Universidad de los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemática

El Espacio Cociente y Algunas Propiedades Geométricas de los Espacios de Banach.

José R. Morales M.

Notas de Matemática

Serie: Pre-Print

No. 179

Mérida - Venezuela

1998

Notas de Matemática, No. 179

Mérida, October 1998.

El Espacio Cociente y Algunas Propiedades Geométricas de los Espacios de Banach.

José R. Morales M.

Resumen

En esta nota enunciaremos algunas Propiedades geométricas de los espacios de Banach y analizaremos el problema cuando tales propiedades se trasladan al espacio cociente.

1 Notación.

Seguiremos la terminoligia estandar que puede encontrarse en [2]. Por E, denotaremos el espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$. B_E, denota la bola unitaria cerrada de E, S_E, la esfera unitaria de E y E^* el dual topologico de E.

2 Preliminares.

Sea E, un espacio de Banach y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado. Entonces, el espacio cociente E/F, es el espacio cuyos elementos son traslaciones de F, con la norma:

$$\|x+F\| = \|\tilde{x}\| = \inf\{\|x+y\| / y \in F\}.$$

La función

$$\begin{aligned} \pi \ : \ & E \to E/F \\ & x \to x+F \end{aligned}$$

es llamada la Proyección Canonica de E sobre E/F.

Es importante señalar que la norma de $\tilde{x}$ es exactamente $d(x,F)$, donde $d(x,F)$ es la distancia desde x al subconjunto F.

Definición 1 *Sea E un Espacio de Banach. Un subespacio F de E se llama Proximinal si $\forall\ x \in E$, existe $y \in F$ tal que $d(x, F) = \|x - y\|$.*

En [13] encontramos la siguiente Caracterización de los subespacios Proximinales,

Un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si cada subespacio de E es Proximinal.

El siguiente hecho, (ver [12]), es fundamental en la prueba de nuestros resultados,

Sea E un espacio de Banach. Un subespacio cerrado F de E es Proximinal si y sólo si la imagen de la bola unitaria cerrada de E por la aplicación cociente, $\pi : E \to E/F$ es la bola unitaria cerrada de E/F.

3 Definiciones.

En esta sección nos dedicaremos a enunciar aquellas propiedades geométricas de los espacios de Banach en las cuales estamos interesados.

En 1936, J.A. Clarkson [1] introdujo los espacios uniformemente convexos en la forma siguiente,

Definición 2 *Un espacio de Banach E es uniformemente convexo, (UR), si, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x, y \in B_E$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$ entonces $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.*

En términos de sucesiones la anterior definición puede escribirse como:

Un espacio de Banach E es (UR) si y sólo si, $(x_n), (y_n) \subset B_E$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$

D.P. Milman en 1938 y B.S. Pettis en 1939, (ver [6]), de manera independiente demostraron:

Si E es un espacio de Banach (UR) entonces E es un espacio reflexivo.

En 1964, R.C. James [8] introdujo otro tipo de espacios, llamados los espacios Uniformemente No-Cuadrados.

Definición 3 *Un espacio de Banach E se dice que es Uniformemente No-Cuadrado si y sólo si, existe un $\delta > 0$ tal que si*

$$x, y \in B_E, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \left\|\frac{x-y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Es claro que,

$$UR \Rightarrow \textit{Uniformemente No-Cuadrado.}$$

James en el mismo artículo mostró,

Si E es un espacio de Banach Uniformemente No-Cuadrado entonces E es reflexivo.

En 1955, K. Fan and I. Glicksberg [3] generalizan los espacios (UR) e introducen los espacios (kR), $k \geq 2$.

Definición 4 *Sea $k \geq 2$ un entero. Un espacio de Banach E se dice kR. Si para toda sucesión $(x_n) \subset E$ tal que*

$$\lim_{n_1,\cdots,n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k$$

entonces

$$(x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy en } E.$$

En el mismo artículo los autores mostrarón,

$$UR \Rightarrow 2R \Rightarrow \cdots \Rightarrow kR \Rightarrow (k+1)R \Rightarrow \text{Reflexividad}$$

En 1991, Bor - Luh Lin y wenyao Zhang [9] generalizan los espacios kR y definen los espacios wR.

Definición 5 *Sea E un espacio de Banach. Se dice que E es un espacio wR. Si para cualquier sucesión $(x_n) \subset B_E$ con*

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

entonces (x_n) es convergente en E.

Es claro que, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$kR \Rightarrow wR$$

y además los autores antes mencionados probaron que

Si E es un espacio wR entonces E es reflexivo.

En 1955, A.R. Lovaglia [10] localiza los espacios (UR), en la forma siguiente,

Definición 6 *Un espacio de Banach E es localmente uniformemente convexo, (LUR), si dado $\epsilon > 0$ y $x \in S_E$ existe un $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que*

$$\forall\, y \in B_E \ y \ \|x - y\| \geq \epsilon \ \Rightarrow \ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

En términos secuenciales la anterior definición puede escribirse como:

Un espacio de Banach E **es** (LUR) $\Leftrightarrow$ $(x) \in S_E$, $(x_n) \subset B_E$, $\lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$ **entonces** $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Es claro que,

$$UR \Rightarrow LUR.$$

Los espacios (LUR) no implica la reflexividad del espacio.

En 1988, Nan Chao-xun y wang Jian-Hua [15] localizan los espacios kR e introducen los espacios LkR, y en 1991 en [9] los autores definen los espacio LwR. Es importante señalar que los espacios LkR y los espacios LwR pueden tambien ser vistos como una generalización de los espacios LUR.

Definición 7 *Sea* $k \geq 1$ *un entero. Un espacio de Banach* E *se dice* LkR *si para todo* $x \in S_E$ *tal que*

$$\lim_{n_1\cdots n_k\to\infty} \|x + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k + 1$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Definición 8 *Un espacio de Banach* E *se dice* LwR *si para todo* $x \in S_E$ *y toda sucesión* $(x_n) \subset B_E$ *tal que*

$$\lim_{n_1\cdots n_k\to\infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k + 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Es claro que,

$$LUR \Leftrightarrow L1R \Rightarrow \cdots \Rightarrow LkR \Rightarrow L(k+1)R \Rightarrow LwR.$$

Los espacios estrictamente convexos, su paternidad no es muy clara y la referencia más antigua aparece en el trabajo de Clarkson [1] pero en la monografía deV.I. Istratescu [7] se dice que tales espacios fuerón definidos de manera independiente por Clarkson y M.G. krein.

Definición 9 *Un espacio de Banach* E *se dice estrictamente convexo* $(\mathbb{R})$ *si para todo* $x, y \in S_E$ *y* $\|x + y\| = 2 \;\Rightarrow\; x = y$.

Es claro,

$$LwR \Rightarrow R$$

En 1959, K. Fan y I. Glicksberg [4] introducen la propiedad (H) en espacios de Banach (R) y es M.M. Day [2], quien le elimina la condición de ser el espacio estrictamente convexo.

Definición 10 *Un espacio de banach E sedice que posee la propiedad (H) si para todo $x \in S_E$ y $(x_n) \subset S_E$ con $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Claramente tenemos

$$LwR \Rightarrow \text{Propiedad } (H).$$

En 1980, R. Huff [6] generaliza los espacios (UR) y en términos secuenciales introduce los espacios casi uniformemente convexos y los espacios uniformemente Kadec-Klee. Además, de dar una reformulación de la propiedad (H).

Definición 11 *Sea E un espacio de Banach. Se dice que E es uniformemente Kadec-Klee, (Ukk), si para todo $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que*

$$(x_n) \subset B_E \;\; y \;\; x_n \xrightarrow{w} x \;\; y \;\; Sep(x_n) \geq \epsilon$$

entonces

$$\|x\| < \delta.$$

Definición 12 *Un espacio de Banach E se dice casi uniformemente convexo, (NUC), si para todo $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que $(x_n) \subset B_E$ y $Sep(x_n) \geq \epsilon$ entonces*

$$C_0(x_n) \cap B_\delta(U) \neq \emptyset$$

Además, Huff mostró que

$$UR \Rightarrow NUC \Leftrightarrow \text{Reflexividad} + Ukk$$

y

$$Ukk \Rightarrow \text{Propiedad } (H).$$

4 Resultados.

En esta sección consideremos el problema cuando una de las propiedades del espacio E enunciadas en la sección anterior son transmitidas al subespacio cociente.

Generalmente, los espacios cocientes, no conservan estas propiedades, como lo podemos ver en el ejemplo dado por Klee que aparece en [7] donde se muestra que la propiedad de ser E un espacio (R) no se traslada al espacio cociente. Sin embargo, bajo ciertas condiciones la heredabilidad se cumple.

El siguiente resultado nos sintetiza algunas propiedades transmitidas al cociente.

Teorema: 1 *Sea E un espacio de Banach y $F \subsetneq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces:*

a.- *Si E es (UR) entonces E/F tambien lo es.*

b.- *Si E es reflexivo y (LUR) entonces E/F es (LUR).*

c.- *Sea E es (LUR). Si F es un subespacio proximinal de E entonces E/F es (LUR).*

d.- *Si E es (R) y F es un subespacio reflexivo entonces E/F es (R).*

Prueba: a.- ver Intratescu [7].
b.- y c.- ver Montesinos - Torregrosa [12].
d.- se debe a Klee, ver [7]. ■

Teorema: 2 *Sea E un espacio de Banach uniformemente no-cuadrado y $F \subsetneq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F es un espacio uniformemente no-cuadrado.*

Prueba: Supongamos que existe $\delta > 0$.

Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in B_{E/F}$ tales que $\left\| \frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2} \right\| > 1-\delta$. Queremos mostrar que,

$$\left\| \frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2} \right\| \leq 1-\delta.$$

Como E es reflexivo, entonces $S_{E/F} \subset \pi(S_E)$, por tanto existen $x, y \in B_E$ tales que

$$\pi(x) = \tilde{x} \ \text{ y } \ \pi(y) = \tilde{y}.$$

Puesto que,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq \left\| \frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2} \right\| > 1-\delta$$

y usando el hecho que E es un espacio uniformemente no-cuadrado se tiene que,

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

De acá,

$$\left\|\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right\| \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

Asi pués E/F es un espacio uniformemente no-cuadrado. ∎

Teorema: 3 *Sea $k \geq 2$ un entero. Sea E un espacio de Banach kR y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F es un espacio de kR.*

Prueba: Sea $(\tilde{x})$ una sucesión de $B_{E/F}$, tal que

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|\tilde{x}_{n_1} + \cdots + \tilde{x}_{n_k}\| = k.$$

Por un argumento similar al teorema anterior existe $x_{n_i} \in B_E \quad i = 1...k$ tal que $\pi(x_{n_i}) = \tilde{x}_{n_i}, \quad i = 1...k$.

Ahora,

$$\begin{aligned} k = \lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|\tilde{x}_{n_1} + \cdots + \tilde{x}_{n_k}\| &\leq \lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \\ &\leq \lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \left(\|x_{n_1}\| + \ldots + \|x_{n_k}\|\right) \\ &= k \end{aligned}$$

Asi,

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| = k.$$

Ahora, usndo el hecho que E es un espacio kR se tiene que (x_n) es una sucesión de Cauchy en E, y

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| \leq \|x_n - x_m\|$$

se concluye que $(\tilde{x}_n)$ es Cauchy en E/F. Por tanto, hemos probado que E/F es un espacio kR. ∎

En forma similar se prueba el siguiente.

Teorema: 4 *Sea E un espacio de Banach wR y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F es un espacio wR.*

Teorema: 5 *Sea $k \geq 1$ un entero. Sea E un espacio de Banach reflexivo y LkR y $F \subsetneq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F es un espacio LkR.*

Prueba: Sean $\tilde{x}_0 \in B_{E/F}$ y $(\tilde{x}_n) \subset B_{E/F}$ tales que,

$$\lim_{n_1 \cdots n_k \to \infty} \|\tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{n_0}\| = k+1.$$

existen $x_0 \in S_E$ y $x_{n_i} \in B_E$, $i = 1 \ldots k$ tales que

$$\pi(x_0) = \tilde{x}_0 \text{ y } \pi(x_{n_i}) = \tilde{x}_{n_i}, \quad i = 1 \ldots k.$$

Asi,

$$\begin{aligned} k+1 &= \lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \|\tilde{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_{n_i}\| \\ &\leq \lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \|x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| \\ &\leq \lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \left(\|x_0\| + \sum_{i=1}^{k} \|x_{n_i}\| \right) = k+1, \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \|x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1.$$

Por ser E un espacio LwR se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_0\| \leq \lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

Por tanto, hemos demostrado que E/F es un espacio LkR. ■

En forma similar se puede probar el siguiente,

Teorema: 6 *Sea E un espacio de Banach reflexivo LwR y $F \subsetneq E$ un subespacio cerrado de E Entonces, E/F es un espacio LwR.*

Teorema: 7 *Sea E un espacio de Banach reflexivo, Ukk y $F \subsetneq F$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F es un espacio Ukk.*

Prueba: Consideremos $\epsilon > 0$ y $(\tilde{x}_n) \subset E/F$ tal que

$$(\tilde{x}_n) \subset B_{E/F}, \quad \tilde{x}_n \xrightarrow{w} \tilde{x} \quad \text{y} \quad Sep(\tilde{x}_n) \geq \epsilon.$$

Vamos a demostrar que existe un $0 < \delta < 1$ tal que $\|\tilde{x}\| \leq 1 - \delta$. Para cada $\tilde{x}_n \in B_{E/F}$ existe

$$x_n \in B_E \text{ tal que } \pi(x_n) = \tilde{x}_n.$$

Claramente, (x_n) es una sucesión acotada en el espacio reflexivo E. Entonces, podemos seleccionar una subsucesión (y_n) de (x_n) que converge debilmente a $z \in E$.

Como la norma es debilmente semicontinua inferiormente se tiene que $\|z\| \leq 1$. Pero $\pi(y_n) \xrightarrow{w} \pi(z)$, por lo tanto, $\pi(z) = \tilde{x}$, y asi $\|z\| \geq \|\tilde{x}\| = 1$, en consecuencia, $\|z\| = 1$.

Para $n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m$ se tiene que

$$\|y_n - y_m\| \geq \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\| \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad Sep(y_n) \geq \epsilon.$$

Asi, tenemos

$$(y_n) \subset S_E, \quad y_n \xrightarrow{w} z \quad \text{y} \quad Sep(y_n) \geq \epsilon.$$

Por ser el espacio E Ukk entonces

$$\|\tilde{x}\| \leq \|z\| \leq 1 - \delta.$$

Asi, concluimos que E/F es un espacio Ukk. ∎

Corolario: 1 *Sea E un espacio de Banach NUC y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F es unespacio NUC.*

Teorema: 8 *Sea E un espacio sde Banach reflexivo que satisface la propiedad (H) y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonce, E/F tiene la propiedad (H).*

Prueba: Sea $\tilde{x} \in S_{E/F}$ y $(\tilde{x}_n) \subset S_{E/F}$ tal que $\tilde{x}_n \xrightarrow{w} \tilde{x}$. Queremos probar que $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$..

En efecto. Existen $x \in S_E$ y $x_n \in S_E, \quad n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\pi(x) = \tilde{x} \quad \text{y} \quad \pi(x_n) = \tilde{x}_n.$$

Claramente, (x_n) es una sucesión acotada y por ser reflexivo el espacio E existe una subsucesi'on (y_n) de (x_n) tal que $y_n \xrightarrow{w} z, \quad z \in E$.

Usando un argumento similar al dado en el Teorema (6) se prueba que $\|z\| = 1$.

Como E satisface la propiedad (H) se tiene que $y_n \to z$. Pero (y_n) es una subsucesión arbitraria de (x_n) y $\pi(y_n) \to \pi(z) = \tilde{x}$. Por lo tanto $(\tilde{x}) \to \tilde{x}$ y asi hemos probado que E/F posee la propiedad (H). ∎

Consideremos convenientemente acotar; que en [11] aparece el siguiente resultado:

Un espacio de Banach E posee la propiedad (D) si y sólo si, E es un espacio reflexivo que satisface la propiedad (H).

Ahora tenemos el siguiente resultado probado por Montesinos en [11]

Corolario: 2 *Sea E un espacio de Banach que satisface la propiedad (D) y $F \subseteq E$ un subespacio cerrado E. Entonces, E/F posee la propiedad (D).*

Donde la propiedad (D) se define de la siguiente manera, (ver[14])

Definición 13 *Sea E un espacio de Banach. Decimos que E satisface la propiedad (D) si para cualquier conjunto cerrado C disjunto con B_E existe $a \in C$ tal que*

$$D(a, B_E) \cap C = \{a\}.$$

donde

$$D(a, B_E) = C_0(\{a\} \cup B_E)$$

En [5] Giles - Sims - yorke debilitan la propiedad (D) e introducen la w-propiedad (D) en la forma siguiente,

Definición 14 *Sea E un espacio de Banach. Decimos que E satisface la w-propiedad (D) si para todo conjunto debilmente secuencialmente cerrado C disjunto de B_E existe un $a \in C$ tal que*

$$D(a, B_E) \cap C = \{a\}.$$

En el mismo articulo los autores lograrón la siguiente caracterización:

Un espacio de Banach E posee la w-propiedad (D) si y sólo si E es reflexivo.

Finalmente, tenemos el siguiente,

Teorema: 9 *Sea E un espacio de Banach que posee la w-propiedad (D) y $F \subseteq E$ es un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F satisface la w-propiedad (D).*

Prueba: Es Clara usando la caracterización de la w-propiedad (D). ∎

Referencias

[1] J.A. Clarkson, Uniformly Convex Spaces, Trans. A.M.S. 40, (1936), 396-414.

[2] M.M. Day, Normed Linear Space, 3ª edición, Springer-verlag, (1973).

[3] K. Fan - I. Glicksberg, Fully Convex Normed Linear Spaces, Proc. Nat. Acad. Scie. USA. 41, (1955), 947-953.

[4] K. Fan - I. Glicksberg, Some Geometric Properties of the Spheres in a Normed Linear Space, Duke Math Jour.25, (1958), 553-568.

[5] J.R. Giles - B. Sims - A.C. Yorke. On the Drop and weakDrop Properties for a Banach Space, Bull. Aust. Math. Suc. 41, (1990), 503-507.

[6] R. Huff, Banach Spaces which are Nearly Uniformly Convex, Ruck. Mount. Jour. Math. 10, (1980), 743-749.

[7] V.I. Istratescu. Strict Convexity and Complex Strict Convexity, Theory and Applications, Marcel Dekker, Inc.

[8] R.C. James, Uniformly Non-square Banach Space, Ann, Math. 2, 80, (1964), 542-550.

[9] Bor - Luh lin - Wenyao Zhang, Some Geometric Properties Related to Uniform Convex of Banach Spaces, Funtion Spaces, Lecture Notes in Pure and Appl.Math. Marcel Dekker - Inc. 136, (1991), 281-294.

[10] A.R. Lovaglia, Locally Uniformly Convex Banach Spaces, Trans. A. M. S. 78, (1955), 225-238.

[11] V.Montesinos, Drop Property Equals Reflexivity, Studia Math. LXXXVI, (1987), 93-100.

[12] V.Montesinos, J. R. Torregrosa, Sobre Espacios de Banach Localmente Uniformemente Rotundos.

[13] R.R. Phelps, Uniqueness of Hanh - Banach, Extensión and Unique best Approximation, Trans. A.M.S. 95, (1960), 238-255.

[14] S. Rolewicz, On Drop Property, Studia Math. LxxxV, (1987), 27-35.

[15] Nan-chau-xun-Wang Jian-Hua, On the $Lk - UR$ and $l - kR$ Spaces, Math. Proc. Camb. Phil. Suc. 104, (1988), 521-526.