmente, sean $B \in Bo(X)$ y $\varepsilon > 0$. Por lo acabado de probar existe un compacto $K_0 \subseteq X$ tal que $\mu(X \setminus K_0) < \varepsilon/2$, mientras que por el Teorema 4.2.4, existe un conjunto cerrado $F \subseteq B$ satisfaciendo $\mu(B \setminus F) < \varepsilon/2$. Si definimos $K = K_0 \cap F$, entonces K es compacto, $K \subseteq B$ y $B \setminus K \subseteq (X \setminus K_0) \cup (B \setminus F)$. Por esto, $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$ y concluye la prueba. □

Del EJEMPLO III, sabemos que todo conjunto de Borel en un espacio polaco X es analítico y que si un conjunto y su complemento son ambos analíticos en X, entonces dicho conjunto es de Borel (EJEMPLO III, Corolario (7)). Un resultado más general lo constituye el siguiente

Teorema 4.2.6 *Sean X un espacio polaco y μ una medida de probabilidad de Borel sobre X. Entonces cualquier subconjunto analítico de X es μ-medible.*

Prueba: Sea A un subconjunto analítico de X. Nuestra tarea será demostrar que dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subseteq A$ tal que $\mu(K) \geq \mu^*(A) - \varepsilon$. Esto será suficiente, ya que una vez establecido lo anterior, la relación $\mu(K) \leq \mu_*(A)$ (la cual es siempre válida) nos conduce al resultado deseado.

Puesto que A es analítico en X, existe una función continua $f : \mathcal{N} \to X$ tal que $f(\mathcal{N}) = A$.

Para cada entero positivo k y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, sea

$$\mathcal{L}(n_1, \ldots, n_k) = \{\sigma \in \mathcal{N} \mid \sigma_1 \leq n_1, \ldots, \sigma_k \leq n_k\}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Nuestro plan es construir un $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ tal que

$$\mu^*(f(\mathcal{L}(n_1, \ldots, n_k))) > \mu^*(A) - \varepsilon$$

para cada k.

La construcción de tal $\mathbf{n}$ se ejecuta del modo siguiente: En primer lugar observe que $(\mathcal{L}(n_1))_{n_1}$, es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es $\mathcal{N}$ y así, $(f(\mathcal{L}(n_1)))_{n_1}$ es una sucesión creciente cuya unión es A y, gracias al Lema 4.2.2, resulta que

$$\mu^*(A) = \lim_{n_1} \mu^*(f(\mathcal{L}(n_1))).$$

De esto se sigue que podemos escojer un n_1 tal que

$$\mu^*(f(\mathcal{L}(n_1))) > \mu^*(A) - \varepsilon.$$

Pero $(\mathcal{L}(n_1, n_2))_{n_2}$ es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es $\mathcal{L}(n_1)$; es decir,

$$\mathcal{L}(n_1) = \bigcup_{n_2} \mathcal{L}(n_1, n_2) \quad \text{y} \quad f(\mathcal{L}(n_1)) = \bigcup_{n_2} f(\mathcal{L}(n_1, n_2)).$$

Por esto,

$$\begin{aligned} \lim_{n_2} \mu^*(f(\mathcal{L}(n_1, n_2))) &= \mu^*(f(\mathcal{L}(n_1))) \\ &\geq \mu^*(A) - \varepsilon, \end{aligned}$$

y así, podemos elegir un n_2 tal que $\mu^*(f(\mathcal{L}(n_1, n_2))) > \mu^*(A) - \varepsilon$. Siguiendo con este procedimiento se llega al $\mathbf{n}$ deseado.

Sea

$$\begin{aligned} L &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(n_1, \ldots, n_k) \\ &= \{\mathbf{m} \in \mathcal{N} \mid m_i \leq n_i \ \ \textit{para todo } i\}. \end{aligned}$$

Puesto que L es un subconjunto compacto de $\mathcal{N}$ y f es continua, se tiene que $K := f(L)$ es un subconjunto compacto de A.

Afirmamos que:

$$\mu(K) \geq \mu^*(A) - \varepsilon.$$

Para establecer nuestra afirmación debemos empezar por mostrar que K es mucho más grande de lo que parece. Después de todo,

$$\begin{aligned} K = f(L) &= f(\bigcap_{k\geq 1} \mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k)) \\ &\subseteq \bigcap_{k\geq 1} f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k)) \\ &\subseteq \bigcap_{k\geq 1} \overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))}; \end{aligned}$$

y, más aún,

$$K = \bigcap_{k\geq 1} \overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))}.$$

En efecto, suponga que d es una métrica completa que genera la topología separable de X. Tomemos

$$x \in \bigcap_{k\geq 1} \overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))}.$$

Entonces $x \in \overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))}$ para cada k; y así, podemos escojer un $\mathbf{m}_k$ en $\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k)$ tal que $d(f(\mathbf{m}_k),x) \leq 1/k$. Ya que $(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))_k$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados en $\mathcal{N}$, entonces el proceso de la diagonal nos permite pasar a una subsucesión $(\mathbf{m}_k^*)$ de $(\mathbf{m}_k)$ la cual converge a algún $\mathbf{m} \in \mathcal{N}$. Por supuesto,

$$\mathbf{m} \in \bigcap_{k\geq 1} f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k)) \quad \text{y} \quad f(\mathbf{m}) = \lim_k f(\mathbf{m}_k^*) = x.$$

Así,

$$x = f(\mathbf{m}) \in f(\bigcap_{k\geq 1} \mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k)) = f(L) = K.$$

Para dar fin a la demostración, observemos que como $\overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))}$ es un conjunto cerrado conteniendo a $f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))$ resulta que

$$\mu(\overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))}) \geq \mu^*(f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k)) \geq \mu^*(A) - \varepsilon$$

para cada k. Más aún, $(\overline{f(\mathcal{L}(n_1,\ldots,n_k))})_k$ es una sucesión decreciente con intersección K y por la finitud de μ se concluye que

$$\mu(K) \geq \mu^*(A) - \varepsilon.$$

□

El teorema anterior es la clave para la siguiente definición.

Definición 4.2.7 *Sea X un espacio de Hausdorff. Denote por $M_{reg}(X)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre $Bo(X)$ que son regulares. Defina ahora*

$$Univ(X) = \bigcap_{\mu \in M_{reg}(X)} Bo(X)_\mu.$$

A esta σ-algebra se le denomina la σ-algebra de los **conjuntos universalmente medibles.**

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente:

Corolario 4.2.8 *Si X es un espacio polaco y A es un subconjunto analítico de X, entonces $A \in Univ(X)$.*

Finalizamos esta sección con un resultado sencillo, pero importante, relacionado con el problema de dónde se "concentra" una medida.

Definición 4.2.9 *Sea $\mu \in M_{reg}(X)$, donde X es un espacio de Hausdorff. El* **soporte** *de μ es el conjunto de todos $x \in X$ tal que $\mu(U) > 0$ para cada entorno abierto U de x.*

Denotaremos por $sop(\mu)$ al soporte de la medida μ. Observe que $sop(\mu)$ es el único subconjunto cerrado de X con las siguientes propiedades:

(i) $\mu(X) = \mu(sop(\mu))$,

(ii) Si F es cualquier subconjunto cerrado de X con $\mu(F) = \mu(X)$, entonces $sop(\mu) \subseteq F$.

Un hecho importante lo constituye el siguiente

Teorema 4.2.10 *Si (X, d) es un espacio métrico y $\mu \in M_{reg}(X)$, entonces μ tiene soporte separable.*

Prueba: Puesto que μ es regular, para cada n existe un compacto $K_n \subseteq X$ tal que $\mu(X \setminus K_n) < 1/n$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$. Ahora bien, como K_n es un espacio métrico compacto, el es separable y así, $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ es separable. Además, puesto que $(X \setminus K_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de Borel y μ es finita, resulta que $\mu(X \setminus K) = \lim_{n\to\infty} \mu(X \setminus K_n) = 0$. Es claro ahora que $sop(\mu) \subseteq \overline{K}$, por lo que $sop(\mu)$ es separable. □

4.3 MEDIDAS DE BAIRE

Puesto que nuestro interés en la teoría de medida sobre un espacio topológico consitirá en aplicar estos resultados a la topología débil sobre un espacio de Banach, nos limitaremos de ahora en adelante, única y exclusivamente, a espacios completamente regulares. Por consiguiente, en toda esta sección, X denotará un espacio *completamente regular.*

Sea X un espacio completamente regular. La **σ-algebra de Baire** $Ba(X)$ en X es la σ-algebra más pequeña en X conteniendo a $\mathcal{Z}(X)$. Los elementos de $Ba(X)$ son llamados *conjuntos de Baire.* Observe que $Ba(X)$ es también la σ-algebra más pequeña tal que cualquier $f \in C(X)$ es $Ba(X)$-medible.

OBSERVACION 1. Si X es un espacio métrico, entonces cualquier subconjunto *cerrado* de X es un conjunto cero y por consiguiente $Bo(X) = Ba(X)$. En general, un espacio X se dice que es *perfectamente normal* si todo conjunto cerrado en X es un conjunto cero; es decir, X es perfectamente normal si $\mathcal{F} = \mathcal{Z}$. En consecuencia, en todo espacio perfectamente normal X, se tiene que $Bo(X) = Ba(X)$.

Definición 4.3.1 *Una* **medida de Baire** *en X es una medida μ sobre $Ba(X)$.*

Comenzaremos por exhibir una propiedad importante de las medidas de Baire que no comparten las medidas de Borel en todo espacio completamente regular.

Teorema 4.3.2 *Sea μ una medida de Baire en X. Entonces*

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \inf\{\mu(U) \mid B \subseteq U, U \in co\mathcal{Z}\}\\ &= \sup\{\mu(Z) \mid Z \subseteq B, Z \in \mathcal{Z}\}.\end{aligned}$$

Prueba: Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos B de $Ba(X)$ tales que

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) \mid B \subseteq U, U \in co\mathcal{Z}\} = \sup\{\mu(Z) \mid Z \subseteq B, Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Nuestra tarea será demostrar que $\mathcal{B} = Ba(X)$.

Sea $G \in co\mathcal{Z}$. Entonces existe una $f \in C_b(X)$ tal que $G = f^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$. Si ahora definimos $f_n = min(|f| - 1/n, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ resulta que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(0).$$

Puesto que

$$f_1^{-1}(0) \subseteq f_2^{-1}(0) \subseteq \ldots,$$

se obtiene que $\mu(G) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n^{-1}(0))$, y por consiguiente,

$$\mu(G) = \sup\{\mu(Z) \mid Z \subseteq G, Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Esto nos demuestra que $co\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{B}$. Para terminar la demostración sólo nos resta probar que $\mathcal{B}$ es una σ-algebra. Es claro que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo el proceso de tomar complementos. Sea $B_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \ldots$, y sea $\varepsilon > 0$. Para cada n, escojamos $Z_n \in \mathcal{Z}$ y $U_n \in co\mathcal{Z}$ tales que

$$Z_n \subseteq B_n \subseteq U_n \quad \text{y} \quad \mu(U_n \setminus Z_n) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Observemos que como $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} Z_k$, entonces podemos elegir un n_0 tal que $\mu(Z \setminus \bigcup_{k=1}^{n_0} Z_k) < \varepsilon/2$. Si tomamos $Z_0 = \bigcup_{k=1}^{n_0} Z_k$ y $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, tendremos que $Z_0 \in \mathcal{Z}$, $U \in co\mathcal{Z}$, $Z_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq U$ y

$$\mu(U \setminus Z_0) < \varepsilon.$$

De aquí se sigue que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{Z}$ y concluye la prueba. $\square$

OBSERVACION 2.

(1) El Teorema 4.3.2 nos revela que la teoría de las medidas de Baire es más simple que la de las medidas de Borel. Históricamente, las medidas de Baire fueron desarrolladas primero (véase el artículo de Varadarajan [Va]), y gran parte del auge la teoría de las medidas de Borel es producto de ese trabajo.

(2) Las medidas de Borel, por otra parte, tienen ciertas ventajas sobre las Baire. Ellas pueden ser estudiadas en cualquier espacio topológico a diferencia de las de Baire que sólo viven es espacios completamente regulares.

(3) $Ba(X)$ posee algunas propiedades importantes que no comparte con $Bo(X)$. Por ejemplo, la σ-algebra de Baire de un espacio producto compacto es el producto de las σ-algebras de los factores. Si X es compacto, y $Ba(X)$ es numerablemente generada, entonces X es metrizable.

Definición 4.3.3 *Sea X un espacio completemente regular y sea $M_\sigma(X)$ el conjunto de todas las* medidas de probabilidad *sobre* $Ba(X)$.

(1) *Una medida $\mu \in M_\sigma(X)$ se llama τ-**suave** si siempre que (Z_α) es una red de conjuntos ceros tal que $Z_\alpha \subseteq Z_\beta$ para $\alpha \geq \beta$ y $\bigcap_\alpha Z_\alpha = \emptyset$, entonces*

$$\lim \mu(Z_\alpha) = 0.$$

(2) *Una medida $\mu \in M_\sigma(X)$ se llama* **tensa** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subseteq X$ tal que*

$$\mu^*(K) \geq 1 - \varepsilon,$$

donde μ^* es la medida exterior generada *por μ, definida por*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \supseteq A, B \in Ba(X)\}$$

para todo $A \subseteq X$.

Denotando por $M_t(X)$ y $M_\tau(X)$ los conjuntos formados por todas las medidas tensas y las τ-suaves respectivamente, se tiene que

$$M_t(X) \subseteq M_\tau(X) \subseteq M_\sigma(X);$$

pero la igualdad no siempre se cumple.

Definición 4.3.4 *Un espacio completamente regular X se llama:*

(1) **medida-compacto** *si* $M_\sigma(X) = M_\tau(X)$.

(2) **fuetemente medida-compacto** *si* $M_\sigma(X) = M_t(X)$.

La siguiente caracterización de realcompacidad se debe a E. Hewitt. Para una demostración de este hecho remitimos al lector a [Na, p. 487].

Teorema 4.3.5 *Un espacio completamente regular X es realcompacto si y sólo si cualquier medida 2-valuada en $M_\sigma(X)$ está en $M_\tau(X)$.*

Claramente se tiene que cada espacio fuertemente medida-compacto es medida-compacto, y este último es realcompacto.

Si μ es una medida de Baire en X, entonces el **soporte** de μ es el conjunto S (necesariamente cerrado) de todos los $x \in X$ tal que $\mu(U) > 0$ para cada entorno co-cero U de x. Usaremos $sop(\mu)$ para denotar el soporte de μ.

Teorema 4.3.6 *Sea μ una medida de Baire en X. Entonces el soporte de μ es la intersección de todos los conjuntos ceros Z tales que $\mu(Z) = \mu(X)$.*

Prueba: Un punto $x \notin sop(\mu)$ si y sólo si existe un conjunto cocero U conteniendo a x tal que $\mu(U) = 0$. Esto es, $x \in sop(\mu)$ si y sólo si existe un conjunto cero Z no conteniendo a x con $\mu(Z) = \mu(X)$. El resultado sigue de esto. □

El siguiente resultado nos dice que los espacios realcompactos constituyen una familia bastante amplia de espacios topológicos.

Teorema 4.3.7 *Sea X un espacio completamente regular. Si X es de Lindelöf, entonces X es medida-compacto.*

Prueba: Suponga que X es de Lindelöf y sea $\mu \in M_\sigma(X)$. Para demostrar que $\mu \in M_\tau(X)$, sea (Z_α) una familia de conjuntos ceros tales que $Z_\alpha \subseteq Z_\beta$ si $\alpha \geq \beta$ y con $\bigcap_\alpha Z_\alpha = \emptyset$. Pongamos $U_\alpha = X \setminus Z_\alpha$ para todo α. Puesto que $U_\alpha \in co\mathcal{Z}$ y $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, entonces existe, por ser X de Lindelöf, una sucesión de índices $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ tales que

$$U_{\alpha_1} \subseteq U_{\alpha_2} \subseteq \cdots \quad \text{y} \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}.$$

De aquí se sigue, por la σ-aditividad de μ, que

$$1 = \mu(X) = \lim \mu(U_{\alpha_n})$$

y así,

$$0 = \lim \mu(Z_{\alpha_n}) = \lim \mu(Z_\alpha),$$

probando que $\mu \in M_\tau(X)$. □

De los resultados ya expuestos se tiene que:

Espacios polacos, analíticos, $\mathcal{K}$-analíticos y $\mathcal{K}$-numerablemente determinados son **medida-compactos**, pues cada uno de ellos es de Lindelöf.

5 LA TOPOLOGIA DEBIL EN ESPACIOS DE BANACH

Con toda propiedad se puede afirmar que la teoría de los espacios de Banach es hija legítima de la topología de conjuntos. En efecto, todo el trabajo clásico de S. Banach [Ba] tiene su soporte sobre poderosas y profundas propiedades de la topología. Por ejemplo, el Teorema de Hahn-Banach fue posible gracias a la *completitud de los números reales*; el Teorema de la Aplicación Abierta así como también el Principio de Acotación Uniforme deben su existencia al *Teorema de Categoría de Baire*; por otro lado, el *Teorema de Tychonoff* provee la herramienta principal en la demostración del Teorema de Alaoglu, mientras que el Teorema de Eberlin-Šmulian sobre los subconjuntos débilmente compactos en un espacio de Banach se establece a partir de un delicado argumento de *compacidad por vía del proceso de la diagonal.*

Todo lo expresado anteriormente sentó las bases para una reunión de profundos lazos entre la topología, la teoría de conjuntos y la teoría de los espacios de Banach. Esto puede ser corroborado por la extensa y profusa bibliografía que se ha escrito recientemente sobre el tema. En este sentido cabe destacar los artículos de S. Negrepontis [Ne], H. Rosenthal [Ro], E. Odell [Od], J. Bourgain, D. H. Fremlin y M. Talagrand [BFT], J.Diestel [Di], D. van Dulst [vD], C. A. Rogers y J. E. Jayne [RJ].

Nuestro objetivo en estas notas es más bien modesto y limitado, en el sentido de que sólo expondremos una partícula minúscula sobre los pronfundos desarrollos que se han obtenido en el campo de la teoría de los espacios de Banach con la ayuda de la topología. He aquí entonces el propósito de lo que queremos. **Queremos investigar algunos criterios que nos permitan determinar si un espacio de Banach provisto de su topología débil posee las propiedades topológicas usuales**; es decir, ¿ es la topología débil de un espacio de Banach regular, completamente regular, Lindelöf, metrizable, CCC, realcompacto, etc.? Una vez respondida algunas de las interrogantes antes planteadas, nos proponemos demostrar como dichas propiedades sirven para investigar la estructura "*fina*" de tales espacios. Por ejemplo, se demuestra que todo subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$ es norma-separable si y sólo si Ω satisface la condición de cadena numerable. Similarmente, si K es un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach satisfaciendo la condición de cadena numerable para la topología débil, entonces dicho conjunto es norma-separable. Un increible resultado de Wheeler establece que un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym es norma-separable si y sólo si su bola unitaria, con la topología débil, satisface la condición de cadena numerable. Así mismo se prueba que si un espacio de Banach dual en su topología débil es de Lindelöf, entonces dicho espacio posee la propiedad de Radon-Nikodym.

5.1 NOTACIONES Y RESULTADOS BASICOS

Esta sección tiene como propósito exponer algunos de los resultados de la teoría de los espacios de Banach a ser utilizados en las restantes secciones.

En todo lo que sigue X denotará un espacio de Banach. Si X es un espacio de Banach, X^* denota su *dual*. La *topología débil* sobre X es la topología inducida sobre X por X^*; es decir, la topología más débil sobre X que hace que cada miembro de X^* sea continuo. A esta topología la denotaremos por $\sigma(X, X^*)$ o simplemente por ω. Así, la notación $(X, \sigma(X, X^*))$ o (X, ω) significa que X está dotada de su topología débil. Como es bien conocido, $(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio vectorial de Hausdorff localmente convexo. Finalmente, recordemos que cualquier entorno básico del 0 en (X, ω) es de la forma

$$W(0; x_1^*, \ldots, x_n^*) = \{x \in X : |x_1^*(x)|, \ldots, |x_n^*(x)| < \varepsilon\},$$

donde $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$.

De nuevo, comencemos con un espacio de Banach X, pasemos a X^* y sobre X^* definamos la *topología débil-$*$* sobre X^* declarando que: *una red $(x_\alpha^*)_\alpha$ en X^* converge en la topología débil-$*$ a un $x^* \in X^*$ si $(x_\alpha^*(x))_\alpha$ converge a $x^*(x)$ para cada $x \in X$.* Como antes, la topología débil-$*$ en X^* es una topología de Hausdorff lineal y localmente convexa. El dual topológico de $(X^*, débil - *)$ es X. Usamos $\sigma(X^*, X)$ o ω^* para especificar la topología débil * sobre X^*. Cualquier ω^*-entorno del cero contiene un conjunto de la forma

$$W(0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Las topologías débil y débil-$*$ forman una especie de sociedad familiar. Aunque por lo general ellas son muy diferentes, en su propia particularidad cada una de ella ayuda a un mejor entendimiento de la otra.

Todas las nociones de carácter topológico concernientes a los espacios $(X, norma)$, (X, ω) y (X^*, ω^*) serán precedidas de las palabras norma, débil o débil-$*$, o de los símbolos ω y ω^*, respectivamente. Así, por ejemplo, si A es un subconjunto abierto, cerrado, compacto, etc. en uno de los espacios $(X, norma)$, (X, ω) o (X^*, ω^*) entonces diremos que A es norma-abierto, norma-cerrado, norma-compacto, etc., ω-abierto, ω-cerrado, ω-compacto, etc. o que A es ω^*-abierto, ω^*-cerrado, ω^*-compacto, etc. respectivamente. Por otro lado, el interior de A, en cada una de ellas, será denotado por $int_{\|\,\|}(A)$, $int_\omega(A)$ o $int_{\omega^*}(A)$. Similarmente para las clausuras en estos espacios.

Si X es un espacio de Banach,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \text{y} \quad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

denotarán, respectivamente, la bola unitaria cerrada y la esfera unitaria cerrada de X mientras que

$$U_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

denotará la bola unitaria abierta de X. Los símbolos $B_r(x)$ y $U_r(x)$ representarán, respectivamente, la bola cerrada y la bola abierta de centro x y radio r.

Para un subconjunto A de X denotaremos por por $co(A)$ (respectivamente, $\overline{co}^{\|\|}(A)$) la cápsula o envoltura convexa (respectivamente, la cápsula convexa norma-cerrada) de A.

Si bien la topología de la norma es más fina que la topología débil, ella comparten los mismos conjunos convexos cerrados. Esta es la afirmación derivada del siguiente resultado importante.

Teorema de Mazur. *Si K es un subconjunto no vacío de X, entonces*

$$\overline{co}^{\|\|}(K) = \overline{co}^{\omega}(K).$$

En particular, si K es convexo

$$\overline{K}^{\|\|} = \overline{K}^{\omega}.$$

Gracias al teorema de Mazur se tiene que la clausura en la norma y en la topología débil de cualquier subespacio lineal de un espacio de Banach coinciden.

Cada vez que tomemos clausura de un conjunto convexo K, sea en la norma-topología o en débil, en un espacio de Banach X, la denotaremos simplemente por $\overline{K}$.

Identificaremos, como siempre, un espacio de Banach con un *subespacio norma-cerrado* de su segundo dual X^{**} vía la *inyección isométrica natural*

$$J : X \to X^{**}$$

dada por $J(x)(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$.

La restricción de la topología débil-$*$ de X^{**} sobre X coincide con la topología débil sobre X.

Trasladándonos ahora a X^* con su topología débil-$*$, tenemos:

Teorema de Goldstine. *Si X es un espacio de Banach, entonces*

$$\overline{B_X}^{\omega^*} = B_{X^{**}}$$

es decir, B_X es ω^*-denso en $B_{X^{**}}$.

En particular, X es ω^*-denso en X^{**} .

Veamos ahora uno de los resultados más importantes que posee la topología débil-$*$. En efecto, dicha topología aprecia en grado sumo a los conjuntos norma-acotados, como lo demuestra el siguiente resultado.

Teorema de Alaoglu. *Para cualquier espacio de Banach X, B_{X^*} es ω^*-compacto. En consecuencia, cualquier subconjunto norma-acotado y ω^*-cerrado de X^* es ω^*-compacto.*

Otro resultado clásico es el siguiente.

Teorema. *Un espacio de Banach X es* reflexivo *si y sólo si B_X es débilmente compacto.*

Por el Principio de Acotación Uniforme se deduce que todo subconjunto débilmente compacto es norma-cerrado y norma-acotado.

Si bien la topología débil no es metrizable (si $dim X = \infty$) los subconjuntos débilmente compactos poseen un encanto especial como lo afirma el próximo resultado, una de las herramientas más poderosas en la teoría de los espacios de Banach. ¡En todo conjunto débilmente compacto, *sucesiones* son suficientes!

Teorema de Eberlein-Šmulian. *Un subconjunto K de un espacio de Banach X es relativamente débilmente compacto si y sólo si K es relativamente débilmente secuencialmente compacto.*

En particular, un subconjunto K de X es débilmente compacto si y sólo K es débilmente secuencialmente compacto.

Otro extraordinario resultado lo constituye el

Teorema de Krein-Šmulian. *Si K es un subconjunto débilmente compacto de X, entonces $\overline{co}(K)$ es débilmente compacto.*

Sea Ω un espacio Hausdorff compacto y denote por $C(\Omega)$ al espacio de todas las funciones continuas a valores reales definidas sobre Ω provisto de la norma del supremo; esto es, $||f||_\infty = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}$.

Un conjunto $A \subseteq C(\Omega)$ se dice que *separa los puntos de* Ω si para todo $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$, existe una $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Teorema de Stone-Weierstrass. *Si $\mathcal{A}$ es una sub-algebra de $C(\Omega)$ que separa los puntos y contiene a las funciones constantes, entonces $\mathcal{A}$ es norma-denso en $C(\Omega)$.*

Sean X un espacio de Banach y Y un subespacio norma-cerrado de X. El *aniquilador* $Y^\perp$ de Y se define como

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in Y\}.$$

Si J es la inyección isométrica natural de X en X^{**}, entonces

$$Y^\perp = \bigcap_{x \in Y} Ker(Jx).$$

Por esto, $Y^\perp$ es un subespacio ω^*-cerrado de X^*.

Los duales de Y y X/Y puedes ser descritos con la ayuda de $Y^\perp$ (ver, por ejemplo [Ho, p. 123]).

I.1) Y^* es isométricamente isomorfo a $X^*/Y^\perp$.

I.2) $(X/Y)^*$ es isométricamente isomorfo a $Y^\perp$.

I.3) Y^{**} es isometricamente isomorfo a $\overline{J(Y)}^{\omega^*}$, donde J es la inyección isométrica natural.

De esta última afirmación se desprende que *si Y es un subespacio norma-cerrado de X y ω^*-cerrado en X^{**}, entonces Y es reflexivo.*

Si X y Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, entonces su *adjunto*, es el operador lineal acotado $T^* : Y^* \to X^*$ dado por

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$$

para todo $x \in X$ y todo $y^* \in Y^*$. Más aún, T^* satisface

$$||T^*|| = ||T||.$$

Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, entonces se cumple que

II.1) $T(X)$ es norma-denso en Y si y sólo si T^* es uno-a-uno.

II.2) T es uno-a-uno si y sólo si $T^*(Y^*)$ es ω^*-denso en X^*.

Finalmente, dado un conjunto Γ, denotamos por $c_0(\Gamma)$ al espacio de Banach de todas las funciones acotadas $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ tales que, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| > \varepsilon\}$ es finito, dotado de la norma $||f|| = \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|$, para cada $f \in c_0(\Gamma)$.

5.2 PROPIEDADES DE LA TOPOLOGIA DEBIL

Como habíamos mencionado al principio de esta sección, nos interesa investigar algunas propiedades topológicas de la topología débil de un espacio de Banach. Sólo por comodidad, supondremos que nuestro espacio de Banach ambiente es real. También asumiremos, de aquí en adelante, que **todos nuestros espacios de Banach son de dimensión infinita**.

Comenzaremos por mostrar algunas de las propiedades mas conocidas de la topología débil en un espacio de Banach.

HECHOS.

1.) (X,ω) no es un espacio de Baire.

Efectivamente, esto es una consecuencia del teorema de categoría de Baire ya que $X = \cup_{n=1}^{\infty} nB_X$ y cada nB_X es nunca-denso en la topología débil de X.

2.) (X, ω) **no es metrizable.**

Supongamos, por el contrario, que (X, ω) es metrizable. Sea d la métrica que genera la topología débil de X. Entonces (X, d) satisface el primer axioma de numerabilidad; es decir, cada punto de X tienen una base de entornos a lo sumo numerable. Puesto que los entornos básicos del cero generan todos los demás entornos de puntos de X, resulta que podemos elegir una sucesión (x_n^*) en X^* tal que, dado cualquier entorno U de 0, se pueden encontrar un número racional $r > 0$ y un entero positivo n_U tal que

$$W(0; x_1^*, \ldots, x_{n_U}^*, r) \subseteq U.$$

Ahora bién, cada x^* genera el entorno débil $W = W(0; x^*, 1)$ de 0 y en consecuencia,

$$W(0; x_1^*, \ldots, x_{n_W}^*, r) \subseteq W.$$

Esto, por supuesto, ímplica que x^* es una combinación lineal de $x_1^*, \ldots, x_{n_W}^*$ puesto que evidentemente

$$\bigcap_{n=1}^{n_W} Ker\, x_n^* \subseteq Ker\, x^*.$$

Sea F_m el subespacio lineal generado por $x_1^*, \ldots, x_m^*$, $m = 1, 2, \ldots$ Claramente cada F_m es un subespacio lineal de dimensión finita (y por consiguiente norma cerrado) de X^* y tal que $X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_m$. El teorema de categoría de Baire interviene para decirnos que algún F_m tiene norma-interior no vacío, lo que a su vez ímplica que ese F_m debe ser todo X^*. Imposible.

A pesar de estos serios inconvenientes, la topología débil de un espacio de Banach X es un buen aliado en el estudio de la estructura más fina de X. De hecho, la topología débil restringida a ciertos subconjuntos de X puede hacerse metrizable si se le impone cierta condición al dual de X. Especificamente se tiene:

3.) (i) (B_X, ω) es **metrizable** si y sólo si X^* es **norma separable.**

(ii) (B_{X^*}, ω^*) es **metrizable** si y sólo si X es **norma separable**.

Una prueba del Hecho 3 puede ser vista en [DS]. En combinación con el mágico Teorema de Alouglu, algunas consecuencias inmediatas se deducen de este último resultado:

Primero: Si X es norma-separable, entonces (X^*, ω^*) es separable.

En efecto, por lo anterior y el Teorema de Alouglu, (B_{X^*}, ω^*) es compacto y metrizable y por lo tanto ω^*-separable. Finalmente, como B_{X^*} genera a X^* se concluye que (X^*, ω^*) es separable.

Segundo: Si X es norma-separable, entonces cualquier subconjunto débilmente compacto de X^* es norma-separable.

En efecto, si K es un subconjunto débilmente compacto de X^*, entonces K es ω^*-compacto y, por supuesto, ω^*-metrizable. De aquí se sigue que K es ω^*-separable y en consecuencia débilmente separable. Sea D un subconjunto numerable y débilmente denso en K. Si ahora consideramos a Y como el el subespacio lineal norma-cerrado generado por D, resulta que Y es un espacio de Banach norma-separable. Gracias al Teorema de Mazur, Y es débilmente cerrado conteniendo a K. Por esto K es norma-seprable.

Recordemos que un espacio de Banach X se llama *débilmente secuencialmente completo* si para cualquier sucesión (x_n) en X con $\lim_n x^*(x_n) < \infty$ para todo $x^* \in X^*$, existe un $x \in X$ tal que $x^*(x) = \lim_n x^*(x_n)$ para cada $x^* \in X^*$. Es bien conocido que ni c_0, el espacio de Banach de todas la sucesiones de números reales que convergen a cero, ni $C[0,1]$ son débilmente secuencialmente completos. Por esto,

4.) (X, ω) no es, en general, **secuencialmente completo**.

Es tiempo y lugar para presentar algunos resultados más positivos.

5.) (X, ω) **es completamente regular.**

En efecto, sea H una base de Hamel para X^* y considere $\mathbf{R}^H$ con la topología producto. $\mathbf{R}^H$es completamente regular (Teeorema 2.1.9). Definamos ahora la aplicación

$$f : (X, \omega) \to \mathbf{R}^H$$

por

$$f(x) = (x^*(x))_{x^* \in H}.$$

Se comprueba sin mucha dificultad que f es un homeomorfismo del primer espacio en el segundo satisfaciendo

$$\overline{f(X)} = \mathbf{R}^H,$$

lo cual prueba que (X, ω) es completamente regular.

Aunque (X, ω) puede no ser Lindelöf, normal o realcompacto se tiene, sin embargo, que:

6.) (X, ω) **es un espacio CCC.**

Para ver esto, observe que $\mathbf{R}^H$ es un espacio CCC (Teorema 2.3.3) y que cualquier subespacio denso de un espacio CCC es un espacio CCC. El resultado ahora sigue de la prueba del HECHO 5.

7.) (X, ω) es un **espacio de Lusin** siempre que X sea **norma-separable.** En particular, si X es norma-separable entonces (X, ω) es normal.

En efectó, puesto que la topología débil es menos fina que la topología de la norma se tiene que la aplicación identidad

$$id : (X, norma) \rightarrow (X, \omega)$$

es continua y biyectiva. Por consiguiente, si X es norma-separable entonces (X, ω) es de Lusin y Lindelöf.

Este ejemplo nos muestra que un espacio de Lusin no necesita ser metrizable.

8.) (X, ω) es **tensamente numerable**; esto es, si $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}^{\omega}$, entonces existe un conjunto numerable $D \subseteq A$ con $x \in \overline{D}^{\omega}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y para $\varsigma = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in (B_{X^*})^n$, $n = 1, 2, \ldots$ pongamos

$$W(y; \varsigma, \varepsilon) = y + W(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon).$$

Afirmamos que existe un subconjunto finito $A(n, \varepsilon) \subseteq A$ tal que

$$A(n, \varepsilon) \cap W(x; \varsigma, \varepsilon) \neq \emptyset,$$

para cualquier $\varsigma \in (B_{X^*})^n$.

En efecto, sea $x \in \overline{A}^{\omega}$. Entonces, para cada $\varsigma = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in (B_{X^*})^n$,

$$W(x;\varsigma,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea $x_\varsigma \in W(x;\varsigma,\varepsilon) \cap A$, y definamos

$$U_\varsigma = \{x^* \in B_{X^*} : |x^*(x_\varsigma) - x^*(x)| < \varepsilon\}.$$

Entonces U_ς es ω^*-abierto en B_{X^*} y cada $x_j^* \in U_\varsigma$, $j = 1, \dots, n$. De aquí se sigue que la familia $\{(U_\varsigma)^n \mid \varsigma \in (B_{X^*})^n\}$ es un cubrimiento abierto del compacto $(B_{X^*}, \omega^*)^n$ y, por consiguiente, se pueden encontrar $\varsigma_1, \dots, \varsigma_k$ en $(B_{X^*})^n$ tal que

$$(B_{X^*})^n = \bigcup_{j=1}^{k} (U_{\varsigma_j})^n.$$

Si ahora tomamos $A(n,\varepsilon) = \{x_{\varsigma_j} \mid x_{\varsigma_j} \in U_{\varsigma_j} \cap A,\ j = 1, \dots, k\}$, entonces resulta que $A(n,\varepsilon)$ es un subcounjunto finito de A satisfaciendo $A(n,\varepsilon) \cap W(x;\varsigma,\varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $\varsigma \in (B_{X^*})^n$.

Finalmente, haciendo

$$D = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} A(n, 1/m)$$

se obtiene que D es un subconjunto numerable de A tal que $x \in \overline{D}^{\omega}$.

Las siguientes subsecciones tratarán con espacios de Banach mucho más generales que los espacios separables pero con la particularidad de que todos ellos son de Lindelöf.

5.2.1 CONJUNTOS DEBILMENTE COMPACTOS

Si X es un espacio de Banach reflexivo, entonces B_X es débilmente compacto y además,

$$X = \overline{[B_X]}$$

donde $[A]$ denota el subespacio lineal generado por A.

Similarmente, sea X es un espacio de Banach norma-separable y tomemos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión norma-densa en X tal que $x_n \neq 0$ para todo n. Es fácil verificar que el conjunto

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n\|x_n\|} x_n \right\} \cup \{0\}$$

es un subconjunto norma-compacto en X y así, débilmente compacto en X. Más aún,

$$X = \overline{[K]}.$$

Estos dos ejemplos nos dicen que todo espacio de Banach reflexivo (en particular, cualquier espacio de Hilbert) y todo espacio de Banach norma-separable es *generado* por un subconjunto débilmente compacto de X. Esto motiva la siguiente:

Definición 5.2.1 *Un espacio de Banach X se llama* **débilmente compacto generado** *si existe un subconjunto débilmente compacto K de X tal que*

$$X = \overline{[K]}.$$

Todo espacio débilmente compacto generado será abreviado por WCG, del inglés *weakly compactly generated.*

La siguiente observación nos será de gran utilidad en el futuro.

Lema 5.2.2 *Si X es un espacio de Banach WCG, entonces existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X tales que:*

(*a*) *K_n es débilmente compacto y simétrico,*

(*b*) $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots$,

(*c*) *$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ es norma-denso en X.*

Prueba: Suponga que X es WCG y sea K un subconjunto débilmente compacto de X tal que el subespacio lineal generado por K sea norma-denso en X. Pongamos

$$\hat{K} = \overline{co}(K \cup -K).$$

Puesto que $K \cup -K$ es débilmente compacto, se sigue del Teorema de Krein-Šmulian que $\hat{K}$ es débilmente compacto y además, simétrico. Si ahora definimos

$$K_n = n\hat{K},\ n = 1, 2, \ldots$$

resulta que la sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface (a) y (b).

Es una tarea fácil ver que $[K] \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ lo cual dá fin a la prueba. □

Antes de exhibir algunos ejemplos clásicos de espacios de Banach que son WCG, es necesario tener a la mano algunos criterios simples pero importantes para generar espacios WCG. J. Lindenstrauss, [Li, p. 239] nos muestra uno de ellos.

Lema 5.2.3 (Lindenstrauss) *Sean X un espacio WCG y Y un espacio de Banach arbitrario. Si existe un operador lineal acotado T de X en Y tal que $\overline{T(X)} = Y$, entonces Y es WCG.*

Prueba: Sea K un subconjunto débilmente compacto de X tal que $X = \overline{[K]}$. Puesto que T es $\omega - \omega$ continuo, $T(K)$ es débilmente compacto en Y. Claramente $[T(K)] = T([K])$ y como T es norma-norma continuo, entonces

$$T(X) = T(\overline{[K]}) \subseteq \overline{T([K])} = \overline{[T(K)]} \subseteq Y.$$

Ahora, la densidad de $T(X)$ nos asegura que

$$Y = \overline{[T(K)]}.$$

□

Como una consecuencia inmediata del resultado anterior se tiene:

Corolario 5.2.4 (Lindenstrauss) *Si X es un espacio WCG, entonces todo espacio cociente de X y, en particular, cualquier subespacio complementado de X es WCG.*

El próximo resultado es un hermoso y fascinante teorema de factorización debido a W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson y A. Pelczynski [DFJP]. De tal lema se derivan muchas consecuencias, algunas de las cuales no mencionaremos.

Preparativos para el teorema de factorización son los siguientes:

Dada una sucesión $(X_n, \|\ \|_n)_{n=1}^{\infty}$ de espacios de Banach y $1 \leq p < \infty$, denotaremos por

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{\ell_p}$$

al espacio de Banach de todas las sucesione $(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, tal que

$$\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p\right)^{1/p}.$$

No es díficil establecer (véase, por ejemplo [van D, p. 15]) que si $1 < p < \infty$, entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_{\ell_p}^{*} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n^{*}\right)_{\ell_q}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sean ahora X un espacio de Banach y W un subconjunto convexo, simétrico y norma-acotado de X. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, pongamos $U_n = 2^n W + 2^{-n} B_X$. Denote por $\|\ \|_n$ el funcional de Minkowski de U_n; esto es,

$$\|x\|_n = \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha U_n\}.$$

Es fácil chequear que $\|\ \|_n$ es una norma sobre X equivalente a la norma original de X. Para cada $x \in X$, definamos

$$|||x||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{1/2},$$

y sea

$$Y = \{x \in X : |||x||| < \infty\}.$$

Finalmente, denotemos por B_Y la la bola $|||\ |||$-cerrada unitaria de Y y por j la inclusión canónica de Y en X.

Lema 5.2.5 (Davis, Figiel, Johnson, Pelczynski) *Sea X un espacio de Banach y W un subconjunto convexo, simétrico y norma-acotado de X. Sean U_n, Y, B_Y y j como en el parágrafo anterior. Entonces*

(a) $W \subseteq B_Y$,

(b) $(Y, ||| \ |||)$ es un espacio de Banach y j es continua,

(c) $j^{**} : Y^{**} \to X^{**}$ es uno-a-uno y $Y = (j^{**})^{-1}(X)$, y

(d) $(Y, ||| \ |||)$ es reflexivo si y sólo si W es relativamente débilmente compacto en X.

Prueba: (a) Si $w \in W$, entonces $2^n w \in U_n$. Por èsto, $1 > ||2^n w||_n = 2^n ||w||_n$ y en consecuencia, $||w||_n < 2^{-n}$. Así, $|||w|||^2 < \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n})^2 < 1$.

(b) Sea X_n el espacio lineal X equipado con la norma $|| \ ||_n$. Puesto que $|| \ ||_n$ es equivalente a la norma original de X, resulta que X_n es también un espacio de Banach. Sea $Z = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{\ell_2}$. Si ahora definimos $\psi : Y \to Z$ por $\psi(y) = (jy, jy, \cdots)$, entonces se prueba fácilmente que ψ es una isometría lineal con $\psi(Y) = \{(z_n) \in Z \mid z_n = z_1 \quad \text{para todo} \quad n\}$, el cual es un subespacio lineal cerrado de Z. Por consiguiente, $(Y, ||| \ |||)$ es un espacio de Banach. Sea π_1 la projección de Z sobre su primera coordenada. Entonces $j = \pi_1 \circ \psi$ es continua.

(c) Con las notaciones de la prueba de (b), $Z^{**} = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n^{**})_{\ell_2}$ y $\psi^{**} : Y^{**} \to Z^{**}$ viene dada por $\psi^{**}(y^{**}) = (j^{**}y^{**}, j^{**}y^{**}, \cdots)$. Puesto que ψ es una isometría, ψ^{**} es también una isometría. Evidentemente esto significa que $j^{**} : Y^{**} \to X^{**}$ es uno-a-uno. También, $(\psi^{**})^{-1}(\psi(Y)) = Y$ lo cual significa (en terminos de j) que $(j^{**})^{-1}(X) = Y$.

(d) Por el Teorema de Alaoglu, $B_{Y^{**}}$ es ω^*-compacta y por el Teorema de Goldstine, B_Y es ω^*-densa en $B_{Y^{**}}$. Así, puesto que j^{**} es $\omega^* - \omega^*$ continuo y $j(B_Y) = j^{**}(B_Y)$ resulta que $\overline{j(B_Y)}^{\omega^*} = j^{**}(B_{Y^{**}})$.

Ahora, si W es relativamente débilmente compacto en X, entonces la débil-clausura de W es débilmente compacto en X. Por esto, todos los conjuntos

$$K_n = 2^n \overline{W}^{\omega} + 2^{-n} B_{X^{**}}$$

contienen a $j(B_Y)$ y son ω^*-compactos en X^{**}. Más aún, cada K_n contiene a $\overline{j(B_Y)}^{\omega^*} = j^{**}(B_{Y^{**}})$. Uniendo todas estas piezas resulta que

$$\begin{aligned} j^{**}(B_{Y^{**}}) &\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \\ &\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [X + 2^{-n} B_{X^{**}}] \\ &= X. \end{aligned}$$

De allí que $Y^{**} \subseteq (j^{**})^{-1}(X) \subseteq Y$. Esto demuestra que Y es reflexivo cuando W es relativamente débilmente compacto. El recíproco es trivial y la prueba del lema concluye. □

Tres consecuencias inmediatas, pero fundamentales, se derivan directamente del mágico lema de factorización anterior.

Corolario 5.2.6 *Cualquier subconjunto débilmente compacto K de un espacio de Banach es afínmente homeomorfo (en sus topologías débiles) a un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach reflexivo.*

Prueba: Con las notaciones del Lema 5.2.5, sea $W = co(K \cup (-K))$. Por Teorema de Krein- Šmulian, W es relativamente débilmente compacto. Se sigue ahora de Lema 5.2.5 (d) que Y es reflexivo, y $j : Y \to X$ es uno-a-uno y continuo de allí que débilmente continuo. $K' = j^{-1}(K)$ es débilmente compacto (siendo débilmente cerrado y acotado, por (a)). Claramente $j_{|K'}$ es el homeomorfismo buscado. □

Corolario 5.2.7 *Un espacio de Banach X es WCG si y sólo si existe un espacio reflexivo R y un operador lineal acotado $T : R \to X$ el cual es uno-a-uno y con $T(R)$ norma-denso en X.*

Prueba: Suponga que existen un espacio reflexivo R y un operador lineal acotado uno-a-uno $T : R \to X$ con $T(R)$ norma-denso en X. Puesto que R es WCG, entonces X es también WCG gracias al Lema 5.2.3. La otra implicación es presa fácil del Corolario 5.2.6. □

Por el Teorema de Alaoglu, (B_{X^*}, ω^*) es compacto para cualquier espacio de Banach X. Sin embargo, dicho conjunto por lo general no es metrizable (salvo que X sea norma-separable) y en consecuencia, no es secuencialmente compacto. Pero para espacios WCG vale el siguiente

Corolario 5.2.8 *Si X es un espacio de Banach WCG, entonces (B_{X^*}, ω^*) es secuencialmente compacto.*

Prueba: Por el Corolario 5.2.7 existen un espacio de Banach reflexivo Y y un operador lineal acotado $T : Y \to X$ el cual es uno-a-uno y tiene rango norma-denso. Pasemos ahora a $T^* : X^* \to Y^*$. Entonces T^* es débilmente compacto, y así, $T^*(B_{X^*})$ es relativamente débilmente compacto en Y^*. Por el Teorema de Eberlein-Šmulian, $T^*(B_{X^*})$ relativamente débilmente secuencialmente compacto. Sea $(x_n^*)_{n\geq 1}$ una sucesión en B_{X^*} y considere la sucesión $(T^*x_n^*)_{n\geq 1}$. Por lo dicho anteriormente, existe una subsucesión débilmente convergente $(T^*x_{n_k}^*)$; esto es, para cada $y \in Y$,

$$\lim_{k\to\infty}(T^*x_{n_k}^*)(y) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*(Ty)$$

existe. Pero por otro lado, al ser $(x_{n_k}^*)$ una sucesión norma-acotada y $T(Y)$ norma-denso en X, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}^*(x)$$

existe para todo $x \in X$; es decir, $(x_{n_k}^*)$ es una sucesión ω^*-Cauchy. Esto termina la prueba. □

Veremos ahora algunos ejemplos de espacios de Banach WCG, que no son necesariamente ni reflexivos ni norma-separables, así como también ejemplos de espacios de Banach que no son WCG.

EJEMPLOS IV.

(1) $\ell_1(\Gamma)$ no es WCG para cualquier Γ no numerable.

Para ver esto, tomemos un subconjunto débilmente compacto $K \subseteq \ell_1(\Gamma)$ tal que el subespacio lineal generado por K sea denso en $\ell_1(\Gamma)$. Veamos que K es norma-compacto. En efecto, por Teorema de Eberlin-Šmulian, K es débil-secuencialmente compacto y puesto que en $\ell_1(\Gamma)$ la convergencia de sucesiones es la misma para las topologías de la norma y la débil, resulta que K es norma-compacto y, además , metrizable. Por esto, K es norma-separable y así, $\ell_1(\Gamma)$ es norma-separable. Imposible.

(2) ℓ_∞ no es WCG.

Para demostrar esta afirmación, observemos en primer lugar que ℓ_1 es norma-separable y que $\ell_1^* = \ell_\infty$.

Sea ahora $K \subseteq \ell_\infty$ con K débilmente compacto y suponga que el subespacio lineal generado por K es norma-denso en ℓ_∞. Por el HECHO 3, K es norma-separable. Se sigue entonces que $\overline{[K]}^{\omega} = \overline{[K]}^{\|\|} = \ell_\infty$ es norma-separable. Imposible.

Más adelante probaremos que $L_\infty(\mu)$ tampoco es WCG. De hecho, el resultado sigue si imitamos la prueba del ejemplo anterior para el caso en que $L_1(\mu)$ es norma-separable. El caso general se derivará del hecho de que $L_\infty(\mu)$ comparte tanto con ℓ_1 así como con ℓ_∞ el peculiar encanto de que cualquier subconjunto suyo débilmente compacto, es norma-separable.

(3) $L_1(\mu)$ es WCG si y sólo si μ es σ-finita.

Supongamos que $L_1(\mu)$ es WCG, pero que μ no es σ-finita. Entonces existe una familia disjunta y no-numerable de subconjuntos medibles $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ con $\mu(A_\gamma) > 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Si definimos el operador $T : L_1(\mu) \to \ell_1(\Gamma)$ mediante la fórmula

$$T(f) = \left(\int_{A_\gamma} f d\mu \right)_{\gamma\in\Gamma},$$

entonces es fácil verificar que T es una projección sobre $\ell_1(\Gamma)$; es decir, existe un subespacio complementado de $L_1(\mu)$ isométrico a $\ell_1(\Gamma)$. Un llamado al Corolario 5.2.4 nos revela que $\ell_1(\Gamma)$ es WCG, lo cual es absurdo por el EJEMPLO 1.

Gracias al Teorema 5.2.3 será suficiente, para la prueba de la otra implicación, demostrar que existe un operador lineal continuo

$$T : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$$

tal que
$$\overline{T(L_2(\mu))} = L_1(\mu).$$

Veamos esto. Como μ es σ-finita, existe una sucesión (A_n) de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $0 < \mu(A_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Definamos
$$T : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$$
por
$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n} \cdot f}{2^n\, \mu(A_n)^{1/2}}, \qquad f \in L_2(\mu).$$

Observemos que como $\mu(A_n) < \infty$ y $\chi_{A_n} \cdot f \in L_2(\mu)$, entonces $\chi_{A_n} \cdot f \in L_1(\mu)$ y
$$\int |\chi_{A_n} \cdot f|\, d\mu = \int_{A_n} |f|\, d\mu \leq ||f||_2\, \mu(A_n)^{1/2}.$$

Por esto,
$$\begin{aligned} ||T(f)||_1 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n} |f|\, d\mu}{2^n\, \mu(A_n)^{1/2}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||f||_2\, \mu(A_n)^{1/2}}{2^n\, \mu(A_n)^{1/2}} \\ &= ||f||_2, \end{aligned}$$

lo cual prueba que T es continuo.

Para ver que el rango de T es norma-denso, tomemos $f \in L_1(\mu)$. Entonces $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \cdot f$ y así, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir un $N > 0$ tal que
$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \cdot f \right\|_1 < \varepsilon/2.$$

Ahora bien, como $\mu(A_n) < \infty$, existen funciones f_n en $L_\infty(\mu)$ tales que $f_n = \chi_{A_n} \cdot f_n$ y
$$||f_n - \chi_{A_n} \cdot f||_1 < \varepsilon/2N, \qquad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Sea

$$g = \sum_{n=1}^{N} 2^n \left[\mu(A_n)\right]^{1/2} f_n.$$

Es fácil ver que $g \in L_2(\mu)$ y $T(g) = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Más aún,

$$\begin{aligned} ||T(g) - f||_1 &\leq \left\| \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \cdot f - f \right\|_1 + \sum_{n=1}^{N} ||\chi_{A_n} \cdot f - f_n|| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\overline{T(L_2(\mu))} = L_1(\mu).$$

(4) Para cualquier conjunto Γ, $c_0(\Gamma)$ es WCG.

En efecto, el conjunto $K = \{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ de los vectores unitarios es relativamente débil-compacto y $[K]$ es norma-denso en $c_0(\Gamma)$.

Hasta ahora hemos visto ejemplos de espacios de Banach clásicos algunos de los cuales son WCG y otros que no son WCG. *¿ Qué ocurre con $C(\Omega)$, el espacio de las funciones continuas a valores reales definidas sobre el espacio compacto Hausdorff Ω ?.* Pues bien, este espacio será WCG si el compacto Ω se puede *sumergir* en un cierto espacio de Banach provisto con la topología débil.

En esta sección siempre supondremos que Ω es un espacio Hausdorff compacto. Es bien conocido que si $C(\Omega)$ está dotada de la *topología de la convergencia puntual* sobre Ω, la cual denotaremos por τ_p, entonces ella es más débil que la topología débil sobre $C(\Omega)$.

La siguiente definición se debe a J. Lindenstrauss [Li].

Definición 5.2.9 *Un espacio de Hausdorff compacto Ω se llama* **Eberlein compacto** *si Ω es homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto, de algún espacio de Banach, en su topología débil.*

Una primera observación que se obtiene de esta definición y el Corolario 5.2.6 es que la clase de espacios Eberlein compactos es suficientemente rica que incluye a todos los subconjuntos débilmente compactos de cualquier espacio de Banach.

Corolario 5.2.10 *Cualquier subconjunto débilmente compacto K de un espacio de Banach X es, en su topología débil, un Eberlein compacto.*

Si bien la topología de la convergencia puntual sobre $C(\Omega)$ es más débil que la de la topología débil, los subconjuntos *compactos y norma-acotados* en ambas topologías son los mismos. Este bonito resultado se debe a A. Grothendieck, mientras que la prueba que aquí mostramos proviene de la pluma H. P. Rosenthal [Ro1].

Lema 5.2.11 (Grothendieck) *Un subconjunto norma-acotado K de $C(\Omega)$ es débilmente compacto si y sólo si K es compacto en la topología de la convergencia puntual sobre Ω.*

Prueba: Supongamos primeramente que K es débilmente compacto. Ya que la topología débil sobre $C(\Omega)$ es mas fuerte que la topología de la convergencia puntual, se sigue que la aplicación identidad $id : (C(\Omega), \omega) \to (C(\Omega), \tau_p)$ es continua y así, K es τ_p -compacto.

Reciprocamente, supongamos que K es un subconjunto norma-acotado de $C(\Omega)$ el cual es τ_p-compacto y sea (f_n) una sucesión de elementos en K. Nuestra primera tarea será extraer una subsucesión de (f_n) convergiendo puntualmente a un miembro de $C(\Omega)$.

La clave para lograr este objetivo es probar la siguiente:

AFIRMACION. *Existe un conjunto numerable $D \subseteq \Omega$ tal que si g, $g' \in C(\Omega)$ están en la τ_p -clausura de la sucesión (f_n) y $g_{|_D} = g'_{|_D}$ entonces $g = g'$.*

En efecto, definamos la relación de equivalencia $\sim$ sobre Ω por

$$\omega \sim \omega' \quad \text{si y sólo si} \quad f_n(\omega) = f_n(\omega') \quad \text{para cada } n$$

y denotemos por S el conjunto de todas las clases de equivalencia de Ω provenientes de $\sim$. Sea $\varphi : \Omega \to S$ la aplicación cociente natural y dotemos a S de la topología cociente; esto es, $U \subseteq S$ es abierto si y solamente si $\varphi^{-1}(U)$ es abierto en Ω. Como es usual, S es un espacio métrico compacto con la distancia

$$d([\omega], [\omega']) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(\omega) - f_n(\omega')|,$$

donde $[\omega]$ denota la clase de equivalencia de ω. Más aún, si $g \in C(\Omega)$ satisface $g(\omega) = g(\omega')$ siempre que $\omega \sim \omega'$, entonces la función $\tilde{g}$ definida sobre S por $\tilde{g}(\varphi(\omega)) = g(\omega)$, está en $C(\Omega)$. Como S es separable y φ es sobreyectiva, existe un subconjunto numerable $D \subseteq \Omega$ tal que $\varphi(D)$ es denso en S. Veamos que D es el conjunto buscado: en efecto, supongamos que $g, g' \in C(\Omega)$ están en la τ_p-clausura de $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Se sigue que si $\omega \sim \omega'$, entonces $g(\omega) = g(\omega')$ y $g'(\omega) = g'(\omega')$. Pero ahora, si g y g' están en $C(\Omega)$ y coinciden sobre D, entonces $\tilde{g}$ coincide con $\tilde{g}'$ sobre un subconjunto denso de S, y por consiguiente, $\tilde{g} = \tilde{g}'$ sobre S, lo que a su vez ímplica que $g = g'$. Nuestra afirmación ha sido demostrada.

Una vez establecida la existencia de D, un simple argumento de diagonalización nos permite obtener una subsucesión (f'_n) de (f_n) convergiendo puntualmente sobre D. Sea $g \in K$ un punto-clausura de la sucesión (f'_n) en la τ_p-topología (la existencia de g está asegurada por la τ_p-compacidad de K). Si g' es cualquier otro τ_p-punto clausura de (f'_n), entonces $g'_{|_D} = g_{|_D}$ y así, $g' = g$. Esto nos muestra que la subsucesión (f'_n) tiene un único τ_p-punto clausura $g \in K$. Pero una sucesión en un espacio Hausdorff compacto con exactamente un punto clausura, converge a dicho punto. Por esto, $\lim_n f'_n(\omega) = g(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Nos queda por demostrar que (f'_n) converge débilmente a g. Pero para arribar a tal conclusión sólo debemos recordar que, gracias al Teorema de Representación de Riesz, cada miembro $\psi \in C(\Omega)^*$ actúa como una integral vía una medida de Borel regular sobre Ω. Con esto en mente y puesto que K se ha supuesto norma-acotado y $\lim_n f'_n(\omega) = g(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$, entonces el Teorema de la Convergencia Acotada nos garantiza que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f'_n \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu,$$

para cualquier medida de Borel regular μ sobre Ω. Pero esto significa exactamente que $\lim_n f'_n = g$ debilmente. Fin de la prueba. □

El próximo resultado, debido a H. P. Rosenthal [Ro1], nos permitirá conocer cuándo $C(\Omega)$ es WCG.

Lema 5.2.12 (Rosenthal) *$C(\Omega)$ es WCG si y sólo si existe un subconjunto débilmente compacto K de $C(\Omega)$ que separa los puntos de Ω.*

Prueba: Supongamos que $C(\Omega)$ es WCG. Entonces existe un subconjunto débilmente compacto K de $C(\Omega)$ tal que el subespacio lineal generado por K es norma-denso en $C(\Omega)$. Claramente K separa los puntos de Ω.

Para demostrar la otra dirección, supongamos que existe un subconjunto débilmente compacto K de $C(\Omega)$ que separa los puntos de Ω. Sin perder generalidad, podemos asumir que $K \subseteq B_{C(\Omega)}$ y que la función *identicamente uno* 1, también pertenece a K (nótese que de no ser así, el conjunto $K_0 = K \cup \{1\}$ satisface las propiedades). Observemos ahora que

$$K \cdot K := \{fg \mid f \in K,\ g \in K\}$$

es ciertamente τ_p-compacto y, gracias al criterio de Grothendieck (Lema 5.2.11), $K \cdot K$ es débilmente compacto. Por esto, haciendo $K^{n+1} = K^n \cdot K$ para $n = 1, 2, \ldots$ se obtiene una sucesión creciente (K^n) de subconjuntos débilmente compactos de $C(\Omega)$ cada uno de los cuales separa los puntos de Ω y contienen a 1. Sea

$$W = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} K^n.$$

Es fácil ver que W es débilmente compacto y que el subespacio lineal generado por W ($= [\cup_n K^n]$) es una sub-algebra de $C(\Omega)$ la cual separa los puntos y contiene a las funciones constantes. Se sigue ahora del Teorema de Stone-Weierstrass que $[W]$ es norma-denso en $C(\Omega)$ y así, $C(\Omega)$ es WCG. □

Estamos ahora en condiciones de saber con exactitud cuándo $C(\Omega)$ es WCG. La demostración del siguiente teorema también es obra de H. P. Rosenthal [Ro1].

Teorema 5.2.13 (Amir-Lindenstrauss) *$C(\Omega)$ es WCG si y sólo si Ω es Eberlein compacto.*

Prueba: Supongamos que Ω es Eberlein compacto. Puesto que Ω es homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto K de un espacio de Banach X y ya que, en este caso, $C(\Omega)$ y $C(K)$ resultan ser linealmente isométricos, podemos asumir y así lo haremos, que Ω es, en sí mismo, débilmente compacto en X. Defina

$$T : X^* \to C(\Omega)$$

por

$$(Tx^*)(\omega) = x^*(\omega), \quad \text{para todo} \quad x^* \in X^*, \omega \in \Omega.$$

Claramente T es un operador lineal acotado; es decir, $T(B_{X^*})$ es norma-acotado. Nuestra tarea ahora es mostrar que $T(B_{X^*})$ es τ_p-compacto. Para ver esto, es suficiente demostrar que T es $\omega^* - \tau_p$ continuo. En efecto, sea (x^*_α) una red en X^* tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$ para algún $x^* \in X^*$. Entonces se sigue directamente de la definiciones de T y de la topología ω^* que $T(x^*_\alpha) \to T(x^*)$ puntualmente. Esto prueba que T es $\omega^* - \tau_p$ continuo y como B_{X^*} es ω^*-compacto resulta que $T(B_{X^*})$ es τ_p-compacto. Un llamado al Lema 5.2.11 nos revela que $T(B_{X^*})$ es débilmente compacto, y claramente separa los puntos de Ω. Así, por el Lema 5.2.12, $C(\Omega)$ es WCG.

Reciprocamente, supongamos que $C(\Omega)$ es WCG y sea K un subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$ que lo genera. Procediendo como en el parágrafo anterior, definamos

$$T : C(\Omega)^* \to C(K)$$

por $T(x^*)(f) = x^*(f)$ para toda $f \in K$. Entonces $T(B_{C(\Omega)^*})$, es débilmente compacto y puesto que K genera a $C(\Omega)$, resulta que T es inyectivo. Por esto, $B_{C(\Omega)^*}$ es afínmente homeomorfo a $T(B_{C(\Omega)^*})$; es decir, $T(B_{C(\Omega)^*})$, en su ω^*-topología, es un Eberlein compacto; de aquí Ω siendo homeomorfo a un subconjunto de $B_{C(\Omega)^*}$ es también Eberlein compacto. □

De la prueba del teorema anterior se deduce el siguiente resultado de [AL]:

Corolario 5.2.14 (Amir-Lindenstrauss) *Si X es WCG, entonces la bola (B_{X^*}, ω^*) es un Eberlein compacto.*

Los espacios Eberlein compacto poseen algunas buenas propiedades. Por ejemplo, imágenes continuas de espacios Eberlein compactos son Eberlein compactos (la prueba de este resultado es "dura", ver [BRW]), mientras que subespacios cerrados de espacios Eberlein compacto son Eberlein compactos. Similarmente, productos numerables de espacios Eberlein compactos son Eberlein compactos. Un hecho interesante que merece nuestra atención es que *en todo espacio Eberlein compacto, metrizabilidad, separabilidad y la CCC* son *equivalentes.* Para demostrar esto último necesitaremos probar algunos resultados interesantes en sí mismos.

Comenzaremos con un resultado bastante conocido.

Teorema 5.2.15 *Sea Ω un espacio de Hausdorff compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*a*) *Ω es metrizable.*

(*b*) *$C(\Omega)$ es norma-separable.*

(*c*) *Existe una sucesión (f_n) en $C(\Omega)$ que separa los puntos de Ω.*

Prueba: Veamos que (a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que (a) se satisface y elija una métrica d sobre Ω que genera su topología. Entonces Ω es un espacio separable y en consecuencia existe una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en Ω que es densa en dicho espacio. Ahora bien, para cada entero $n \geq 1$, las bolas abiertas $B(x_i, 1/n)$ con centros en x_i y radio $1/n$ forman un cubrimiento de Ω y así, por compacidad, existe un k_n tal que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i, 1/n).$$

Sean

$$F_n^i = \{\omega \in \Omega \mid d(x_i, \omega) \leq 1/n\} \quad \text{y} \quad G_n^i = \{\omega \in \Omega \mid d(x_i, \omega) \geq 2/n\}.$$

Puesto que la aplicación $\omega \mapsto d(\omega, A)$ de Ω a $\mathbf{R}$ es continua cualquiera que sea el conjunto $A \subseteq \Omega$, entonces la función

$$f_{in}(\omega) = \frac{d(\omega, G_n^i)}{d(\omega, F_n^i) + d(\omega, G_n^i)}$$

es continua y verifica además que

$$f_{in}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in F_n^i \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in G_n^i. \end{cases} \tag{1}$$

Finalmente, definiendo

$$\psi_{in}(\omega) = \frac{f_{in}(\omega)}{\sum_{j=1}^{k_n} f_{in}(\omega)},$$

resulta que cada ψ_{in} es continua y gracias a (1), ella cumple con

$$\psi_{in}(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad d(x_i, \omega) \geq 2/n \tag{2}$$

y

$$\sum_{i=1}^{k_n} \psi_{in}(\omega) = 1.$$

Ahora bien, si tomamos $A_n = \{\psi_{in} \mid i = 1, \ldots, k_n\}$, entonces $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable y norma-denso en $C(\Omega)$. Para ver esto último sólo necesitaremos demostrar que $[A]$, el subespacio lineal generado por A, es norma-denso en $C(\Omega)$. En efecto, sean $f \in C(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f, existe un entero $n \geq 1$ tal que

$$|f(\omega) - f(\varpi)| < \varepsilon \tag{3}$$

cualesquiera que sean $\omega, \varpi \in \Omega$ satisfaciendo $d(\omega, \varpi) < 2/n$. Sea

$$g(\omega) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i)\psi_{in}(\omega).$$

Claramente $g \in [A]$ y puesto que $\sum_{i=1}^{k_n} \psi_{in} = 1$, resulta que

$$\begin{aligned} f(\omega) - g(\omega) &= \left(\sum_{i=1}^{k_n} \psi_{in}(\omega)\right) f(\omega) - \sum_{i=1}^{k_n} \psi_{in}(\omega) f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \psi_{in}(\omega)[f(\omega) - f(x_i)]. \end{aligned}$$

Es fácil ver ahora, usando de (2) y (3), que $|f(\omega) - g(\omega)| < \varepsilon$; es decir $||f - g||_\infty \leq \varepsilon$, lo cual nos dice que $C(\Omega)$ es norma-separable.

(b)$\Rightarrow$ (c). Supongamos que (f_n) es una sucesión norma-densa en $C(\Omega)$ y sean $\omega, \varpi \in \Omega$ con $\omega \neq \varpi$. Puesto que Ω es un espacio normal, el Lema de Uryshon nos garantiza la existencia de una función $f \in C(\Omega)$ tal que $f(\omega) = 0$ y $f(\varpi) = 1$. Pero por otro lado, la densidad de las f_n nos proporciona un f_{n_0} tal que $|f(\tau) - f_{n_0}(\tau)| \leq 1/4$ para cada $\tau \in \Omega$. Por esto,

$$|f(\omega) - f_{n_0}(\omega)| = |f_{n_0}(\omega)| \leq 1/4 \quad \text{y} \quad |f(\varpi) - f_{n_0}(\varpi)| = |1 - f_{n_0}(\varpi)| \leq 1/4,$$

de donde se deduce que $f_{n_0}(\omega) \leq 1/4 < 3/4 \leq f_{n_0}(\varpi)$. Esto prueba que la sucesión (f_n) separa los puntos de Ω.

(c)$\Rightarrow$ (a). Supongamos que (f_n) es una sucesión en $C(\Omega)$ que separa los puntos de Ω. Sin perder generalidad, podemos asumir que $||f_n||_\infty \leq 1$ para todo n. Si definimos

$$d(\omega, \varpi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(\omega)| + |f_n(\varpi)|}{2^n},$$

para todo $\omega, \varpi \in \Omega$, entonces se comprueba fácilmente que d es una métrica sobre Ω generando la topología de Ω. En efecto, dado $a \in \Omega$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(|f_n(\omega)| + |f_n(a)|)$ converge uniformemente sobre Ω. De allí que la continuidad de $d(\omega, a)$ sigue de la continuidad de las f_n. Finalmente, si denotamos por τ y τ_d las topologías original y la generada por la métrica d, respectivamente, sobre Ω, resulta que la identidad $id : (\Omega, \tau) \to (\Omega, \tau_d)$ es un homeomorfismo. Fin de la prueba. □

El resultado anterior nos dice en todo espacio de Hausdorff compacto, digamos Ω, las nociones de metrizabilidad, separabilidad y la CCC son equivalentes si $C(\Omega)$ es norma-separable. Pero en general, esto nos es del todo cierto. Sin embargo, si nuestro compacto es un Eberlein compacto estas nociones siguen siendo equivalentes sin referencia alguna a la separabilidad de $C(\Omega)$, aunque ella es clave en la demostración.

Como ya fue establecido en el HECHO 3, si X es un espacio de Banach norma-separable, entonces cualquier subconjunto débilmente compacto de X^* es norma-separable. La presencia de la separabilidad puede ser omitida en algunos casos para arribar a la misma conclusión.

Un requisito para el próximo resultado lo constituye la siguiente

Definición 5.2.16 *Un espacio de Banach X se dice que tiene la* **propiedad de Dunford-Pettis** *si para cualquier espacio de Banach Y, todo operador débilmente compacto $T : X \to Y$ transforma conjuntos débilmente compactos en norma-compactos.*

Ejemplos de espacios de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis incluyen a los espacios $L_1(\mu)$, a los espacios $C(\Omega)$, a los espacios de Schur, y a todos los subespacios norma-cerrados de $c_0(\Gamma)$. Una buena referencia para conocer de estos espacios proviene de [Di2].

Un resultado interesante, consecuencia de los dos resulatados anteriores, lo constituye el siguiente (ver [Ro2, p. 232]):

Corolario 5.2.17 (Rosenthal) *Sea X un espacio de Banach WCG satisfaciendo además la propiedad de Dunford-Pettis. Entonces cualquier subconjunto débilmente compacto de X^* es norma-separable. En particular, si μ es una medida finita, entonces cualquier subconjunto débilmente compacto de $L_\infty(\mu)$ es norma-separable.*

Prueba: Supongamos que K es un subconjunto débilmente compacto de X^* y defina $T : X^{**} \to C(K)$ por $(Tx^{**})(k) = x^{**}(k)$ para todo $x^{**} \in X^{**}$ y $k \in K$. Como en la prueba del Teorema 5.2.13, obtenemos que T es un operador lineal débilmente compacto y así, $T \circ J : X \to C(K)$ también es débilmente compacto, donde $J : X \to X^{**}$ es la inclusión natural. Sea ahora G un subconjunto débilmente compacto de X, generando a X. Puesto que X tiene la propiedad de Dunford-Pettis, $T \circ J(G)$ es un subconjunto norma-compacto de $C(K)$, y por consiguiente norma-separable. Ya que G genera a X, se sigue que $T \circ J(X)$ es un subespacio norma-separable de $C(K)$. Sea A la sub-algebra cerrada más pequeña de $C(K)$ conteniendo a $T \circ J(X)$ y a las constantes. Entonces A es también norma-separable. Pero como $T \circ J(X)$ separa los puntos de K y, por consiguiente, también A, se deduce del Teorema de Stone-Weierstrass que $A = C(K)$; es decir, $C(K)$ es norma-separable. Un llamado al Teorema 5.2.15, nos dice que K es metrizable en su topología débil y así, K es norma-separable. $\square$

Del Corolario 5.2.17 se deduce inmediatamente que

Corolario 5.2.18 *Si μ es una medida finita, entoces $L_\infty(\mu)$ no es WCG.*

En el año de 1.966, Corson y Lindenstrauss [CL] conjeturan que *cualquier subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach es linealmente homeomorfo a un subconjunto de $c_0(\Gamma)$ para algún Γ* . Dos años más tarde Amir y Lindenstrauss en [AL] confirman el profético presentimiento de Corson y Lindenstrauss. La prueba (véase por ejemplo [AL] o [Di1]) está basada sobre una delicada y díficil construcción de una sucesión larga de proyecciones en un espacio de Banach WCG arbitrario.

Nuestro próximo objetivo es presentar una prueba de ese resultado pero al estilo Gul'ko. La demostración que aquí exhibimos fue dada por Namioka y Wheeler en [NW] amparándose en las ideas de Gul'ko [Gu].

La motivación para la próxima definición es la siguiente:

OBSERVACION (*): Sea K un Eberlein compacto. Puesto que K es, por definición, homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto, en su topología débil, situado en algún espacio de Banach X, podemos suponer que K vive en X; es decir, podemos asumir, y así lo haremos, que K es un subconjunto débilmente compacto de X. Sea Y el subespacio lineal norma-cerrado generado por K. Por el Teorema de Alaoglu, (B_{Y^*}, ω^*) es compacto (y Hausdorff). Si definimos la aplicación

$$f : K \times B_{Y^*} \to [-1, 1]$$

por

$$f(x, y^*) = \frac{y^*(x)}{M},$$

donde $M = \sup\{||x|| : x \in K\}$, el cual es finito gracias al Teorema de Acotación Uniforme, resulta que:

(1) f es *separadamente continua*; esto es,

a.) para cada $x \in K$, la aplicación $f_x(\cdot) = f(x, \cdot)$ es continua sobre (B_{Y^*}, ω^*), y

b.) para cada $y^* \in B_{Y^*}$, la aplicación $f_{y^*}(\cdot) = f(\cdot\,, y^*)$ es continua sobre (K, ω).

(2a) K *separa los puntos* de B_{Y^*}; esto es, si $f(x, y_1^*) = f(x, y_2^*)$ para todo $x \in K$, entonces $y_1^* = y_2^*$.

Esto sigue del hecho de que K genera a Y.

(2b) B_{Y^*} *separa los puntos* de K; esto es, si $f(x_1, y^*) = f(x_2, y^*)$ para todo $y^* \in B_{Y^*}$, entonces $x_1 = x_2$.

Esto es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach.

Este simple, pero extraordinario hecho, da origen a la siguiente

Definición 5.2.19 *Sean K y M espacios de Hausdorff. Un* **apareamiento** *entre los espacios K y M es una función* separadamente continua

$$\varphi : K \times M \to [-1,1]$$

tal que

(i) K separa los puntos de M; *es decir, si $\varphi(x,y_1) = \varphi(x,y_2)$ para todo $x \in K$, entonces $y_1 = y_2$, y*

(ii) M separa los puntos de K; *es decir, si $\varphi(x_1,y) = \varphi(x_2,y)$ para todo $y \in M$, entonces $x_1 = x_2$.*

En este caso, diremos que K y M están **apareados**.

En lo que sigue, usaremos el símbolo $< x, y >$ en lugar de $\varphi(x,y)$.

Comencemos con el siguiente resultado.

Lema 5.2.20 *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *K es Eberlein compacto.*

(2) *K está apareado con algún espacio de Hausdorff compacto.*

Prueba: (1) $\Rightarrow$ (2) es justamente la OBSERVACION (*).

(2) $\Rightarrow$ (1). Suponga que K está apareado con algún espacio de Hausdorff compacto M. Defina la aplicación

$$\psi : K \to C(M)$$

por

$$\psi(x) = < x, y > .$$

Claramente ψ es continua cuando $C(M)$ está provisto de la topología puntual τ_p. Por esto, $\psi(K)$ es τ_p-compacto. Más aún, puesto que $\psi(K) \subseteq B_{C(M)}$ se sigue entonces del criterio de Grothendieck (Lema 5.2.11) que $\psi(K)$ es débilmente compacto. Es claro, de la definición de apareamiento, que ψ es uno-a-uno y en consecuencia, K es homeomorfo a $(\psi(K), \omega)$; es decir, K es Eberlein compacto. $\square$

Ya hemos visto que si X es un espacio de Banach WCG, entonces la bola (B_{X^*}, ω^*) es Eberlein compacto (Corolario 5.2.14). Este resultado también se obtiene facilmente del Lema 5.2.20 ya que (B_{X^*}, ω^*) está apareado con (K, ω), donde K es un subconjunto débilmente compacto generando a X.

Recordemos que una **retracción** de un espacio topológico T sobre un subespacio S de T es una *aplicación continua* f de T sobre S tal que $f(s) = s$ para todo $s \in S$.

El éxito del método de Gul'ko en la demostración del teorema de Amir-Lindenstrauss rádica exactamente en su noción de "*parejas conjungadas*".

Definición 5.2.21 (Gul'ko) *Sean K y M espacios de Hausdorff compactos y sean A y B subespacios cerrados de K y M respectivamente. Se dice que (A, B) es una* **pareja conjugada** *si:*

(1) *para cada $x \in K$, existe un $p(x) \in A$ tal que $< x, y >=< p(x), y >$ para todo $y \in B$, y dualmente*

(2) *para cada $y \in M$, existe un $q(y) \in B$ tal que $< x, y >=< x, q(y) >$ para todo $x \in K$.*

He aquí un hecho simple, pero importante, derivado de la definición anterior.

Lema 5.2.22 (Gul'ko) *Sean K, M, A, B, p y q como el la Definición 5.2.21. Entonces*

(1) *el apareamiento entre K y M induce un apareamiento entre A y B,*

(2) *$p(x)$ y $q(y)$ son únicos,*

(3) *las aplicaciones $p : K \to A$ y $q : M \to B$ son retracciones,*

(4) *para cada $x \in K$ y $y \in M$, $< p(x), y >=< p(x), q(y) >=< x, q(y) >$*

.

Prueba: (1) Supongamos que K y M están apareados. Claramente la restricción de la aplicación separadamente continua $< \cdot, \cdot >$ a $A \times B$, la cual seguiremos denotando por $< \cdot, \cdot >$, es separadamente continua. Veamos que A separa los puntos de B. En efecto, sean $u, v \in B$ y supongamos que $< a, u >=< a, v >$ para todo $a \in A$. Entonces para cada $x \in K$ existe, por definición, un $p(x) \in A$ tal que

$$< x, u >=< p(x), u >=< p(x), v >=< x, v >$$

y así, $u = v$ ya que K separa los puntos de M. De modo enteramente similar se prueba que B separa los puntos de A.

(2) Es consecuencia de (1).

(3) Que $p(K) = A$ sigue directamente de la definición. Para ver que p es continua sólo es necesario probar que $x \mapsto p(x) \mapsto < p(x), y > = < x, y >$ es una función continua para cada $y \in B$ puesto que B separa los puntos de A. Pero esto es trivial ya que $< p(x), y > = < x, y >$ para cada $y \in B$. Por otro lado, por la unicidad de p, se tiene que $p(x) = x$ siempre que $x \in A$. Esto prueba que p es una retracción. Similarmente, lo mismo es cierto para q.

(4) Es obvio. $\square$

Las retracciones p y q obtenidas en el Lema 5.2.22 serán llamadas las *retracciones canónicas* para la pareja conjungada (A, B). Cuando (A, B) y (A', B') sean parejas conjungadas tales que $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$, entonces escribiremos $(A, B) \subseteq (A', B')$.

Lema 5.2.23 (Compatibilidad de Retracciones) *Sean K y M espacios de Hausdorff compactos apareados, sean (A, B) y (A', B') parejas conjungadas con $(A, B) \subseteq (A', B')$ y sean p, q y p', q' las retracciones canónicas de (A, B) y (A', B') respectivamente. Entonces $p = p \circ p'$ y $q = q \circ q'$.*

Prueba: Sean $x \in K$ y $y \in B \subseteq B'$. Entonces

$$< p \circ p'(x), y > = < p'(x), y > = < x, y > = < p(x), y > .$$

Puesto que B separa los puntos de A se concluye que $p(x) = p \circ p'(x)$. Similarmente, $q = q \circ q'$. $\square$

Antes de proceder con la formulación y demostración de los dos teoremas fundamentales de Gul'ko, necesitaremos recordar los siguientes hechos:

Si T es un espacio de Hausdorff, el *peso* de T, denotado por $\omega(T)$, se define como el número cardinal más pequeño de una base de abiertos para la topología, y el *caracter de densidad* de T, denotado por $dens(T)$, es el número cardinal más pequeño de un subconjunto denso de T. Es claro que $dens(T) \leq \omega(T)$. Si S es un subespacio de T, entonces $\omega(S) \leq \omega(T)$, pero $dens(S) \leq dens(T)$ es falso en general. Si m es un número cardinal, sea $m^* = \max(m, \aleph_0)$.

Teorema 5.2.24 (Gul'ko) *Sean K y M espacios de Hausdorff compactos apareados, y sean E y F subespacios cerrados de K y M respectivamente tales que $\omega(E) \leq m$ y $\omega(F) \leq m$ con $m \geq \aleph_0$. Entonces existe una pareja conjungada (A, B) tal que*

$$(E, F) \subseteq (A, B) \quad y \quad \omega(A) \leq m, \qquad \omega(B) \leq m.$$

Prueba: La ejecución de la prueba la haremos en dos pasos:

Primer Paso. Existe un subconjunto cerrado E_1 de K tal que
(a) $E \subseteq E_1$,
(b) $\omega(E_1) \leq m$, y
(c) para cada $x \in K$ existe un $x_1 \in E_1$ tal que $< x, y > = < x_1, y >$ para todo $y \in F$.

En efecto, ya que $\omega(F) \leq m$ existe un subconjunto denso D de F tal que $card(D) \leq m$. Sea

$$\psi : K \rightarrow [-1, 1]^D$$

la aplicación dada por

$$\psi(x)(d) = < x, d > \quad \text{para todo} \quad x \in K,\ d \in D.$$

Entonces ψ es continua, uno-a-uno y

$$dens(\psi(K)) \leq \omega(\psi(K)) \leq \omega([-1, 1]^D) \leq m. \qquad (*)$$

De aquí se deduce la existencia de un subconjunto G de K tal que $card(G) \leq m$ y $\overline{\psi(G)} = \psi(K)$.

Sea $E_1 = \overline{E \cup G}$. Claramente $E \subseteq E_1$, lo cual es (a). De la continuidad e inyectividad de ψ resulta que K es homeomorfo a $\psi(K)$, y de (*), se sigue que $\omega(K) \leq m$. De nuevo, por la continuidad de ψ y la compacidad de E_1, tenemos que

$$\overline{\psi(G)} \subseteq \psi(E_1) \subseteq \psi(K) = \overline{\psi(G)},$$

por lo que $\psi(K) = \psi(E_1)$. Así, $\omega(E_1) \leq m$, lo cual es la prueba de (b).

Finalmente, si $x \in K$ entonces existe un $x_1 \in E_1$ tal que $\psi(x) = \psi(x_1)$. Ahora, para cada $d \in D$, $< x, d > = \psi(x)(d) = \psi(x_1)(d) = < x_1, d >$ y por continuidad, $< x, y > = < x_1, y >$ para todo $y \in \overline{D} = F$. Esto prueba (c) y con ello se termina la prueba del Primer Paso.

Segundo Paso. Por una aplicación repetida del Primer Paso (y su dual), se obtienen un par de sucesiones de conjuntos cerrados (E_n) y (F_n) tales que
(i) $\omega(E_n) \leq m$ y $\omega(F_n) \leq m$ para todo $n \geq 1$,
(ii) $E = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq K, \quad F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq M$,
(iii) para cada $x \in K$ y $n \geq 1$, existe un $x_n \in E_n$ tal que $< x, y >=< x_n, y >$ para todo $y \in F_{n-1}$, y
(iv) para cada $y \in M$ y $n \geq 1$, existe un $y_n \in F_n$ tal que $< x, y >=< x, y_n >$ para cada $x \in E_{n-1}$.

Sean

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \quad \text{y} \quad B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}.$$

Es claro que $(E, F) \subseteq (A, B)$, $\omega(A) \leq m$ y $\omega(B) \leq m$. Para demostrar que (A, B) es una pareja conjungada, tomemos $x \in K$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión determinada por (iii). Sea z un punto clausura de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $z \in A$. Para cada k, $< x, y >=< x_n, y >$ siempre que $n \geq k$ y $y \in F_{k-1}$. De allí que $< x, y >=< z, y >$ para todo $y \in F_{k-1}$ y $k = 1, 2, \ldots$ y en consecuencia, $< x, y >=< z, y >$ para todo $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Por continuidad, $< x, y >=< z, y >$ para todo $y \in B$. Haciendo $z = p(x) \in A$ obtenemos que $< x, y >=< p(x), y >$ para cada $y \in B$. Similarmente se prueba que para cada $y \in M$, existe un $q(y) \in B$ tal que $< x, y >=< x, q(y) >$ para todo $x \in A$. Esto termina la prueba. $\square$

Teorema 5.2.25 *Sean K y M espacios de Hausdorff compactos apareados, sea λ un límite ordinal, y sea $(A_\alpha, B_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ una familia de parejas conjugadas tales que$(A_\alpha, B_\alpha) \subseteq (A_\beta, B_\beta)$ siempre que $\alpha \leq \beta < \lambda$. Si $A_\lambda = \overline{\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha}$ y $B_\lambda = \overline{\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha}$. Entonces*

(*a*) *(A_λ, B_λ) es una pareja conjugada, y*

(*b*) *para cada $x \in K$ y cada $y \in M$*

$$p_\lambda = \lim_{\alpha<\lambda} p_\alpha(x) \quad y \quad q_\lambda = \lim_{\alpha<\lambda} q_\alpha(y)$$

donde p_α y q_α son las retracciones canónicas de (A_α, B_α), $\alpha \leq \lambda$.

Prueba: (a). Fijemos $x \in K$ y sea z un punto clausura de la red $\{p_\xi(x) \mid \xi < \lambda\}$. Entonces $z \in A_\lambda$. Fijemos ahora un $\alpha < \lambda$ y sea $y \in B_\alpha$. Entonces

$$< x, y >=< p_\xi(x), y > \quad \text{siempre que} \quad \alpha \leq \xi < \lambda.$$

Pero z es un punto clausura de la red $\{p_\xi(x) \mid \alpha \leq \xi < \lambda\}$, y así $< x, y >=< z, y >$ para todo $y \in B_\alpha$. Por continuidad, $< x, y >=< z, y >$ para todo $y \in B_\lambda$. Esto y su dual prueban (a).

(b) Por el Lema 5.2.22 y lo anterior, el punto clausura de la red $\{p_\xi(x) \mid \xi < \lambda\}$ es único y es igual a $p_\lambda(x)$. Así, $p_\lambda = \lim_{\alpha<\lambda} p_\alpha(x)$, y dualmente, $q_\lambda = \lim_{\alpha<\lambda} q_\alpha(y)$. □

Estamos ahora realmente listos para abordar la ejecución de la prueba del Teorema de Amir-Lindenstrauss [AL] al estilo de Gul'ko. Este primer resultado es el Corolario 1 en [AL].

Teorema 5.2.26 (Amir-Lindenstrauss) *Si K es Eberlein compacto, entonces existen un conjunto Γ y un operador lineal continuo $T : C(K) \to c_0(\Gamma)$ el cual es uno-a-uno.*

Prueba: La demostración procede por inducción sobre $m = \omega(K) \geq \aleph_0$.

Comencemos entonces con $m = \aleph_0$. En este caso elija una sucesión (x_n) densa en K y definamos $T : C(K) \to c_0(\mathbf{N})$ por $(Tf)(n) = \frac{1}{n} f(x_n)$. Claramente T satisface la conclusión del teorema.

Supongamos ahora que $m > \aleph_0$ y que el teorema se cumple para todo Eberlein compacto K tal que $\omega(K) < m$. Sea λ el número ordinal más pequeño tal que $card(\lambda) = m$. Supongamos que K es un Eberlein compacto tal que $dens(K) = \omega(K) = m$. Escojamos un subconjunto denso $\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ de K y sea M un espacio de Hausdorff compacto apareado con K (Lema 5.2.20). Afirmamos que existe una familia $\{(A_\alpha, B_\alpha) \mid 1 \leq \alpha < \lambda\}$ de parejas conjungadas tales que

(i) $(A_\alpha, B_\alpha) \subseteq (A_\beta, B_\beta)$ si $\alpha \leq \beta < \lambda$.

(ii) $x_\alpha \in A_{\alpha+1}$ para cada $\alpha < \lambda$.

(iii) si α es un límite ordinal, entonces

$$A_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta} \quad \text{y} \quad B_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta}.$$

(iv) $\omega(A_\alpha) \leq card(\alpha)^*$ y $\omega(B_\alpha) \leq card(\alpha)^*$, $\alpha < \lambda$.

Para ver esto, elijamos cualquier $y_0 \in M$, y definamos (A_1, B_1) tal que $x_0 \in A_1$, $y_0 \in B_1$, y $\omega(A_1) = \omega(B_1) \leq \aleph_0$ (Teorema 5.2.24). Supongamos ahora que (A_β, B_β) han sido definidos para todo $\beta < \alpha < \lambda$. Si α es un límite ordinal, definamos (A_α, B_α) por (iii) (el cual es una pareja conjungada gracias al Teorema 5.2.25). Si $\alpha = \gamma + 1$, entonces aplíquemos el Teorema 5.2.24 para encontrar un $A_\alpha \supseteq A_\gamma \cup \{x_\gamma\}$ y un $B_\alpha \supseteq B_\gamma$. Es una tarea fácil ver que (i) - (iv) se cumplen.

Por la hipótesis inductiva, para cada $\alpha < \lambda$, existe un operador lineal continuo y uno-a-uno $T_\alpha : C(A_\alpha) \to c_0(\Gamma_\alpha)$ con $||T_\alpha|| \leq 1$. Sea Γ la unión disjunta de la familia $\{\Gamma_{\alpha+1} \mid 0 \leq \alpha < \lambda\}$. Denotando por p_α las retracciones canónicas de K sobre A_α, definamos

$$T : C(K) \to \ell_\infty(\Gamma)$$

por

$$\begin{aligned} T(f)|\Gamma_1 &= T_1(f|A_1) \\ T(f)|\Gamma_{\alpha+1} &= T_{\alpha+1}((f - f \circ p_\alpha)|A_{\alpha+1}) \qquad \text{si } \alpha > 0 \end{aligned}$$

Afirmamos que, $T(f) \in c_0(\Gamma)$ para cada $f \in C(K)$. Para ver esto, primero mostraremos que para cada $f \in C(K)$ y $\varepsilon > 0$,

$$\{\alpha : ||(f - f \circ p_\alpha)|A_{\alpha+1}|| \geq \varepsilon\}$$

es finito. Supongamos, por el contrario, que esto es falso. Entonces existe una sucesión $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \lambda$ de ordinales tales que, para cada i, existe un $x_i \in A_{\alpha_i+1} \subseteq A_{\alpha_{i+1}}$ satisfaciendo $|f(x_i) - f(p_{\alpha_i}(x_i))| \geq \varepsilon$. Puesto que K es secuencialmente compacto, podemos asumir que $x_i \to u$ y que $p_{\alpha_i}(x_i) \to v$. Si $j > i$, entonces por el Lema 5.2.23, $p_{\alpha_i} p_{\alpha_j}(x_j) = p_{\alpha_i}(x_j)$. Haciendo tender j a ∞, vemos que $p_{\alpha_i}(v) = p_{\alpha_i}(u)$ para todo i. Por el Teorema 5.2.25, esto ímplica que $\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}(v)$, donde $\mathbf{p}$ es la retracción canónica: $K \to \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\alpha_i}}$. Pero $u, v \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\alpha_i}}$ por lo que $u = \mathbf{p}(u) = \mathbf{p}(v) = v$. Por otro lado, $|f(x_i) - f(p_{\alpha_i}(x_i))| \geq \varepsilon$ ímplica que $|f(u) - f(v)| \geq \varepsilon$, lo cual es contradictorio. Así, $\{\alpha : ||(f - f \circ p_\alpha)|A_{\alpha+1}|| \geq \varepsilon\}$ es finito y como $||T_\alpha|| \leq 1$ resulta que $\{t \in \Gamma_{\alpha+1} : |T_{\alpha+1}((f - f \circ p_\alpha)|A_{\alpha+1})(t)| \geq \varepsilon\}$ es finito. Por esto $T(f) \in c_0(\Gamma)$.

Claramente $T : C(K) \to c_0(\Gamma)$ es lineal, y T es acotada puesto que

$$|T(f)(t)| = |T_{\alpha+1}((f - f \circ p_\alpha)|A_{\alpha+1})(t)| \leq 2||f||$$

para cada $t \in \Gamma_{\alpha+1}$.

Nos queda por demostrar que T es uno-a-uno. Supongamos que $T(f) = 0$. Si logramos demostrar que $f|A_\alpha = 0$ para todo $\alpha < \lambda$, entonces por (ii), tendremos que $f(x_\alpha) = 0$ para todo α, y por consiguiente $f = 0$ por la densidad de $\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Veamos entonces que $f|A_\alpha = 0$. Puesto que $T(f)|\Gamma_1 = 0$ y T_1 es uno-a-uno, resulta que $f|A_1 = 0$. Supongamos que $f|A_\beta = 0$ para todo $\beta < \alpha < \lambda$. Si α es un límite ordinal, entonces f se anula sobre $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ el cual es denso en A_α. Por esto, $f|A_\alpha = 0$. Si $\alpha = \gamma + 1$, entonces $T(f)|\Gamma_{\gamma+1} = 0$ ímplica que $(f - f \circ p_\gamma)|A_\gamma = 0$. Pero $f|A_\gamma = 0$ por la hipótesis inductiva, y así $f \circ p_\gamma = 0$. Por consiguiente, $f|A_{\gamma+1} = f|A_\alpha = 0$. Esto termina la prueba. □

Ahora el teorema de Amir-Lindenstrauss.

Corolario 5.2.27 (Teorema de Amir-Lindenstrauss) *Si X es un espacio de Banach WCG, entonces existen un conjunto Γ y un operador lineal acotado uno-a-uno $T : X \to c_0(\Gamma)$*

Prueba: Puesto que (B_{X^*}, ω^*) es Eberlein compacto, el Teorema 5.2.26 nos garantiza la existencia de un conjunto Γ y un operador lineal acotado uno-a-uno $S : C(B_{X^*}, \omega^*) \to c_0(\Gamma)$, pero como X es un subespacio norma-cerrado de $C(B_{X^*}, \omega^*)$, entonces el operador restricción $T = S|_X$ finaliza la prueba. □

Finalmente deseamos presentar el siguiente resultado también de Amir-Lindenstrauss.

Teorema 5.2.28 (Amir-Lindenstrauss) *Sean X un espacio de Banach WCG y Y un subespacio norma-cerrado y norma-separable de X. Entonces existe un subespacio norma-cerrado y norma-separable Z de X tal que:*

(1) $Y \subseteq Z$, *y*

(2) *existe una proyección lineal acotada P de X sobre Z con $||P|| = 1$.*

Prueba: Sea (x_n) una sucesión en X tal que el subespacio lineal norma-cerrado que ella genera contenga a Y. Sin perder generalidad, podemos suponer que $||x_n|| \leq 1$ y que $x_n \overset{||\,||}{\to} 0$. Sea $E = \{0\} \cup \{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Escojamos ahora un subconjunto débilmente compacto $K \subseteq B_X$ tal que K contenga a E y genere a X. Por el Lema 5.2.20, (K, ω) y (B_{X^*}, ω^*) están apareados. Como E es norma-compacto, entonces el es débilmente compacto y así, débilmente cerrado. Aplíquemos ahora el Teorema 5.2.24 para obtener una pareja conjugada (A, B) de K y B_{X^*} respectivamente tal que $E \subseteq A$ y $\omega(A) \leq \aleph_0$. Sean p y q las retracciones canónicas para (A, B). Entonces q induce una proyección de norma-uno $Q : C(B_{X^*}, \omega^*) \to C(B_{X^*}, \omega^*)$ dada por $Q(f) = f \circ q$ para toda $f \in C(B_{X^*}, \omega^*)$. Pensando a X como un subespacio norma-cerrado de $C(B_{X^*}, \omega^*)$, entonces para $x \in K$ y $x^* \in B_{X^*}$ tenemos que $x\,(x^*) =< x, x^* >$. Por esto y el Lema 5.2.22 resulta que

$$Qx(x^*) =< x, q(x^*) >=< p(x), x^* >= p(x)(x^*),$$

y en consecuencia, $Qx = p(x)$ para cada $x \in K$; es decir $Q|_K = p$. En particular, $Q(K) \subseteq K$. Puesto que K genera a X, se tiene que $Q(X) \subseteq X$. Finalmente, haciendo $P = Q|_X : X \to X$ resulta que P es una proyección de norma-uno de X sobre el subespacio Z generado por $p(K) = A$. Claramente Z es norma-separable y contiene a Y. □

5.2.2 C(Ω) y la CCC

El objetivo central de esta sección es presentar un resultado de H. P. Rosenthal [Ro2] el cual establece que **un espacio de Hausdorff compacto Ω satisface la CCC si y sólo si cualquier subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$ es norma-separable**. Como una consecuencia de ese resultado se obtiene que *en todo espacio Eberlein compacto, metrizabilidad, separabilidad y la CCC son equivalentes.*

Preparativos para el logro del objetivo propuesto es el siguiente lema debido a H. P. Rosenthal [Ro2, p. 226].

Lema 5.2.29 (Rosenthal) *Sea Ω un espacio Hausdorff compacto satisfaciendo la CCC y supongamos que $\mathcal{R}$ es una familia no-numerable de subconjuntos abiertos de Ω. Entonces existe una sucesión infinita (F_n) de miembros distintos de $\mathcal{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Comenzaremos con algunos preliminares necesarios previos a la demostración del lema.

Dada una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω y n un entero positivo, defina

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} F_i : F_i \in \mathcal{A},\ F_i \neq F_j \right\}$$

y

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

Observemos que $\mathcal{A}^*$ es la familia de todas las intersecciones finitas de miembros distintos de $\mathcal{A}$. También es claro que si $\mathcal{A}$ es finita, entonces $\mathcal{A}^*$ posee la misma propiedad; en cualquier caso,

$$card(\mathcal{A}) = card(\mathcal{A}^*).$$

Afirmación 1.

Para cada entero positivo n,

$$(\mathcal{A}_n)_2 \subseteq \mathcal{A}^*_{n+1}.$$

En efecto, sea $C \in (\mathcal{A}_n)_2$. Entonces $C = A \cap B$, donde A y B son miembros distintos de $\mathcal{A}_n$. Escojamos ahora $F_1, \dots, F_n$ y $G_1, \dots, G_n$ en $\mathcal{A}$ tales que

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} F_i \quad \text{y} \quad B = \bigcap_{i=1}^{n} G_i.$$

Puesto que $A \neq B$, deben existir índices i, $1 \leq i \leq n$ tales que $G_i \neq F_j$ para $j = 1, \dots, n$. Sea $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ una enumeración de este conjunto de índices; entonces para cada r con $1 \leq r \leq k$,

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap G_{i_r} \in \mathcal{A}_{n+1},$$

y como

$$A \cap B = \bigcap_{r=1}^{k} (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap G_{i_r}),$$

resulta que $C \in \cap A^{*}_{n+1}$.

Afirmación 2.

Si Ω satisface la CCC y si $\mathcal{A}$ es una familia no-numerable de subconjuntos abiertos de Ω, entonces

(*) *algún miembro no vacío de $\mathcal{A}_2$ está contenido en una colección no-numerable de miembros de $\mathcal{A}$, o $\mathcal{A}_2$ es no-numearble.*

Para ver esto, sea

$$\mathcal{H} = \{F \in \mathcal{A} : \exists G \in \mathcal{A},\ G \neq F,\ G \cap F \neq \emptyset\}.$$

$\mathcal{H}$ es no-numerable. En efecto, esto sigue del hecho de que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{H}$ siendo una familia de conjuntos abiertos y disjuntos dos a dos en Ω, entonces ella es numerable gracias a que Ω satisface la CCC. Ahora, para cada $A \in \mathcal{A}_2$, sea

$$\mathcal{A}_A = \{F \in \mathcal{A} : F \supseteq A\}.$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{H} = \bigcup\{\mathcal{A}_A : A \in \mathcal{A}_2,\ A \neq \emptyset\}.$$

En efecto, si $F \in \mathcal{H}$ entonces existe un $G \in \mathcal{A}$ con $G \neq F$ y tal que $G \cap F \neq \emptyset$. Si ahora tomamos $A = G \cap F$, entonces $A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{A}_2$ y $A \subseteq F$. Así, $F \in \mathcal{A}_A$ y por lo tanto $\mathcal{H} \subseteq \cup\{\mathcal{A}_A \mid A \in \mathcal{A}_2,\ A \neq \emptyset\}$. La otra inclución se prueba de manera análoga.

Si $\mathcal{A}_2$ es numerable, entonces $\mathcal{A}_A$ debe ser no-numerable para algún conjunto no vacío $A \in \mathcal{A}_2$ (en caso contrario $\mathcal{H}$ sería numerable). Esto prueba nuestra segunda afirmación.

Afirmación 3.

(**) *Si $\mathcal{B}$ es una familia no-numerable de subconjuntos abiertos de Ω y n es un entero positivo, entonces existe una familia no-numerable de n-uplas distintas $(B_1, \ldots, B_n)$ en $\mathcal{B}$ (esto es, $B_i \neq B_j$ si $i \neq j$) con $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$.*

Para demostrar esta afirmación, observemos en primer lugar que si algún miembro no vacío $B \in \mathcal{B}^*$ está contenido en una sub-familia no-numerable, digamos $\mathcal{B}'$, de miembros de $\mathcal{B}$, entonces (**) se cumple automáticamente.

En efecto, de ser esto así, $B \in \mathcal{B}_n$ para algún n y en consecuencia $B = F_1 \cap \cdots \cap F_n$, con $F_i \in \mathcal{B}$ y $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Si ahora tomamos $B_i = F_i \cap B'$, donde $B' \in \mathcal{B}'$ y $i = 1, \ldots, n$, entonces $(**)$ se obtiene.

Supongamos entonces que ningún miembro no vacío de $\mathcal{B}^*$ está contenido en una cantidad no-numerable de miembros de $\mathcal{B}$. En esta circunstancia nos proponemos demostrar que $\mathcal{B}_n$ es no-numerable para todo n, de donde obviamente se deriva $(**)$.

$\mathcal{B}_1$ es trivialmente no-numerable. Supongamos que hemos probado que $\mathcal{B}_n$ es no-numerable, pero que $\mathcal{B}_{n+1}$ es numerable. Entonces $\mathcal{B}^*_{n+1}$ es numerable (el tiene la misma cardinalidad que $\mathcal{B}_{n+1}$) y así, por la Afirmación 1, $(\mathcal{B}_n)_2$ también es numerable. Un llamado a la Afirmación 2, nos revela la existencia de un par de conjuntos no vacíos A y B en $\mathcal{B}_n$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B$ está contenido en una colección no-numerable de miembros de $\mathcal{B}_n$. Ahora bien, si $E \in \mathcal{B}_n$ y $A \cap B \subseteq E$, entonces E es una intersección finita de miembros de $\mathcal{B}$, cada uno de los cuales contiene a $A \cap B$. De esto se sigue que $A \cap B$ debe estar contenido en una sub-familia no numerable de miembros de $\mathcal{B}$ y, por supuesto, se tendría que $A \cap B \in \mathcal{B}^*$, lo cual es violatorio del hecho supuesto de que ningún miembro no vacío de $\mathcal{B}^*$ estaba contenido en una sub-familia no-numerable de miembros de $\mathcal{B}$. Esto termina la prueba de la Afirmación 3.

Estamos listos para la demostración del lema.

Prueba del Lema 5.2.29: Sea $\mathcal{R}$ una familia no-numerable de conjuntos abiertos de Ω y para cada n, sea G_n el conjunto de todos los puntos en Ω que están contenidos en a lo sumo n miembros distintos de $\mathcal{R}$. Sea G_n° el interior de G_n y pongamos

$$\mathcal{O}_n = \{F \in \mathcal{R} \mid F \cap G_n^\circ \neq \emptyset\}.$$

Afirmamos que para cada n, $\mathcal{O}_n$ es numerable . En efecto, denotando $\{F \cap G_n^\circ \mid F \in \mathcal{O}_n\}$ por $\mathcal{O}_n \cap G_n^\circ$, tenemos que ningún $n+1$ elementos distintos de $\mathcal{O}_n \cap G_n^\circ$ tienen un punto en común. Invocando a $(**)$, resulta que $\mathcal{O}_n \cap G_n^\circ$ es a lo más numerable. Pero por otro lado, cada miembro de $\mathcal{O}_n \cap G_n^\circ$ está contenido en a lo más n miembros de $\mathcal{O}_n$, y por consiguiente

$$\mathcal{O}_n = \{F \in \mathcal{R} \mid \exists A \in \mathcal{O}_n \cap G_n^\circ \; con \; F \supseteq A\};$$

esto es, $\mathcal{O}_n$ es numerable.

Así, puesto que $\mathcal{O}_n$ es numerable para todo n, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ es también numerable y por lo tanto existe un $F \neq \emptyset$ en $\mathcal{R}$ con $F \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$. Es fácil ver que G_n es cerrado para todo n y así, existe un $s \in F$ con $s \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus G_n^{\circ}$ gracias al Teorema de Categoría de Baire. Entonces $s \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ por la definición de F, lo cual nos asegura que s pertenece a una cantidad infinito-numerable de miembros de $\mathcal{R}$. Fin de la prueba. □

El siguiente lema lo estableceremos sin prueba. Una demostración de este resultado puede verse en [Li, Proposition 3.4 p. 254].

Lema 5.2.30 (Corson) *Sea K un subconjunto convexo, simétrico, débilmente compacto y no-metrizable de un espacio de Banach X. Entonces K contiene un subconjunto homeomorfo, en su topología débil, a la compactificación por un punto de un conjunto no-numerable.*

Veamos ahora uno de los resultados importantes, debido a H. P. Rosenthal [Ro2, p. 229], que caracterizan a los espacios compactos con la CCC.

Teorema 5.2.31 (Rosenthal) *Sea Ω un espacio de Hausdorff compacto. Entonces Ω satisface la CCC si y sólo si cualquier subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$ es norma-separable.*

Prueba: Supongamos en primer lugar que todo subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$ es norma-separable, pero que Ω no sastiface la CCC. Afirmamos que en estas circunstancias existe un conjunto no-numerable Γ tal que $c_0(\Gamma)$ es linealmente isométrico a un subespacio de $C(\Omega)$. En efecto, puesto que Ω no cumple con la CCC podemos elegir una familia no-numerable, digamos $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, de subconjuntos abiertos y disjuntos dos a dos de Ω con $U_\gamma \neq U_{\gamma'}$ si $\gamma \neq \gamma'$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Ahora bien, como Ω es completamente regular, para cada $\gamma \in \Gamma$ podemos escoger una $f_\gamma \in C(\Omega)$ satisfaciendo

$$||f_\gamma||_\infty = 1 \quad \text{y} \quad f_\gamma \equiv 0 \quad \text{sobre} \quad \Omega \setminus U_\gamma.$$

Sea X el subespacio lineal cerrado generado por $\{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Es fácil ver que X es linealmente isométrico a $c_0(\Gamma)$ y, por supuesto, $\{0\} \cup \{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ es un subconjunto (norma-compacto y en consecuencia) débilmente compacto y sin ser norma-separable en $C(\Omega)$.

Para la otra implicación, supongamos que Ω satisface la CCC, pero que existe un subconjunto débilmente compacto de $C(\Omega)$ que no es norma-separable. Por el Teorema de Krein-Šmulian, $K_1 = \overline{co}(K \cup -K)$ es un subconjunto convexo, simétrico, débilmente compacto y no-separable de $C(\Omega)$. Por el Lema 5.2.30, K_1 contiene un subconjunto homeomorfo, en su toplogía débil, a la compactificación por un punto de un conjunto no-numerable. Esto significa, en virtud de la simetría de K_1, que existe un conjunto no-numerable $\Gamma_1 \subseteq K_1$, cuyos elementos son distintos del cero, tal que cualquier sucesión de elementos distintos de Γ_1 converge débilmente a cero. De allí que podemos elegir un $\delta > 0$ tal que $\Gamma = \{\gamma \in \Gamma_1 : ||\gamma|| > \delta\}$ es no-numerable, puesto que $\Gamma_1 = \cup_{n=1}^{\infty}\{\gamma \in \Gamma_1 : ||\gamma|| > 1/n\}$.

Ahora, para cada $\gamma \in \Gamma$, sea

$$U_\gamma = \{\omega \in \Omega : |\gamma(\omega)| > \delta/2\}.$$

Afirmamos que existe una sucesión infinita $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ de miembros distintos de Γ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\gamma_n} \neq \emptyset.$$

En efecto, si $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ es numerable el resultado es obvio; el otro caso sigue del Lema 5.2.29. Ahora, $\gamma_n \to 0$ débilmente, por lo que $\gamma_n(\omega) \to 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Pero escogiendo $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} U_{\gamma_n}$ resulta que $|\gamma_n(\omega)| > \delta/2$ para todo n, lo que constituye una contradicción. Esto termina la prueba. $\square$

Veamos ahora algunas consecuencias del teorema anterior.

Corolario 5.2.32 (Rosenthal) *Si Ω es un Eberlein compacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Ω es metrizable.*

(2) *Ω es separable.*

(3) *Ω satisface la CCC.*

Prueba: Claramente (1) ímplica (2) y (2) ímplica (3). Veamos que (3) ímplica (1). En efecto, por el Teorema 5.2.13, $C(\Omega)$ es WCG; es decir, $C(\Omega)$ es generado por algún subconjunto débilmente compacto $K \subseteq C(\Omega)$. Pero por el Teorema 5.2.31, K es norma-separable y en consecuencia $C(\Omega)$ es norma-separable. Un llamado al Teorema 5.2.15 nos revela que Ω es metrizable. □

Corolario 5.2.33 (Rosenthal) *Si K es un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach X satisfaciendo la CCC, entonces K es norma-separable.*

Prueba: Por el Corolario 5.2.10, (K, ω) es un Eberlein compacto satisfaciendo además, la CCC. El resultado sigue del Corolario 5.2.32. □

Ya hemos visto en dos ocaciones que si μ es una medida finita, entonces cualquier subconjunto débilmente compacto de $L_\infty(\mu)$ es norma-separable. El Teorema 5.2.31 también produce ese resultado. En efecto, es bien conocido que $L_\infty(\mu)$ es linealmente isométrico a $C(\Omega)$, donde Ω es el espacio stoniano del algebra medida de μ (ver [La, p. 121]), y la finitud de μ nos garantiza que Ω satisface la CCC.

5.2.3 BOLAS CCC, POLACAS Y ČECH-COMPLETAS

En esta sección estudiaremos varias propiedades topológicas sobre la bola unitaria cerrada de un espacio de Banach, en su topología débil, y las posibles relaciones entre ellas. Casi todo el material de esta sección provienen de [Wh2], [EW], y [Nam].

Comenzaremos, dado un espacio de Banach X, con las siguientes observaciones:

1º.) $(X, norma)$ **es separable si y sólo si** $(B_X, norma)$ **es separable.**

2º.) **Si** $(X, norma)$ **satisface la CCC, entonces** (B_X, ω) **satisface la CCC.**

¿ Qué ocurre si remplazamos la topología de la norma por la topología débil en el segundo caso?. ¿Será cierto que (B_X, ω) satisfacerá la CCC?

Ya hemos visto (HECHO 6 de la sección anterior) que (X, ω) siempre satisface la CCC; sin embargo, no siempre (B_X, ω) corre con la misma suerte.

En efecto, G. Edgar ha observado que para $X = \ell_1(\Gamma)$, Γ no-numerable, los conjuntos

$$U_\gamma = \{x \in B_X \mid x_\gamma > 1/2\}$$

forman una familia no-numerable y dos a dos disjunta de subconjuntos abiertos de (B_X, ω).

Definición 5.2.34 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que:*

1.) X tiene **bola CCC** *si (B_X, ω) satisface la CCC.*

2.) X tiene **bola Polaca** *si (B_X, ω) es Polaco.*

3.) X tiene **bola Čech-completa** *si (B_X, ω) es Čech-completo.*

Claramente todo espacio de Banach con bola Polaca tiene ambas, bola CCC y bola Čech-completa.

La conexión entre los espacios de Banach con bola CCC y la teoría de operadores fue descubierta por R. Wheeler en [Wh1].

Definición 5.2.35 *Un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de Dunford-Pettis-Phillips** *si para cualquier espacio de Banach Y, todo operador débilmente compacto $T : X \to Y$ tiene rango norma-separable.*

La definición de la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips está, por supuesto, modelada sobre el hecho clásico de que $L_1(\mu)$, μ σ-finita, satisface dicha propiedad ([DU, p. 75]. Claramente, cualquier espacio de Banach norma-separable tiene la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips.

Comenzaremos con un hecho simple que relaciona la condición de cadena numerable con la propidad de Dunford-Pettis-Phillips.

Lema 5.2.36 (Wheeler) *Sea X un espacio de Banach.*

(1) *Si X tiene bola CCC, entonces X tiene la propiedad de Dunfford-Pettis-Phillips.*

(2) *Si X es reflexivo, entonces X tiene bola CCC si y sólo si X tiene la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips si y sólo si X es norma-separable.*

Prueba: (1) Supongamos que (B_X, ω) satisface la CCC, y sea Y un espacio de Banach tal que $T : X \to Y$ es débilmente compacto. Entonces la débil clausura de $T(B_X)$ es débilmente compacto y en consecuencia, por el Corolario 5.2.14, un Eberlein compacto satisfaciendo además la CCC. Un llamado al Corolario 5.2.32 nos revela que dicho conjunto es norma-separable. Por esto T tiene rango norma-separable.

(2) Si X es reflexivo y posee la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips, entonces X es norma-separable. En efecto, puesto que X es reflexivo, la injección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobrejectiva y claramente débilmente compacto. Así, X^{**} es norma-separable, por lo que X es norma-separable.

Por otro lado, es obvio que si X es norma-separable, entonces (B_X, ω) satisface la CCC. □

Veamos ahora una caracterización dual de espacios de Banach con bola CCC y la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips. El próximo resultado generaliza el hecho ya establecido de que si X es un espacio de Banach norma-separable, entonces cualquier subconjunto débilmente compacto de X^* es norma-separable.

Teorema 5.2.37 (Wheeler) *Sea X un espacio de Banach.*

(1) X tiene la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips si y sólo si cualquier subconjunto débilmente compacto de X^* es norma-separable.

(2) X tiene bola CCC si y sólo si cualquier subconjunto débilmente compacto de $C(B_{X^{**}}, \omega^*)$ es norma-separable.

Prueba: (1) Supongamos que X tiene la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips, y sea K un subconjunto débilmente compacto de X^*. Si definimos

$$T : X \to C(K)$$

por $(Tx)(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y $x^* \in K$, resulta que T es lineal y continuo. Veamos que T es débilmente compacto. En efecto, puesto que $T(B_X) \subseteq B_{X^{**}}|_K$ y $B_{X^{**}}|_K$ es norma-acotado y puntualmente convergente, entonces él es débilmente compacto en $C(K)$ (Lema 5.2.11). De aquí se deduce que T es débilmente compacto. Ya que X tiene la propiedad de Dunford-Pettis-Phillips se concluye que $T(X)$ es norma-separable. Escojamos una sucesión (x_n) en X tal que $\{Tx_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ sea norma-denso en $T(X)$. Es fácil ver ahora que sobre K, las topologías de la convergencia puntual sobre (Tx_n), la débil y la débil * coinciden. Por esto K es norma-separable.

Ahora asumamos que cualquier subconjunto débilmente compacto de X^* es norma-separable. Sea Y un espacio de Banach y suponga que $T : X \to Y$ es un operador débilmente compacto con $T(X)$ norma-denso en Y. Como T^* es también débilmente compacto, resulta que $T^*(B_{Y^*})$ es débilmente compacto en X^* y así, por hipótesis, norma-separable. Pero al ser también T^* uno-a-uno entonces tenemos que $T^*{}_{|(B_{Y^*},\omega)}$ es un homeomorfismo. Esto lo que nos está diciendo es que (B_{Y^*},ω) es también norma-separable y así, Y es norma-separable.

(2) Puesto que (B_X,ω) es denso en $(B_{X^{**}},\omega^*)$ y como la propiedad CCC se cumple o falla simultaneamente para ambos, entonces el resultado sigue del Teorema 5.2.31. □

Ya sabemos que en espacios Eberlein compactos las tres condiciones:

(1) separabilidad,

(2) metrizabilidad y

(3) la CCC,

son equivalentes. Muy pronto veremos que si X es un espacio de Banach con bola Čech-completa, entonces lo mismo se cumple para cualquier subconjunto norma-acotado y débilmente cerrado de X provisto de la topología débil.

Una generalización de lo anterior y una sorprendente conexión entre la CCC y la propiedad de Radon-Nikodym será establecida en lo inmediato. Necesitaremos, sin embargo, algunos preparativos para abordar una definición geométrica de la propiedad de Radon-Nikodym.

Definición 5.2.38 *Un subconjunto norma-acotado no vacío D en un espacio de Banach X se llama* **dentable** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $x \in D$ tal que*

$$x \notin \overline{co}(D \setminus U_\varepsilon(x)).$$

D se llama **hereditariamente dentable** *si cualquier subconjunto no vacío de D es dentable.*

Es bien conocido que *cualquier subconjunto débilmente compacto en un espacio de Banach es hereditariamente dentable* [DU, p. 138].

También recordemos que una **rebanada abierta** de D es un subconjunto no vacío de D de la forma

$$S(D, x^*, r) = \{x \in D \mid x^*(x) > r\},$$

donde $x^* \in X^*$ y $r \in \mathbf{R}$.

Lema 5.2.39 *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto norma-acotado D de X es dentable si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una rebanada abierta de D cuyo diámetro es menor que ε.*

Prueba: Supongamos que D es dentable y sea $\varepsilon > 0$. Escojamos un $x \in D$ tal que $x \notin \overline{co}(D \setminus U_\varepsilon(x))$. Un llamado al teorema de Hanh-Banach nos garantiza la existencia de un $x^* \in B_{X^*}$ y de algún $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$x^*(x) > \lambda > \sup\{x^*(z) \mid z \in \overline{co}(D \setminus U_\varepsilon(x)\}.$$

Sea $r = \sup\{x^*(z) \mid z \in D\} - \lambda$. Es fácil chequear que $S(D, x^*, r) \subseteq U_\varepsilon(x) \cap D$ y, por supuesto, $diam(S(D, x^*, r)) \leq 2\varepsilon$.

Reciprocamente, suponga que $\varepsilon > 0$ es dado y sea $S(D, x^*, r)$ una rebanada abierta de D con diámetro menor ε. Si $x \in S(D, x^*, r)$, entonces

$$\overline{co}(D \setminus U_\varepsilon(x)) \subseteq \overline{co}(D \setminus S(D, x^*, \alpha)) \subseteq (x^*)^{-1}(-\infty, \alpha]$$

donde $\alpha = \sup\{x^*(z) \mid z \in D\} - r$. Ya que $x^*(x) > \alpha$ se sigue que $x \notin \overline{co}(D \setminus U_\varepsilon(x))$ y concluye la prueba. □

Una de los estudios más profundo e interesantes que se han hecho sobre los espacios de Banach en las dos últimas decadas, es la que concierne a la así llamada *propiedad de Radon-Nikodym.* Los atractivos y fascinantes textos de Diestel-Uhl Jr. [DU] y R. D. Bourgin [Bo] son, por excelencia, dos de las mejores fuentes de información para conocer de tales espacios.

Definición 5.2.40 *Sea K un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach X. Se dice que K tiene la* **propiedad de Radon-Nikodym** *si para cualquier espacio de medida finita (Ω, Σ, μ), cualquier medida vectorial $m : \Sigma \to X$ la cual es numerablemente aditiva, μ-continua, de variación acotada y con μ-rango promedio*

$$\{m(E)/\mu(E) \mid E \in \Sigma,\ \mu(E) > 0\} \subseteq K,$$

existe una función Bochner-integrable $f : \Omega \to X$ *tal que*

$$m(E) = \int_E f\, d\mu \quad \text{para todo} \quad E \in \Sigma.$$

Un espacio de Banach X *tiene la* **propiedad de Radon-Nikodym** *si cualquier subconjunto convexo, cerrado y acotado tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Entre las muchísimas caracterizaciones equivalentes que se han dado de los espacios de Banach que poseen la propiedad de Radon-Nikodym, nos conviene la siguiente [DU, p. 136].

Definición 5.2.41 *Sea* X *un espacio de Banach. Diremos que* X *tiene la* **propiedad de Radon-Nikodym** *si cada subconjunto norma-acotado de* X *es dentable.*

El siguiente resultado, el cual generaliza el Corolario 5.2.33, es la clave entre la conexión de la propiedad de Radon-Nikodym con la CCC.

Teorema 5.2.42 (Schachermayer) *Sean* X *un espacio de Banach y* $B \subseteq X$ *hereditariamente dentable. Si* (B, ω) *satisface la CCC, entonces* B *es norma-separable.*

Prueba: Supongamos que B no es norma-separable. Entonces *existe un* $\varepsilon > 0$ *con la propiedad de que para cada subconjunto norma-separable* K *de* B*, existe un* $x \in B$ *tal que* $dist(x, K) = \inf\{||x - k|| : k \in K\} > \varepsilon$.

Veamos esto. Supongamos, por el contrario, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto norma-separable $K_\varepsilon \subseteq B$ tal que $dist(x, K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ para todo $x \in B$. Para cada $x \in B$, escojamos un $k_x \in K_\varepsilon$ tal que

$$||x - k_x|| < \varepsilon/2.$$

Sea $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión norma-densa en K_ε, y para cada k_x, determine un $k_{n(x)} \in (k_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$||k_x - k_{n(x)}|| < \varepsilon/2.$$

Claramente $||x - k_{n(x)}|| < \varepsilon$ y en consecuencia, la subsucesión $(k_{n(x)})$ de (k_n) es norma-densa en B; es decir, B es norma-separable. Absurdo.

De lo antes expuesto se concluye, para el ε hallado anteriormente, que *si* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *es cualquier familia disjunta y numerable de subconjuntos de* B *con* $diam(K_n) < \varepsilon$, *para todo* n, *entonces la cápsula convexa cerrada de esa familia no puede cubrir a* B*; esto es,*

$$B \not\subseteq \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right).$$

Supongamos, por el contrario, que existe una familia numerable y disjunta dos a dos $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de B tal que para todo n,

$$diam(K_n) < \varepsilon \quad \text{pero que} \quad B \subseteq \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right).$$

Sea $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Es claro que $K \subseteq B$ es norma-separable (tomando uno y sólo un punto x_n en cada K_n, resulta que $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión norma-densa en K). Por lo establecido en la primera parte, existe un $x \in B$ tal que $dist(x, K) > \varepsilon$. Por otro lado, es conocido y fácil de establecer que $dist(x, K) = dist(x, \overline{co}(K))$, lo cual es contradictorio, pues $x \in \overline{co}(K)$.

Bajo estas condiciones es ahora posible definir, por inducción transfinita, una colección no-numerable $(G_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de subconjuntos abiertos y disjuntos dos a dos de (B, ω) (ω_1 denota el primer ordinal no-numerable), lo cual será violatorio del hecho de que (B, ω) satisface la CCC.

Comencemos con $\alpha = 0$. Sea G_0 una rebanada abierta de B con diámetro menor que ε (esto es posible ya que B es dentable). Supongamos ahora que, para $\beta < \omega_1$, hemos escogidos subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos $(G_\alpha)_{\alpha<\beta}$ de (B, ω), cada uno de ellos con diámetro menor que ε. Sea

$$C_\beta = \overline{co}\left(\bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha\right).$$

Puesto que $(G_\alpha)_{\alpha<\beta}$ es una familia numerable y disjunta de subconjuntos de X con $diam(G_\alpha) < \varepsilon$, para cada $\alpha < \beta$, entonces se sigue de nuestra suposición que debe existir algún $x_\beta \in B \setminus C_\beta$. Por el Teorema de Hahn-Banach, alguna rebanada abierta B_β de B contiene a x_β y es disjunta de C_β. Por hipótesis, B_β es dentado, y así existe una rebanada abierta no vacía G_β de B_β de la forma $\{x \in B_\beta \mid x_\beta^*(x) > r_\beta\}$, con diámetro menor que ε. Es claro que G_β es abierto en (B, ω) completándose así el proceso inductivo y con ello una contradicción, ya que (B, ω) satisface la CCC. □

Estamos ahora en posición de establecer y probar el sorprendente resultado de R. Wheeler [Wh, p. 259].

Corolario 5.2.43 (Wheeler) *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces X tiene bola CCC si y sólo si X es norma-separable.*

Prueba: Si X es norma-separable, entonces claramente (B_X, ω) satisface la CCC. Reciprocamente, puesto que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, B_X es hereditariamente dentable y el resultado sigue ahora del Teorema 5.2.42. □

Un resultado un poco más general que el corolario anterior se obtiene si uno remplaza la propiedad de Radon-Nikodym por la de (PC). Esto lo veremos al final de esta sección.

Una definición que nos será de gran utilidad en lo que sigue es la que concierne a los así llamados espacios de Asplund. Una referencia obligada es el libro de J. R. Giles [Gi].

Definición 5.2.44 *Un espacio de Banach X se llama un* **espacio de Asplund** *si cualquier subespacio norma-separable de X tiene un dual norma-separable.*

Es bien conocido que X es un espacio de Asplund si y sólo si X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym [DU, p. 213]. Ejemplos de tales espacios incluyen a los reflexivos, c_0 y, en general, espacios de Banach cuyos duales son norma-separables [DU, p. 79].

A continuación veremos que todo espacio de Banach cuyo dual es WCG es de Asplund.

Teorema 5.2.45 (Johnson-Stegall) *Sea X un espacio de Banach. Si X^* es WCG, entonces X es de Asplund.*

Prueba: Sea Y un subespacio norma-separable de X. Puesto que Y^* es isométricamente isomorfo a $X^*/Y^\perp$, donde como siempre $Y^\perp$ viene dado por $Y^\perp = \{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in Y\}$, entonces resulta del Corolario 5.2.4 que Y^* es WCG. Sea ahora K un subconjunto débilmente compacto de Y que genera a Y. Puesto que Y es norma separable, entonces K es también norma-separable [véase la observación después del HECHO 3] y así, Y^* es norma-separable. Esto termina la prueba. □

Otra prueba del resultado anterior será exhibida en la próxima sección.

Nuestro próximo objetivo será analizar las relaciones entre espacios de Banach con bolas Polacas y Čech-completas. Entre otras cosas se probarán que un espacio de Banach X tiene bola Polaca si y sólo si X es norma-separable y tiene bola Čech-completa. También, si X tiene bola Čech-completa, entonces tanto X como X^* son WCG y (X^{**}, ω) es realcompacto.

Lema 5.2.46 (Edgar-Wheeler) *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *(B_X, ω) es Čech-completo.*

(2) *X es un conjunto G_δ en (X^{**}, ω^*).*

(3) *$B_{X^{**}} \setminus B_X$ es ω^* σ-compacto.*

(4) *$X^{**} \setminus X$ es ω^* σ-compacto.*

Prueba: (1) $\Rightarrow$ (2). Si (B_X, ω) es Čech-completo, entonces el Teorema 2.7.2 nos asegura que B_X es un conjunto G_δ en $\beta B_X = (B_{X^{**}}, \omega^*)$. Puesto que toda unión numerable de conjuntos G_δ es un G_δ se sigue que X es un conjunto G_δ en (X^{**}, ω^*).

(2) $\Rightarrow$ (3). Si X es un conjunto G_δ en (X^{**}, ω^*), entonces claramente B_X es un conjunto G_δ en $(B_{X^{**}}, \omega^*)$. Expresemos a B_X como $B_X = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, donde cada G_n es un ω^*-abierto en $B_{X^{**}}$. Ahora,

$$\begin{aligned} B_{X^{**}} \setminus B_X &= B_{X^{**}} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{X^{**}} \setminus G_n) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

donde $K_n = B_{X^{**}} \setminus G_n$ es ω^*-compacto. Esto es, $B_{X^{**}} \setminus B_X$ es ω^* σ-compacto.

Las restantes implicaciones son similares y se dejan al lector. □

Por lo general, si X es un espacio de Banach norma-separable su dual, X^*, no siempre preserva esa propiedad.. Sin embargo, si X tiene bola Čech-completa, entonces se obtiene:

Lema 5.2.47 (Edgar-Wheeler) *Si X es un espacio de Banach norma-separable con bola Čech-completa, entonces X^* es norma-separable.*

Prueba: Por el Lema 5.2.46, podemos escribir $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, donde cada G_n es un subconjunto ω^*-abierto de X^{**}. Puesto que $0 \in G_n$ para todo n, entonces cada G_n contiene un ω^*-entorno básico del 0, determinado por un conjunto finito F_n en X^*. Ya que X es norma-separable, (X^*, ω^*) es también separable. Sea D un subconjunto denso numerable de (X^*, ω^*), y sea Y el subespacio lineal cerrado generado por $D \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ en X^*. Por supuesto, Y es norma-separable. Es fácil ver que el aniquilador $Y^{\perp}$ de Y es un subconjunto de cada G_n; esto es,

$$Y^{\perp} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X$$

y no contiene ningún miembro distinto del 0 de X. Así, $Y^{\perp} = \{0\}$, por lo que $Y = X^*$ y con ello se obtiene que X^* es norma-separable. □

Amparándonos en el resultado anterior, tres consecuencias inmediatas se derivan de él:

Corolario 5.2.48 *Sea X un espacio de Banach. Si todo subespacio norma-separable de X tiene bola Čech-completa, entonces X es un espacio de Asplund.*

Corolario 5.2.49 *Sea X un espacio de Banach con bola Čech-completa. Entonces X^* es norma-separable si y sólo si el es ω^*-separable.*

Corolario 5.2.50 (Edgar-Wheeler) *Un espacio de Banach X tiene bola Polaca si y sólo si X es norma-separable y tiene bola Čech-completa.*

Prueba: Supongamos que X es norma-separable con bola Čech-completa. Por el Lema 5.2.47 se tiene que X^* es norma-separable. Un llamado al HECHO 3 nos revela que (B_X, ω) es metrizable; esto es, (B_X, ω) es Čech-completo, separable y metrizable. El resultado sigue ahora del Teorema 2.7.4.

La otra implicación es trivial. □

El siguiente teorema de factorización para espacios de Banach con bola Čech-completa reduce el estudio de tales espacios al caso separable, donde las propidades especiales de los espacios polacos se pueden utilizar para sacarle provecho a dichos espacios. Parece entonces claro que en el contexto de la teoría de los espacios de Banach, el concepto de espacios de Banach con bola Polaca es el más fundamental. Un estudio más profundo y general de lo que aquí hemos expuesto puede ser consultado en [Ro3]

Teorema 5.2.51 (Edgar-Wheeler) *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X tiene bola Čech-completa.

(2) X es isomorfo a la suma directa $R \oplus S$, donde R es reflexivo y S tiene bola Polaca.

Prueba: (2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que (2) se cumple. Puesto que el producto numerable de espacios Čech-completos sigue siendo Čech-completo (EJEMPLO I (3) en la sección sobre espacios Čech-completos), entonces $(B_R, \omega) \times (B_S, \omega)$ es Čech-completo. Pero como (X, ω) es topológicamente isomorfo a $(R, \omega) \times (S, \omega)$, resulta que (B_X, ω) es homeomorfo a un subconjunto cerrado del espacio Čech-completo $(B_R, \omega) \times (B_S, \omega)$ y en consecuencia, el es Čech-completo gracias al EJEMPLO I (4) de la sección sobre espacios Čech-completos.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos ahora que X tiene bola Čech-completa. Por el Lema 5.2.46, X puede ser escrito en la forma $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, donde cada U_n es un subconjunto abierto de (X^{**}, ω^*). Cada U_n contiene un ω^*-entorno básico del 0, determinado por un conjunto finito F_n en X^*. Sea G el subespacio lineal norma-cerrado de X^* generado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Tenemos entonces que

G es norma-separable. Observemos ahora que como $G^{\perp}$ es un subespacio ω^*-cerrado de X^{**} y además,

$$G^{\perp} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = X$$

entonces $G^{\perp}$ es reflexivo (véase la parte final de la **Sección 5.1**).

Sea $R_1 = G^{\perp}$. Puesto que $(X/R_1)^* = R_1^{\perp} = G$ es norma-separable, X/R_1 también es norma-separable. Sea $\pi : X \to X/R_1$ la aplicación cociente de X sobre X/R_1. Entonces existe un subespacio norma-separable S_1 de X tal que $\pi(S_1) = X/R_1$ y en consecuencia, $X = R_1 + S_1$. Tome ahora una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ norma-densa en S_1 con $s_n \neq 0$ para todo n, y sea

$$K = \left\{ \frac{1}{n\,||s_n||} s_n \mid n = 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}.$$

Claramente $B_{R_1} + K$ es un subconjunto débilmente compacto de X cuyo subespacio lineal norma-cerrado coincide con X; es decir, X es WCG. Por el Teorema 5.2.28, existe un subespacio norma-cerrado y norma-separable S de X tal que $S_1 \subseteq S$ y S es complementado en X. De aquí se deduce que X es isomorfo a $R \oplus S$, donde $R = X/S = (X/S_1)/(S/S_1)$. Pero como X/S_1 es un cociente de R_1, resulta que también R es un cociente de R_1 y por lo tanto R es reflexivo. Finalmente, ya que S es norma-separable y tiene bola Čech-completa, el Corolario 5.2.50 nos asegura que S tiene bola Polaca. □

Ejecutando la prueba del teorema anterior se demostró que si X es un espacio de Banach con bola Čech-completa, entonces X es WCG. Más aún, puesto que $X = R \oplus S$ con R reflexivo y S con bola Polaca, entonces $X^* = R^* \oplus S^*$ es también WCG. En efecto, como S tiene bola Polaca, el Corolario 5.2.37 nos dice que S tiene bola Čech-completa y puesto que S es también norma-separable, el Lema 5.2.36 nos asegura que S^* es norma-separable. Finalmente, como R^* es reflexivo, el Teorema 5.2.51 nos confirma que X^* es WCG.

Esta observación más el Corolario 5.2.14 conllevan al siguiente

Corolario 5.2.52 *Si X es un espacio de Banach con bola Čech-completa, entonces tanto X como X^* son WCG. En particular, (B_{X^*}, ω^*) y $(B_{X^{**}}, \omega^*)$ son Eberlein compactos.*

Este corolario en combinación con el Teorema 5.2.45 prueban que:

Corolario 5.2.53 *Si X es un espacio de Banach con bola Čech-completa, entonces X es un espacio de Asplund.*

La continuación de nuestro estudio sobre espacios de Banach con bola Čech-completa nos lleva a la siguiente:

Definición 5.2.54 *Sean (K, τ) un espacio de Hausdorff y ρ una métrica sobre K. La topología de la métrica inducida por ρ no tiene necesariamente que ser comparable con la de τ. Diremos que el espacio (K, τ) es* **ρ-fragmentable** *si, para cada subconjunto no vacío A de K y cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto τ-abierto U de K tal que*

$$U \cap A \neq \emptyset \quad y \quad \rho - diam(U \cap A) < \varepsilon.$$

Si X es un espacio de Banach, $K \subseteq X$ no vacío y (K, ω) es fragmentable por la métrica de la norma, entonces diremos que (K, ω) es **norma-fragmentable**.

Recordemos que un espacio de Hausdorff se dice *hereditariamente de Baire* si cada subconjunto cerrado es un espacio de Baire con respecto a la topología relativa. El siguiente resultado es tomado de [Nam].

Lema 5.2.55 (Namioka) *Sea (K, τ) un espacio hereditariamente de Baire, y sea ρ una métrica sobre K. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El espacio (K, τ) es ρ-fragmentable.*

(2) *Para cada subconjunto no vacío y cerrado A de K, existe un punto de continuidad de la aplicación identidad $id : (A, \tau) \to (A, \rho)$.*

(3) *Para cada subconjunto cerrado A de (K, τ), el conjunto de puntos de continuidad de la aplicación identidad $id : (A, \tau) \to (A, \rho)$ es un subconjunto G_δ-denso de (A, τ).*

Prueba: Claramente (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Para ver que (1) $\Rightarrow$ (3), es suficiente considerar la aplicación identidad $id : (K, \tau) \to (K, \rho)$. Sea $\varepsilon > 0$, y sea

$$O_\varepsilon = \{U \subseteq K : U \text{es } \tau\text{-abierto y} \rho - diam(U) < \varepsilon\}.$$

Obviamente O_ε es τ-abierto. Veamos que O_ε es τ-denso en K. En efecto, sea V un subconjunto no vacío y τ-abierto de K. Puesto que (K,τ) es ρ-fragmentado, existe un subconjunto τ-abierto W de K con $\rho-diam(W \cap V) < \varepsilon$. Por esto $\emptyset \neq W \cap V \subseteq V \cap O_\varepsilon$. Ahora bien, como (K,τ) es un espacio de Baire

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_{1/n}$$

es conjunto G_δ y τ-denso en K y claramente dicho conjunto constituye el conjunto de todos los puntos de continuidad de la aplicación identidad id. □

Aplicaciones del lema anterior vienen de inmediato. Comenzamos con una definición.

Definición 5.2.56 *Un espacio de Banach X se dice que tiene la* **propiedad (PC)** *si para cualquier subconjunto norma-acotado y débilmente cerrado K de X, la aplicación identidad $id : (K,\omega) \rightarrow (K, norma)$ tiene al menos un punto de continuidad.*

El término PC, en la definición anterior, proviene de *"point of continuity"*. Observemos que si x es punto de continuidad de la aplicación identidad $id : (K,\omega) \rightarrow (K, norma)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno débil U de x tal que el diámetro de $U \cap K$ es menor que ε.

Teorema 5.2.57 (Edgar-Wheeler) *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *X tiene la propiedad (PC).*

(2) *Cualquier subconjunto norma-acotado y débilmente cerrado de X es norma-fragmentable.*

(3) *Cualquier subconjunto norma-acotado y débilmente cerrado de X es un espacio de Baire.*

Prueba: Consecuencia inmediata de Lema 5.2.55. □

Corolario 5.2.58 *Sea X es un espacio de Banach.*

(1) *Si X tiene bola Čech-completa, entonces X tiene la propiedad (PC).*

(2) *Si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces X tiene la propiedad (PC).*

Prueba: (1) Puesto que X tiene bola Čech-completa, entonces cualquier subconjunto norma-acotado y débilmente cerrado de X es también Čech-completo (recuerde que Čech-completitud es hereditaria por subespacios cerrado) y, en consecuencia, un espacio de Baire. El resultado sigue ahora del Teorema 5.2.57.

(2) Suponga que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces cualquier subconjunto norma-acotado de X es dentable y claramente tales conjuntos son norma-fragmentables. Aplique el Teorema 5.2.57. □

Finalizaremos esta sección con dos resultados. El primero es una generalización del Corolario 5.2.43, mientras que el último es un análogo al Corolario 5.2.32.

Teorema 5.2.59 (Edgar-Wheeler) *Sea X un espacio de Banach con la propiedad (PC). Entonces X tiene bola CCC si y solamente si X es norma-separable.*

Prueba: La prueba procede casi de manera idéntica a la del Teorema 5.2.42, teniendo en cuenta que como X tiene la propiedad (PC), (B_X, ω) es norma-fragmentable. □

Teorema 5.2.60 (Edgar-Wheeler) *Sean X un espacio de Banach y A un subconjunto norma-acotado y débilmente cerrado de X. Si X tiene bola Čech-completa, entonces las siguientes condiciones sobre (A, ω) son equivalentes:*

(1) *separabilidad,*

(2) *metrizabilidad, y*

(3) *la CCC.*

Prueba: (1) $\Rightarrow$ (3) es cierta por el Teorema 2.3.3. La prueba de (3) $\Rightarrow$ (1) es similar a la del Teorema 5.2.42.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea Y el subespacio lineal norma-cerrado generado por A. Entonces Y tiene bola Polaca y así, A es metrizable.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea d una métrica para (A, ω). Si A no es separable, entonces existen un conjunto no-numerable $(a_i)_{i \in I}$ en A y un $\varepsilon > 0$ tal que $d(a_i, a_j) > \varepsilon$ para $i \neq j$. Por el Teorema 5.2.51, $X = R \oplus S$ donde R es reflexivo y S es norma-separable. Sea $a_i = r_i + s_i$ para todo $i \in I$, donde $r_i \in R$ y $s_i \in S$. Ya que S es norma-separable, existe una red (s_{i_λ}) que converge en norma (es posible que s_{i_λ} sea constante). Pero como R es reflexivo, tomando una subred se obtiene que $(a_i)_{i \in I}$ tiene un débil-punto clausura en A. Imposible. $\square$

5.2.4 GENERALIZACIONES DE ESPACIOS WCG

En esta sección estudiaremos varias clases de espacios de Banach mucho más generales que los espacios WCG. La mejor referencia para el conocimiento de estos espacios y una buena justificación para su estudio lo constituye el artículo de G. A. Edgar [Ed2].

Si X es un espacio de Banach, escribiremos $Bo(X, \omega)$ y $Ba(X, \omega)$ para denotar las σ-algebras de Borel y de Baire, respectivamente, sobre (X, ω).

Definición 5.2.61 *Sea X un espacio de Banach. Diremos que*

(1) *X es* **débilmente Lindelöf** *si la topología débil sobre X es Lindelöf.*

(2) *X es* **débilmente medida-compacto** *si la topología débil sobre X es medida-compacto.*

(3) *X es* **débilmente realcompacto** *si la topología débil sobre X es realcompacto.*

(4) *X tiene la* **propiedad (C)** *si cualquier colección de subconjuntos convexos y cerrados de X con la propiedad de intersección numerable tiene intersección no vacía.*

(5) *X es* **débilmente $\mathcal{K}$-analítico** *(respectivamente,* **débilmente numerablemente determinado***) si la topología débil sobre X es $\mathcal{K}$-analítico (respactivamente, débilmente numerablemente determinado).*

(6) *(X^*, ω^*) se llama* **angelical** *si cualquier conjunto norma-acotado S de X^* es secuencialmente denso en su ω-clausura; esto es, para cada $x^* \in$*

$\overline{S}^{\omega^*}$ *existe una sucesión* (x_n^*) *en* S *tal que* $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$.

(7) X *satisface la* **condición de Mazur** *si cada funcional lineal sobre* X^* *el cual es secuencialmente continuo sobre* (B_{X^*}, ω^*) *es* ω^**-continuo sobre* X^*.

He aquí algunas relaciones ya establecidas entre las distintas definiciones dadas arriba.

Todo espacio de Banach débilmente $\mathcal{K}$-analítico (débilmente numerablemente determinado) es débilmente Lindelöf (*Teorema 3.3.3* **). Todo espacio de Banach débilmente Lindelöf es medida-compacto (***Teorema 4.3.7***). Todo espacio de Banach débilmente medida-compacto es débilmente realcompacto (***por definición***). También es claro que todo espacio de Banach débilmente Lindelöf tiene la propiedad (C) (***véase la Observación 1 (a) que sigue después de la definición de espacios de Lindelöf***) y que espacios de Banach con la propiedad (C) son débilmente realcompactos. Por el Corolario 5.2.8, si X es un espacio de Banach WCG, entonces (X^*, ω^*) es angelical. Si (X^*, ω^*) es angelical, entonces X satisface la condición de Mazur. En [Po, p. 147], Roman Pol demuestra que si (X^*, ω^*) es angelical, entonces X tiene la propiedad (C).** En [Ed2, p. 564-565], G. A. Edgar demuestra que ninguna de las implicaciones establecidas se pueden revertir.

Nuestro objetivo inmediato es establecer que todo espacio de Banach WCG es débilmente Lindelöf. Pero antes recordemos que si X es un espacio de Banach, entonces (X^*, ω^*) es un espacio completamente regular. En efecto, puesto que X^* es un subconjunto del espacio producto $\prod_{x \in X} \mathbf{R}_x$, donde $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}$ para todo $x \in X$ y $\prod_{x \in X} \mathbf{R}_x$ es completamente regular (Teorema 2.1.9), entonces X^* es completamente regular en la topología producto restringida a X^*; pero la topología producto restringida a X^* es precisamente la topología débil*, por lo que (X^*, ω^*) es completamente regular.

El siguiente resultado es de M. Talagrand [Ta1].

Teorema 5.2.62 (Talagrand) *Si* X *es un espcio de Banach WCG, entonces* X *es débilmente* $\mathcal{K}$*-analítico. En particular,* X *es débilmente Lindelöf.*

Prueba: Supongamos que X es un espacio de Banach WCG. Por el Lema

5.2.2, existe una sucesión $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ de subconjuntos débilmente compactos de X tal que $\cup_{n=1}^{\infty} K_n$ es norma-denso en X.

Nuestro plan es mostrar que (X, ω) es un $K_{\sigma\delta}$ en la compactificación de Stone-Čech de (X^{**}, ω^*). Para ver esto, sea

$$x \in X = \overline{\bigcup_{n \geq 1} K_n}^{\|\|}.$$

Entonces existe una sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ en $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ tal que $x_k \stackrel{\|\|}{\to} x$. Por esto, dado $m \in \mathbf{N}$ escojamos un k_0 tal que $\|x_{k_0} - x\| < 1/m$. Haciendo $y = x - x_{k_0}$, resulta que $y \in \frac{1}{m} B_X$ y así,

$$x = x_{k_0} + y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n + \frac{1}{m} B_X.$$

Esto nos muestra que

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n + \frac{1}{m} B_X \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [K_n + \frac{1}{m} B_X] \end{aligned}$$

para cada $m \in \mathbf{N}$.

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} X &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n + \frac{1}{m} B_{X^{**}} \\ &\subseteq X + \frac{1}{m} B_{X^{**}} \end{aligned}$$

y ya que X es norma-cerrado en X^{**} se concluye que

$$X = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} [K_n + \frac{1}{m} B_{X^{**}}].$$

Lo acabado de probar nos muestra que (X, ω^*) es un $K_{\sigma\delta}$ en (X^{**}, ω^*) y en particular, un $K_{\sigma\delta}$ en βX^{**}, la compactificación de Stone-Čech de el espacio completamente regular (X^{**}, ω^*). Además, como la topología débil* sobre X^{**} restringida a X es exactamente la topología débil sobre X tenemos que (X, ω) es $\mathcal{K}$-analítico. □

El Teorema 5.2.13, nos revela que si Ω es un Eberlein compacto, entonces $C(\Omega)$ es WCG y en consecuencia débilmente $\mathcal{K}$-analítico, gracias al Teorema 5.2.62. En [Ta1], Talagrand exhibe un compacto Ω tal que $C(\Omega)$ es débilmente $\mathcal{K}$-analítico, pero Ω no es Eberlein compacto. En ese mismo artículo, Talagrand caracteriza a aquellos compacto Ω para los cuales $C(\Omega)$ es débilmente $\mathcal{K}$-analítico. Una combinación de los trabajos de Corson, Talagrand y Gul'ko conducen a la siguiente:

Definición 5.2.63 *Sea Ω un compacto de Hausdorff. Diremos que*

(*a*) *Ω es* **Talagrand compacto** *si $C(\Omega)$ es débilmente $\mathcal{K}$-analítico.*

(*b*) *Ω es* **Gul'ko compacto** *si $C(\Omega)$ es débilmente numerablemente determinado.*

(*c*) *Ω es* **Corson compacto** *si para algún Γ, Ω es homeomorfo a un subconjunto de $\Sigma(\mathbf{R}^\Gamma) = \{x \in \mathbf{R}^\gamma \mid sop(x) \text{ es numerable}\}$, donde $sop(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid x_\gamma \neq 0\}$ para cada $x \in \mathbf{R}^\Gamma$.*

Como ya habíamos mencionado, M. Talagrand construye en [Ta1] un espacio Talagrand compacto que no es Eberlein compacto y en [Ta3] un espacio Gul'ko compacto que no es Talagrand compacto. Por otro lado, S. P. Gul'ko [Gu] demuestra que cualquier espacio Gul'ko compacto es un espacio Corson compacto. El extenso y penetrante artículo de S. Negrepontis [Ne] contiene, entre otras cosas, un análisis en profundidad de los espacios Gul'ko compactos y Corson compactos.

Un comentario final es pertinente. Ya hemos visto, Teorema 4.2.10, que en todo espacio métrico X, cualquier medida de probabilidad regular de Borel sobre X tiene soporte separable. El mismo resultado sigue siendo válido si uno remplaza espacio métrico por subconjuntos débilmente compacto viviendo en un espacio de Banach (véase el Lema 5.2.76 en la próxima sección). Un resultado más general lo prueba Talagrand en [Ta1, Théorème 6.6, p. 427] cuando el demuestra que si Ω es un compacto para el cual $(C(\Omega), \omega)$ es de Lindelöf, entonces toda $\mu \in M_{reg}(\Omega)$ tiene soporte separable. Ese resultado incluye a los Eberlein compactos y a los Talagrand compacto.

5.2.5 COMPARACION DE σ-ALGEBRAS

Asociadas con cada una de las topologías usuales en un espacio de Banach estaán las σ-algebras que ellas generan. El propósito de esta sección es analizar las posibles relaciones entre ellas para de esta forma obtener información sobre la estructura del espacio.

Si X es un espacio de Banach, denotaremos por $Bo(X, \tau)$ la σ-algebra generada por los conjuntos τ-abiertos de X, donde τ es la topología de la norma, la débil o la débil*.

Comencemos con un espacio de Banach X, el cual siempre supondremos que es de dimensión infinita, y observemos que como la topología débil es menos fina que la topología de la norma, entonces la relación

$$Bo(X, \omega) \subseteq Bo(X, norma)$$

siempre se satisface. Una pregunta natural viene de inmediato: ¿Cuáles espacios de Banach satisfacen la igualdad

$$Bo(X, norma) = Bo(X, \omega)\,?$$

Teniendo en mente el Teorema de Mazur, una respuesta también inmediata aparece en el escenario.

Lema 5.2.64 *Si X es un espacio de Banach* norma-separable, *entonces*

$$Bo(X, norma) = Bo(X, \omega). \tag{4}$$

Prueba: El Teorema de Mazur nos garantiza que las bolas norma-cerradas, por ser convexas, son débilmente cerradas. Sea G un conjunto norma-abierto de X. Puesto que X es norma-separable, resulta que G es una unión numerable de bolas norma-abiertas (Teorema 2.3.4), pero toda bola norma-abierta, por vivir en un espacio norma-separable, es una unión numerable de bolas norma-cerradas; de allí que G es débilmente abierto y termina la prueba. □

El resultado que acabamos de probar nos revela que los espacios interesantes para los cuales se deben hallar condiciones que garanticen la validez de la ecuación (4) y que son dignos de estudios son los no norma-separables. Adelantémonos a cualquier tentación primaria: ℓ_∞, **no satisface la ecuación (4)** . En efecto, M. Talagrand en [Ta2] demuestra que

$$Bo(\ell_\infty, norma) \neq Bo(\ell_\infty, \omega).$$

Veamos ahora un resultado positivo. Comencemos con la siguiente:

Definición 5.2.65 *Sea X un espacio de Banach con norma $\| \ \|$. La norma $\| \ \|$ se llama una* Kadec-norma *si las topologías de la norma y la débil coinciden sobre S_X.*

Observemos que si $\| \ \|$ es una Kadec-norma sobre X, entonces la aplicación identidad

$$id : (S_X, \omega) \to (S_X, \| \ \|)$$

es un homeomorfismo. De aquí se sigue que (S_X, ω) es un espacio polaco y en consecuencia Čech-completo.

El siguiente resultado, aunque no lo usaremos en esta sección, es una bonita caracterización de la Kadec-norma.

Teorema 5.2.66 *Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$\| \ \|$ es una Kadec-norma.*

(2) *Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x \in S_X$, $x \notin \overline{B_X \setminus U_\varepsilon(x)}^{\omega}$.*

Prueba: (1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $\| \ \|$ es una Kadec-norma. Si para algún $\varepsilon > 0$ y algún $x \in S_X$ se tuviera que $x \in \overline{B_X \setminus U_\varepsilon(x)}^{\omega}$, entonces existirá una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en S_X con $x_\alpha \neq x$ para todo $\alpha \in I$ y tal que $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$. Puesto que $\| \ \|$ es una Kadec-norma, $\|x_\alpha - x\| \to 0$ y en consecuencia

$$x \in \overline{B_X \setminus U_\varepsilon(x)}^{\| \ \|} = B_X \setminus U_\varepsilon(x).$$

Imposible.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suponga ahora que (2) se cumple, pero que $\|\ \|$ no es una Kadec-norma. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en S_X y un $x \in S_X$ ta que

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \quad \text{pero} \quad \|x_n - x\| \not\to 0.$$

De aquí se deduce la existencia de $\varepsilon > 0$ y una subsucesión de (x_n), que la seguiremos denotando igual, tal que $\|x_n - x\| > \varepsilon$; esto es $x_n \in B_X \setminus U_\varepsilon(x)$ para todo n. Pero como $x_n \xrightarrow{\omega} x$, se concluye que $x \in \overline{B_X \setminus U_\varepsilon(x)}^{\omega}$. □

Un resultado que permite determinar, para cierta clase de espacios de Banach, la validez de la ecuación (4) es el resultado siguiente debido a Schachermayer (ver [Ed2, p. 251]).

Lema 5.2.67 *Sea X un espacio de Banach, y sea $\mathcal{J}$ una topología localmente convexa sobre X tal que B_X es $\mathcal{J}$-cerrado. Sea $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$. Entonces la aplicación*

$$\Phi : (\mathbf{R}^+ \times S_X, Bo(\mathbf{R}^+) \times \mathbf{Bo(S_X}, \mathcal{J})) \to (\mathbf{X} \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{Bo}(\mathbf{X} \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathcal{J})$$

definida por

$$\Phi(t, x) = tx,$$

es un isomorfismo de Borel sobreyectivo.

Prueba: Notemos en primer lugar que la aplicación $(t, x) \mapsto tx$ de $\mathbf{R}^+ \times S_X$ sobre $X \setminus \{0\}$ es continua y , por consiguiente, medible Borel. Más aún, ella es biyectiva con inversa dada por $x \mapsto (\|x\|, x/\|x\|)$. La primera coordenada de esta última aplicación es $x \mapsto \|x\|$ la cual es semi-continua inferiormente puesto que B_X es $\mathcal{J}$-cerrado y así, medible Borel. La segunda coordenada es la composición $x \mapsto (\|x\|, x) \mapsto x/\|x\|$, de una aplicación de Borel seguida de una función continua y , en consecuencia, medible Borel. Por esto, la aplicación inversa es medible Borel. □

Varias consecuencias se derivan inmediatamente del lema anterior.

Corolario 5.2.68 *Si X es un espacio de Banach con una Kadec-norma, entonces*

$$Bo(X, norma) = Bo(X, \omega).$$

Pruba: Por hipótesis, la aplicación identidad $id : (S_X, \omega) \to (S_X, norma)$ es un homeomorfismo y, en consecuencia, también lo es dentidad $id_1 : (\mathbf{R}^+ \times S_X, \tau_0 \times \omega) \to (\mathbf{R}^+ \times S_X, \tau_0 \times norma)$, donde τ_0 es la topología de $\mathbf{R}$ relativa a $\mathbf{R}^+$. Un llamado al Lema 5.2.68 nos revela que la aplicación identidad $id : (X \setminus \{0\}, \omega) \to (X \setminus \{0\}, norma)$ es un isomorfismo de Borel. □

El siguiente resultado, el cual es obra de W. Schachermayer (ver [Ed2]), exhibe una via útil en la conexión con $Bo(X, \omega)$ o $B(X, \omega^*)$.

Teorema 5.2.69 *Sea X un espacio de Banach, y sea $\mathcal{J}$ una topología localmente convexa sobre X tal que B_X es $\mathcal{J}$-cerrado. Entonces la aplicación $(t, x) \mapsto tx$ es un isomorfismo de Borel de $\mathbf{R}^+ \times S_X$ provisto con la σ-algebra producto $Bo(\mathbf{R}^+) \times Bo(S_X, \mathcal{J})$ sobre $Bo(X \setminus \{0\}, \mathcal{J})$.*

Prueba: Observemos en primer lugar que la aplicación $(t, x) \mapsto tx$ de $\mathbf{R}^+ \times S_X$ sobre $X \setminus \{0\}$ es continua y, por consiguiente, medible Borel. Más aún, ella claramente es biyectiva con inversa dada por $x \mapsto (||x||, x/||x||)$. Ahora bien, la primera coordenada de esta última aplicación es $x \mapsto ||x||$ la cual es semicontinua inferior puesto que B_X es $\mathcal{J}$-cerrado y así, medible Borel; mientras que la segunda coordenada es la composición $x \mapsto (||x||, x) \mapsto x/||x||$ de una aplicación de Borel seguida de una aplicación continua. Esto termina la prueba. □

La importancia del resultado anterior queda manifiestamente justificada por los siguientes corolarios.

Corolario 5.2.70 (Edgar) *Si X es un espacio de Banach con una Kadec-norma $||\,||$, entonces*

$$Bo(X, ||\,||) = Bo(X, \omega).$$

Prueba: Por hipótesis, la aplicación identidad $(S_X, \omega) \to (S_X, ||x||)$ es un homeomorfismo y así, también lo es la identidad

$$id : (\mathbf{R}^+ \times S_X, \tau_0 \times \omega) \to (\mathbf{R}^+ \times S_X, \tau_0 \times ||\,||),$$

donde τ_0 es la topología usual de $\mathbf{R}$ restringida a $\mathbf{R}^+$. Un llamado al Teorema 5.2.69 nos revela que la identidad

$$(X \setminus \{0\}, \omega) \to (X \setminus \{0\}, ||\,||)$$

es un isomorfismo de Borel y con esto concluye la prueba. □

Corolario 5.2.71 *Sea Y un subespacio de un espacio de Banach X. Entonces $Y \in Bo(X, \mathcal{J})$ si y sólo si $Y \cap S_X \in Bo(S_X, \mathcal{J})$, donde $\mathcal{J}$ es como en el Teorema 5.2.69.*

Prueba: Es consecuencia inmediata del Teorema 5.2.69. □

Corolario 5.2.72 *Si X es un espacio de Banach con una Kadec-norma, entonces $X \in Bo(X^{**}, \omega^*)$.*

Prueba: Por el Corolario 5.2.71, es suficiente probar que $S_X \in Bo(X^{**}, \omega^*)$. Por hipótesis, $(S_X, \omega) = (S_X, norma)$ es un espacio métrico completo y así, Čech-completo (Teorema 2.7.4). Uno apela al Teorema 2.7.2, para concluir que S_X es un conjunto G_δ en su compactificación de Stone-Čech $\beta S_X = (B_{X^{**}}, \omega^*)$, el cual incluye a $S_{X^{**}}$. Así, S_X es un conjunto G_δ en $(S_{X^{**}}, \omega^*)$. □

Por un resultado de S. Troyanski [Di1, Teorema 1, p. 164], cualquier espacio de Banach WCG admite una Kadec-norma por lo que se verifica

Corolario 5.2.73 *Si X es un espacio de Banach WCG, entonces*

$$X \in Bo(X^{**}, \omega^*).$$

Otra demostración del Corolario 5.2.73 se obtiene si se invoca al Teorema 5.2.62. Es importante observar que no todo espacio de Banach verifica $X \in Bo(X^{**}, \omega^*)$. En efecto, M. Talagrand [Ta2] demuestra que $\ell_\infty \notin Bo(\ell_\infty^{**}, \omega^*)$.

Definición 5.2.74 *Un espacio de Banach dual X^* tiene la* **propiedad (**)** *si las topologías de la norma y la ω^* coinciden sobre S_{X^*}.*

Una nueva aplicación del Teorema 5.2.69 nos revela:

Corolario 5.2.75 *Si X^* es un espacio de Banach dual con la propiedad $(**)$, entonces*

$$Bo(X^*,\omega^*) = Bo(X^*, norma).$$

Se puede demostrar fácilmente que $Bo(X^*,\omega^*) = Bo(X^*, norma)$ no es cierto para todo espacio de Banach X. En efecto, tomemos $L_\infty[0,1] = L_1[0,1]^*$. Claramente el conjunto $A = \{\chi_{[0,t]} \mid t \in [0,1]\}$ es discreto en $(L_\infty[0,1], norma)$ pero homeomorfo a $[0,1]$ en $(L_\infty[0,1],\omega^*)$. Ahora bien, como $[0,1]$ contiene subconjuntos no medibles Borel resulta que (A,ω^*) tambien contiene subconjuntos no medibles Borel; esto es algún subconjunto de (A,ω^*) no pertenece a $Bo(L_\infty[0,1],\omega^*)$; pero por otro lado, cualquier subconjunto de $(A, norma)$ está en $Bo(L_\infty[0,1], norma)$. Por esto, $Bo(X^*,\omega^*) \neq Bo(X^*, norma)$ donde $X = L_1[0,1]$.

M. Talagrand (ver [Ed2]), demuestra que si X^* es un subespacio de un espacio de Banach WCG, entonces $Bo(X^*,\omega^*) = Bo(X^*, norma)$.

Si bien $Bo(X,\omega) = Bo(X, norma)$ no es válido para todo espacio de Banach X uno puede mantener la igualdad si uno remplaza "Borel" por "universalmente medible." En este sentido es bueno recordar (Definición 4.2.7) que la σ-algebra de los conjuntos universalmente medibles de un espacio de Hausdorff X viene dada por

$$Univ(X) = \bigcap_{\mu \in M_{reg}(X)} Bo(X)_\mu\,,$$

donde

$$Bo(X)_\mu = \{A \subseteq X \mid \mu^*(A) = \mu_*(A)\},$$

y $M_{reg}(X)$ es el espacio de todas las medidas de probalididad de Borel que son regulares. También recordemos que el soporte de una medida de Borel μ se define como

$$sop(\mu) = X \setminus \bigcup \{U \mid U \text{ es abierto y } \mu(U) = 0\}.$$

Antes de establecer lo afirmado en el parágrafo anterior, debemos mostrar un importante resultado de A. Grothendieck (véase por ejmplo [Di2]).

Lema 5.2.76 (Grothendieck) *Sean X un espacio de Banach y K un subconjunto débilmente compacto de X. Si $\mu \in M_{reg}(K)$, entonces existe un subconjunto norma-separable K_1 de K tal que $\mu(K_1) = 1$.*

Prueba: Invocando al Teorema de Krein-Šmulian uno puede suponer, y así lo haremos, que K es convexo, simétrico y débilmente compacto. Sea $\mu \in M_{reg}(K)$ y considere el operador lineal acotado $T : L_1(\mu) \to X$ definido por

$$Tf = \int_K x\, f(x)\, d\mu(x)$$

donde la integral que aparece en la definición de T es la integral de Bochner. Es fácil establecer que $Tf \in K$ siempre que $\|f\|_1 \leq 1$; esto es, T es débilmente compacto. Puesto que $L_1(\mu)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis, resulta del Teorema de Dunford-Pettis que T transforma subconjuntos débilmente compactos en subconjuntos norma-compactos. Por otro lado, como $L_1(\mu)$ también es WCG, entonces el Lema 5.2.3 nos revela que $\overline{T(L_1(\mu))}$ es WCG y por lo dicho anteriormente resulta que $\overline{T(L_1(\mu))}$ es generado por un subconjunto norma-compacto; esto es, $\overline{T(L_1(\mu))}$ es norma-separable. Definamos

$$K_1 = K \cap \overline{T(L_1(\mu))}.$$

Entonces K_1 es convexo, cerrado y metrizable. Nuestra tarea ahora es demostrar que el soporte de μ está contenido en K_1. En efecto, supongamos que algún $u \in sop(\mu)$ pero que $u \notin K_1$. Por el Teorema de Hahn-Banach existen $x^* \in X^*$ y $t \in \mathbf{R}$ tal que

$$\sup_{x \in K_1} x^*(x) < t < x^*(u).$$

Definamos ahora $G = \{x \in X \mid x^*(x) > t\}$. Por un lado, ya que G es un entorno débil de u y $u \in sop(\mu)$ tenemos que $\mu(G) > 0$. Pero por otro lado, al ser $X \setminus G = \{x \in X \mid x^*(x) \leq t\}$ débilmente cerrado el también es norma-cerrado y, en consecuencia, existe una función continua $f \in L_1(\mu)$, $f \geq 0$, $\|f\|_1 = 1$ satisfaciendo $f^{-1}(0) = X \setminus G$. De aquí se sigue que $x^*(Tf) \geq t$. Pero como $Tf \in K_1$, entonces $x^*(Tf) \leq \sup_{x \in K_1} x^*(x) < t$ lo cual es contradictorio. Por esto, $u \in K_1$ y concluye la prueba. $\square$

Estamos ahora listos para abordar la prueba del siguiente:

Teorema 5.2.77 (Edgar) *Sea X un espacio de Banach. Entonces*

$$Univ(X, norma) = Univ(X, \omega).$$

Prueba: Sea $\mu \in M_{reg}(X,\omega)$. Por el Lema 5.2.76 existe un subespacio norma-cerrado y norma-separable $X_1 \subseteq X$ con $\mu(X_1) = 1$. Por otro lado, al ser X_1 norma-separable, el Lema 5.2.64 nos garantiza que

$$Bo(X_1, norma) = Bo(X_1, \omega).$$

Definamos ahora

$$\tilde{\mu} : Bo(X, norma) \to [0,1]$$

mediante la fórmula

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap X_1) \quad \text{para todo} \quad B \in Bo(X, norma).$$

Observemos en primer lugar que:

(i) $\tilde{\mu}(X \setminus X_1) = 0$, y

(ii) puesto que X_1 es un espacio polaco, el Teorema 4.2.5 nos revela que toda medida de Borel sobre X_1 es regular.

De (i) y (ii) se sigue que $\tilde{\mu}$ es regular sobre $(X, norma)$. Recíprocamente, si $\tilde{\mu}$ es regular sobre $(X, norma)$, entonces su restricción a (X,ω) sigue siendo regular por el hecho de que cualquier conjunto norma-compacto es débilmente compacto. En resumen

$$\begin{aligned} B \ es\ \mu - medible &\Leftrightarrow B \cap X_1 \ es\ \mu - medible \\ &\Leftrightarrow B \cap X_1 \ es\ \tilde{\mu} - medible \\ &\Leftrightarrow B \ es\ \tilde{\mu} - medible. \end{aligned}$$

Esto significa, por ser μ arbitraria, que

$$Univ(X, norma) = Univ(X, \omega).$$

$\square$

Ya hemos visto que si un espacio de Banach dual X^* satisface la propiedad $(**)$, entonces $Bo(X^*, norma) = Bo(X^*, \omega^*)$. Sin embargo, la igualdad $Bo(X^*, norma) = Bo(X^*, \omega^*)$ no se verifica para todo espacio de Banach dual X^*, aún en el caso de remplazar "Borel" por "universalmente medible". Lo que si es cierto es el siguiente

Teorema 5.2.78 (Edgar) *Sea X un espacio de Banach. Entonces X^* tiene la propiedad de Radon- Nikodym si y sólo si*

$$Univ(X^*, norma) = Univ(X^*, \omega^*).$$

La prueba de este resultado requiere de dos resultados previos. Comencemos con el primero.

Lema 5.2.79 (Edgar) *Sean S y T espacios σ-compactos (respectivamente métricos completos), y sea $\varphi : S \to T$ una función continua sobreyectiva (respectivamente abierta). Entonces*

(i) para cada $\lambda \in M_{reg}(T)$ existe una $\mu \in M_{reg}(S)$ tal que $\varphi(\mu) = \lambda$, donde $\varphi(\mu)$ es la medida imagen de μ.

(ii) si $A \subseteq T$, entonces $A \in Univ(T)$ si y sólo si $\varphi^{-1}(A) \in Univ(S)$.

Prueba: (i) Véase [Ed3, Corolario 1.5, p. 633]

(ii) Supongamos que $A \in Univ(T)$. Sea $\mu \in M_{reg}(S)$. Entonces la medida imagen de μ, $\varphi(\mu)$, definida por $\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ para todo $B \in Bo(T)$, es un elemento de $M_{reg}(T)$. Puesto que $A \in Univ(T)$, existen $A_1, A_2 \in Bo(T)$ con $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ y $\varphi(\mu)(A_2 \setminus A_1) = 0$. Pero como

$$\varphi^{-1}(A_1) \subseteq \varphi^{-1}(A) \subseteq \varphi^{-1}(A_2)$$

y

$$\mu(\varphi^{-1}(A_2) \setminus \varphi^{-1}(A_1)) = \varphi(\mu)(A_2 \setminus A_1) = 0$$

resulta que $\varphi^{-1}(A) \in Univ(S)$.

Reciprocamente, supongamos que $\varphi^{-1}(A) \in Univ(S)$. Sea $\lambda \in M_{reg}(T)$. Entonces, por (i), existe una $\mu \in M_{reg}(S)$ tal que $\varphi(\mu) = \lambda$. Dado $\varepsilon > 0$, existen compactos $K_1, K_2 \subseteq S$ con $K_1 \subseteq \varphi^{-1}(A) \subseteq K_2^c$ y $\mu(K_2^c \setminus K_1) \leq \varepsilon$. Puesto que $\varphi(K_1)$ y $\varphi(K_2)$ son compactos, $\varphi(K_1) \subseteq A \subseteq \varphi(K_2)^c$ y

$$\begin{aligned}
\lambda(\varphi(K_2)^c \setminus \varphi(K_1)) &= \mu(\varphi^{-1}(\varphi(K_2)^c \setminus \varphi^{-1}(\varphi(K_1))) \\
&\leq \mu(K_2^c \setminus K_1) \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

entonces $A \in Univ(T)$. Esto termina la prueba. □

El segundo resultado que necesitaremos es producto de la mente de C. Stegall ([St, Teorema 1, p. 215]). En realidad, el Teorema 1 en [St] dice mucho más que nuestra presentación, pero para nosotros será suficiente establecerlo del modo siguiente:

Lema 5.2.80 (Stegall) *Si Y es un espacio de Banach con Y^* no norma-separable, entonces existe un subconjunto K de B_{Y^*} el cual cerrado y discreto en $(Y^*, norma)$ pero ω^* homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Estamos ahora en condiciones de probar el Teorema 5.2.78.

Prueba del Teorema 5.2.78: Supongamos que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Como en la prueba del Teorema 5.2.77, será suficiente demostrar que para cualquier $\mu \in M_{reg}(X^*, \omega^*)$ existe un subespacio norma-separable y ω^*-Borel $Y \subseteq X^*$ con $\mu(Y) = 1$; es decir, μ tiene soporte norma-separable. Puesto que $X^* = \cup_{n=1}^{\infty} nB_{X^*}$, podemos suponer, y así lo haremos, que $\mu(B_{X^*}) = 1$. Para cada $A \in Bo(X^*, \omega^*)$ definamos

$$m(A) = \int_A x^* \, d\mu(x^*).$$

Por la ω^*-compacidad de B_{X^*}, esta integral existe como una ω^*-integral; esto es,

$$m(A)(x) = \int_A x^*(x) d\mu(x^*) \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

y $m(A) \in \mu(A) \cdot B_{X^*}$. Es claro que m es una medida X^*- valuada y finitamente aditiva sobre el espacio de probabilidad $(X^*, Bo(X^*, \omega^*), \mu)$. También es claro que el μ-rango promedio de m está contenido en B_{X^*}. De aquí se sigue que m es norma-numerablemente aditiva y absolutamente continua con respecto a μ, y como X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym, existe una función Bochner-integrable $\varphi : X^* \to X^*$ satisfaciendo

$$m(A) = \int_A \varphi(x^*) d\mu(x^*) \quad \text{para todo} \quad A \in Bo(X^*, \omega^*).$$

Ahora bien, puesto que φ es μ-medible, existe $B \in Bo(X^*, \omega^*)$ con $\mu(B) = 0$ y tal que $E = \varphi(X^* \setminus B)$ es un subconjunto norma-separable de X^*. Sea Y

el subespacio lineal norma-cerrado generado por E. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\mu\{x^* \mid \varphi(x^*) \in Y\} = 1$. Considere la colección $\mathcal{W}$ de todas las funciones $f : B_{X^*} \to \mathbf{R}$ tal que $f = f \circ \varphi$, μ-casi siempre. Entonces $\mathcal{W}$ incluye a todos los funcionales lineales ω^*-continuos, y gracias al Teorema de Stone-Weierstrass, ella incluye a todas las funciones ω^*-continuas. También $\mathcal{W}$ es cerada bajo la acción de tomar limites puntuales de sucesiones, por lo que ella incluye a todas las funciones ω^*-Baire. Por esto, si $D \in Ba(X^*, \omega^*)$ y $D \supseteq Y$, entonces

$$\mu(D) = \int \chi_D(x^*) d\mu(x^*) = \int \chi_D(\varphi(x^*)) d\mu(x^*) = 1.$$

Notemos ahora que, si K es un conjunto ω^*-σ-compacto con $K \supseteq Y$, entonces por la regularidad de μ se tiene que

$$\mu(K) = \inf\{\mu(D) \mid D \supseteq K,\ D \in Ba(X^*, \omega^*)\}.$$

Finalmente, como Y es WCG, el es un $\omega^* - K_{\sigma\delta}$, y así $\mu(Y) = 1$. De aquí es fácil ahora deducir que $Univ(X^*, norma) = Univ(X^*, \omega^*)$.

Recíprocamente, supongamos que $Univ(X^*, norma) = Univ(X^*, \omega^*)$ pero que X^* no tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces X no es un espacio de Asplund y en consecuencia X posee un subespacio norma-separable Y tal que Y^* no es norma-separable (véase la observación que sigue a la Definición 5.2.44). Un llamado al Lema 5.2.80, nos revela la existencia de un subconjunto A de Y^* el cual es homeomorfo al conjunto de Cantor en (Y^*, ω^*) pero discreto y cerrado en $(Y^*, norma)$. Por esto, existe un subconjunto B de A el cual está en $Univ(Y^*, norma)$ pero no en $Univ(Y^*, \omega^*)$. Si $T : Y \to X$ es la aplicación inclusión, entonces $T^* : X^* \to Y^*$ es norma-abierta, y así, por el Lema 5.2.79, $(T^*)^{-1}(B) \in Univ(X^*, norma)$. Pero también T^* es $\omega^* - \omega^*$-continuo y (X^*, ω^*) es σ-compacto, por lo que de nuevo aplicando el Lema 5.2.79, resulta que $(T^*)^{-1}(B) \notin Univ(X^*, \omega^*)$. Esto prueba que $Univ(X^*, norma) \neq Univ(X^*, \omega^*)$, lo cual es imposible y termina la prueba. □

Terminamos estas notas con el siguiente resultado, el cual es más general que el Teorema 5.2.45.

Teorema 5.2.81 (Edgar) *Sea X un espacio de Banach. Si (X^*, ω) es de Lindelöf, entonces X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym. En particular, si X^* es WCG, entonces X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.*

Prueba: Si X^* no tiene la propiedad de Radon-Nikodym, entonces X no es un espacio de Asplund y así, existe un subespacio Y de X norma-separable pero tal que Y^* no es norma-separable. Por el Lema 5.2.80, existe un subconjunto no-numerable A de Y^* el cual es norma-discreto pero cerrado en (Y^*, ω). Puesto que (Y^*, ω) tiene un subconjunto cerrado y discreto, el no puede ser de Lindelöf. Pero (Y^*, ω) es una imagen continua de (X^*, ω), de donde resulta que (Y^*, ω) es de Lindelöf. Esta contradicción establece que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

La segunda parte es consecuencia de la primera y del Teorema 5.2.62. $\square$

Referencias

[AL] D. Amir and J. Lindenstrauss. *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. **88** (1968), 35-46.

[Ba] S. Banach. **Thoérie des Opérationes Linéaires**. Warsaw, 1932.

[BRW] Y. Benyamini, M. E. Rudin and M. Wage. *Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **70** (1977), 309-324.

[BFT] J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand. *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions.* Amer. J. Math. **100** (1978), 845-886.

[Bo] R. D. Bourgin. **Geometric Aspect of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property**. Lecture Notes in Math **993**, Springer Verlag, Berlin 1983.

[C] D. L. Cohn. **Measure Theory**. Birkhäuser, 1980.

[Co] H. H. Corson. *The weak topology of a Banach space.* Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 1-15.

[CL] H. H. Corson and J. Lindenstrauss. *On weakly compact subsets of Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 407-412.

[DFJP] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson and A. Pelczynski. *Factoring weakly compact operators*, J. Func. Anal. **17** (1974), 311-327.

[Di] J. Diestel. **Sequences and Series in Banach Spaces**. Springer-Verlag, New York, Inc. 1984.

[Di1] J. Diestel. **Geometry of Banach Spaces - Selected Topics**, Lecture Notes in Math. **485**, Springer-Verlag, Berlin 1975.

[Di2] J. Diestel. *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Proc. Conf. on Integration, Topology and Geometry in Linear Spaces, Amer. Math. Soc. Contemp. Math. 2 (1980), 15-60.

[DU] J. Diestel and J. J. Uhl Jr. **Vector Measure**, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[Du] J. Dugundji. **Topology**. Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1966.

[vD] D. van Dulst. **Characterizations of Banach spaces not containing ℓ^1**. CWI Tract, Amsterdam, 1989.

[DS] N. Dunford and J. Schwartz. **Linear Operators, Part I**. Intersciences, 1957.

[Ed1] G. A. Edgar. *Measurability in a Banach space*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 663-677.

[Ed2] G. A. Edgar. *Measurability in a Banach space, II.* Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 559-579.

[Ed3] G. A. Edgar. *Measurable weak sections.* Illinois J. Math. **20** (1976), 630-646.

[EW] G. A. Edgar and R. F. Wheller. *Topological properties of Banach spaces.* Pacific J. Math. **115** (1984), 317-350.

[En] R. Engelking. **General Topology**. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[GP] R. J. Gardner and W. F. Pfeffer. *Borel measures.* Handbook of Set-theoretic Topology, Edited by K. Kunen and J. E. Vaughan, Elsevier Sciences Publ. B. V. (1984), 961-1043.

[Gi] J. R. Gilles. **Convex Analysis with Applications in Differentiation of Convex Functions**. Res. Notes in Math. 58, Pitman, 1982.

[Gu] S. P. Gul'ko. *On the structure of spaces of continuous functions and their complete paracompactness* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk 34 (1979), 33-40. (English translation) Russian Math. Surveys **34** (1979), 36-44.

[Ho] R. B. Holmes. **Geometric Functional Analysis and its Applications**. Springer-Verlag, New York, Inc. 1975.

[La] H. E. Lacey. **The Isometric Theory of Classical Banach Spaces**. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[Li] J. Lindenstrauss. *Weakly compact sets - Their topological properties and the Banach spaces they generate*, Annals of Math. Studies **69**, Princenton University Press (1972), 235-276.

[Na] J. Nagata. **Modern General Topology**. Second Edition, North-Holland, 1985.

[Nam] I. Namioka. *Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability.* Mathematika, **34** (1987), 258-281.

[NW] I. Namioka and R. F. Wheller. *Gul'ko's proof of the Amir-Lindenstrauss theorem.* In Proceedings of the Conference on Geometry of Normed Linear Spaces, Contemporary Math. 52 (1983), 113-120.

[Ne] S. Negrepontis. *Banach spaces and topology.* Handbook of Set-theoretic Topology, Ed. by K. Kunen and J. E. Vaughan. Elsevier Sciences Publishers B. V. (1984), 1045-1142.

[Po] R. Pol. *On a question of H. H. Corson and some related problems.* Fundamenta Mathematicae **109** (1980), 143-154.

[RJ] C. A. Rogers and J. E. Jayne. *$\mathcal{K}$-analytic sets.* In Analytic Sets, Academic Press, London 1980.

[Ro1] H. P. Rosenthal. *The hereditary problem for weakly compactly generate Banach spaces.* Compositio Math. **28** (1974), 83-111.

[Ro2] H. P. Rosenthal. *On inyective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measures μ.* Acta Math. **124** (1970), 205-248.

[Ro3] H. P. Rosenthal. *Weak*-Polish Banach spaces.* J. Funct. Anal. **76** (1988), 267-316.

[St] C. Stegall. *The Radon-Nikodym property in conjungate Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **206** (1975), 213-223.

[Ta1] M. Talagrand. *Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analitiques*, Annals of Math. **110** (1979), 407-438.

[Ta2] M. Talagrand. *Comparaison des Boreliens d'un espace de Banach pour les topologies fortes et faibles.* Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 1001-1004.

[Ta3] M. Talagrand. *A new countably determined Banach space.* Israel J. Math. **47** (1984), 75-80.

[Va] V. S. Varadarajan. *Measures on topological spaces.* Mat. Sbornik, **55** (1961), 35-100 (Russian); English translation: Amer. Math. Soc. Transl. **48** (1965), 161-228.

[Wh1] R. F. Wheller. *The retraction property, ccc property, and Dunford-Pettis-Phillips property for Banach spaces*, Lecture Notes in Math. **945**, Springer-Verlag, Berlin (1982), 252-262.

[Wh2] R. F. Wheller. *A survey of Baire measures and strict topologies*, Expo. Math. **2** (1983), 97-190.