Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

Compacidad débil en espacios de Banach y aplicaciones de un Teorema de R. C. James

Wilman Brito

Notas de Matemática
Serie: Pre-Print
No. 180

Mérida - Venezuela
1998

Notas de Matemática, No. 180
Mérida, October 1998.

Compacidad débil en espacios de Banach y aplicaciones de un Teorema de R. C. James

Wilman Brito

1 Introducción

En ([15]), V. Klee conjeturó que un subconjunto convexo y cerrado K de un espacio de Banach X es débilmente compacto si y sólo si cada funcional lineal continuo sobre X alcanza su máximo sobre K. Con anterioridad R. C. James ([13]) había probado que *si cualquier funcional lineal continuo sobre un espacio de Banach separable alcanzaba su supremo sobre la bola unitaria cerrada, entonces dicho espacio es reflexivo.* En el año de 1964 salió publicado un artículo de R. C. James ([14]), donde él presentaba una prueba de la conjetura de Klee eliminando la hipótesis sobre convexidad. Esa demostración era y sigue siendo difícil. Algunas otras pruebas de ese resultado han sido escritas tratando de evitar su complejidad (ver por ejemplo [12], [24], [20], [3]). En un esfuerzo por brindar una demostración menos complicada, S. Simons ([23]) introdujo una desigualdad que permite, en el caso separable, una demostración sencilla del Teorema de James. Otra demostración interesante del Teorema de James es dada por Holmes en ([12], pág. 157-160), haciendo uso de la propiedad del límite doble intercambiable.

La presentación que hacemos en estas notas de la prueba del Teorema de James es la ofrecida por ([2]) usando la desigualdad de Simons. Son muchas y muy variadas las aplicaciones que se derivan del Teorema de James en el ámbito de los espacios de Banach. Algunas de ellas son presentadas en la sección *Aplicaciones del Teorema de James* .

2 Topologías débiles en espacios de Banach

Si $(X, \|\cdot\|)$ denota un espacio de Banach, entonces B_X denotará su bola unitaria cerrada con centro en el origen, mientras que S_X designa su borde; esto es S_X es la esfera unitaria con centro en 0. De modo más general, $B_X(x,r)$ (respectivamente $S_X(x,r)$) representa la bola cerrada (respectivamente la esfera) de centro x y radio $r > 0$.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, entonces su norma $\|\cdot\|$ genera una topología natural, denotada por $\mathcal{J}_{\|\cdot\|}$, bajo la cual $(X, \mathcal{J}_{\|\cdot\|})$ es un espacio lineal topológico localmente convexo. Existen, sin embargo, otras topologías interesantes sobre X las cuales permiten obtener información valiosa sobre la estructura de esos espacios. Una de tales topologías, la llamada *topología débil*, se genera através de *todos* los funcionales lineales continuos sobre X. Si uno se sitúa ahora sobre el dual X^* uno puede describir, además de las topologías fuerte y débil, una nueva topología, llamada la *topología débil-$*$*, con la cual se prueba un resultado extraordinario que nos obliga a mirar hacia atrás y recordar compacidad en los espacios de Banach de dimensión finita, el denominado Teorema de Banach-Alaoglu, que establece que todo subconjunto norma-acotado y débil-$*$ cerrado en X^*, es débil-$*$ compacto.

2.1 Nociones Topológicas

Comenzaremos por introducir algunas notaciones y herramientas que utilizaremos a lo largo de estas notas.

Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{J}$ una topología sobre X. Un **entorno** de un punto $x \in X$ es cualquier conjunto $V \in \mathcal{J}$ tal que $x \in V$. Una colección no vacía $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ es una **base** para $\mathcal{J}$ si cualquier conjunto en $\mathcal{J}$ es unión de una subfamilia de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{B}$. Finalmente, diremos que una colección no vacía $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{J}$ es una **subbase** de $\mathcal{J}$ si existe una base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ que cumple con lo siguiente: para cada $G \in \mathcal{B}$ existe una familia finita, digamos $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\} \subset \mathcal{C}$, tal que $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$.

Sea X un conjunto no vacío y sean $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ dos topologías sobre X. Diremos que $\mathcal{J}_1$ es **más fina** que $\mathcal{J}_2$ (o que $\mathcal{J}_2$ es **menos fina o más débil o más pequeña** que $\mathcal{J}_1$) si cada conjunto $\mathcal{J}_2$-abierto es $\mathcal{J}_1$-abierto; esto es equivalente a decir que la aplicación identidad $i : (X, \mathcal{J}_1) \to (X, \mathcal{J}_2)$ es continua.

Sea ahora $\mathcal{G}$ una colección no vacía de subconjuntos de X y consideremos la familia $\mathcal{T}$ de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{T} \neq \emptyset$ y

$$\mathcal{J}_{\mathcal{G}} = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T$$

es la topología más pequeña sobre X conteniendo a $\mathcal{G}$, a la cual llamaremos la **topología generada** por $\mathcal{G}$. Es fácil ver que si $\mathcal{J}'_{\mathcal{G}}$ es la colección de todos los subconjuntos de X que son intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}$ consiste exactamente de todos los subconjuntos de X que son uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{J}'_{\mathcal{G}}$. Más aún, $\mathcal{J}'_{\mathcal{G}}$ es una base para $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}$ y $\mathcal{G}$ una subbase.

El siguiente mecanismo, es un proceso natural para generar la topología débil. Comencemos con un conjunto no vacío X, el cual puede o no estar provisto de alguna topología, y sea $(Y, \mathcal{J}_Y)$ un espacio topológico. Se considera una función $f : X \to (Y, \mathcal{J}_Y)$ y lo que se desea es construir la topología más pequeña sobre X, digamos $\mathcal{J}_X$, que permita que f sea $\mathcal{J}_X - \mathcal{J}_Y$ continua. Hay evidencia de la existencia de al menos una topología que hace que f sea $\mathcal{J}_X - \mathcal{J}_Y$ continua. En efecto, si tomamos a X con la topología discreta, $\mathcal{J}_X$, resulta entonces claro que f es $\mathcal{J}_X - \mathcal{J}_Y$ continua. La elección de la topología discreta no es la más afortunada por lo que es deseable poder contar con otra topología, distinta a la discreta, y que nos resuelva el problema. Consideremos entonces

$$\mathcal{J}_X = \{f^{-1}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in \mathcal{J}_Y\}.$$

Es fácil establecer que en realidad $\mathcal{J}_X$ es la topología más pequeña sobre X que permite que f sea $\mathcal{J}_X - \mathcal{J}_Y$ continua.

Generalicemos el argumento anterior en el siguiente sentido: tomemos el conjunto X y en lugar de tener un único espacio topológico $(Y, \mathcal{J}_Y)$ y una única función $f : X \to (Y, \mathcal{J}_Y)$, elijamos una familia de espacios topológicos digamos, $(Y_i, \mathcal{J}_i)_{i \in I}$, y una familia de funciones $f_i : X \to (Y_i, \mathcal{J}_i)$ $i \in I$, y como antes queremos construir la topología más pequeña sobre X que permita que todas las funciones f_i sean continuas. He aquí el procedimiento. Para cada $i \in I$, sea

$$\mathcal{J}_i = \{f_i^{-1}(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \in \mathcal{J}_i\}$$

y pongamos

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{J}_i.$$

En general, $\mathcal{G}$ no es una topología, pero sí lo es $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}$, la topología generada por $\mathcal{G}$. A esta topología se le llama la **topología inicial o proyectiva** sobre X asociada a la familia $(f_i)_{i \in I}$. Es claro que $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}$ es la topología más pequeña sobre X bajo la cual cada f_i es $\mathcal{J}_{\mathcal{G}} - \mathcal{J}_i$ continua.

En el caso especial en que $Y_i = \mathbf{K}$ para todo $i \in I$, donde $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}$, $(i \in I)$, es la topología natural de $\mathbf{K}$, y $T = (f_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones a valores reales o complejos definidos sobre X, entonces la topología inicial asociada a T la denotaremos por $\sigma(X, T)$. En este caso especial podemos ser un poco más preciso en lo referente a la clase $\mathcal{G}$. En efecto, teniendo en cuenta que la colección de todos los intervalos abiertos de longitud finita (resp. las bolas abiertas de radio finito) también genera la topología de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$), entonces basta con definir, para cada $x_0 \in X$, los conjuntos

$$V(x_0; f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon\}$$

donde $f_1, \dots, f_n : X \to \mathbb{K}$ son funciones y $\varepsilon > 0$, para uno convencerse que la colección

$$\mathcal{J}' = \{V(x; f_1, f_2, \dots, f_n, \varepsilon) \mid x \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0\}$$

forma una base para la topología inicial $\sigma(X, T)$ asociada a la familia $T = (f_i)_{i\in I}$.

Uno puede, según lo expresado anteriormente, probar sin ninguna dificultad que la topología inicial $\mathcal{J}_G$ asociada a la familia $(f_i)_{i\in I}$ es Hausdorff siempre que la familia $(f_i)_{i\in I}$ **separe los puntos** de X; *esto significa que si $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existe un $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$.*

Como una aplicación de lo ya visto, mostraremos de inmediato cómo se obtiene la **topología producto** de una familia de espacios topológicos.

Sea $(X_i, \mathcal{J}_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. El **producto cartesiano** de los X_i, en notación $\prod_{i\in I} X_i$, se define como

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{k\in I} X_k \;\middle|\; x(i) \in X_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

En este conjunto destacan por su importancia las **proyecciones** sobre los *ejes* X_i. Para cada $k \in I$, definamos la **aplicación proyección**

$$p_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$$

por $p_k(x) = x(k)$ para todo $x \in \prod_{i\in I} X_i$. La topología inicial asociada a la familia $(p_i)_{i\in I}$ es llamada la **topología producto**, y será denotada por $\mathcal{J}_p$, mientras que el espacio topológico $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{J}_p)$ se llamará el **espacio producto**.

Un par de observaciones son pertinentes para el manejo de las notaciones:

1. Por conveniencia, si $x \in \prod_{i\in I} X_i$, entonces identificaremos a x por sus valores sobre I; esto es, escribiremos $x = (x_i)_{i\in I}$, donde hemos puesto $x(i) = x_i$ para todo $i \in I$.

2. Si I es un conjunto infinito numerable, entonces $\prod_{i\in I} X_i$ será denotado por $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

2.2 Las topologías débil y débil-*

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, X^* denotará su dual (topológico). La **topología débil** sobre X, denotada por $\sigma(X, X^*)$ o ω, es la topología inicial asociada a la familia X^*. Esto significa, en vista a lo expresado en la sección anterior, que $\sigma(X, X^*)$ es la topología más débil sobre X bajo la cual cada funcional lineal $x^* : X \to \mathbf{K}$ es $\sigma(X, X^*) - \mathcal{J}_{\mathbf{K}}$ continuo. Es fácil establecer que $(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff y que cada entorno básico del 0 en $(X, \sigma(X, X^*))$ es de la forma

$$V(0; x_1^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X \,:\, |x_i^*(x)| < \varepsilon\}$$

donde $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.
Una sucesión (x_n) en X *converge débilmente* a un $x \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$$

para todo $x^* \in X^*$.

Cuando no exista motivo de confusión, la notación $\overline{A}^{\omega}$ será usada en lugar de $\overline{A}^{\sigma(X,X^*)}$. Similarmente, usaremos las expresiones $x_n \xrightarrow{\omega} x$, $\omega - \lim_n x_n = x$, o $\sigma(X, X^*) - \lim_n x_n = x$ para decir que una sucesión (x_n) en X converge débilmente a un $x \in X$.

Aún cuando la topología débil es más pequeña que la de la norma (al menos cuando X es de dimensión infinita) ellas comparten los mismos conjuntos convexos y los mismos funcionales continuos.

Teorema 2.1 (Mazur) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea K un subconjunto convexo de X. Entonces $\overline{K}^{\|\cdot\|} = \overline{K}^{w}$*

Prueba. Puesto que $\mathcal{J}_\omega \subseteq \mathcal{J}_{\|\cdot\|}$, resulta que $\overline{K}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{K}^{w}$. Supongamos que $\overline{K}^{\|\cdot\|} \neq \overline{K}^{w}$ y sea $x_0 \in \overline{K}^{w} \setminus \overline{K}^{\|\cdot\|}$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe un $x^* \in X^*$ tal que

$$\sup x^*(\overline{K}^{\|\cdot\|}) \leq \alpha < \beta \leq x^*(x_0) \tag{1}$$

para algún $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pero al estar x_0 en $\overline{K}^{w}$ se garantiza la existencia de una red (x_γ) en K que cumple con $x_0 = \omega - \lim x_\gamma$. En particular,

$$x^*(x_0) = \lim x^*(x_\gamma)$$

lo cual es violatorio a lo establecido en (1), ya que al estar la red (x_γ) en K resulta que $x^*(x_\gamma) \leq \sup x^*(\overline{K}^{\|\cdot\|})$ para todo γ, y así

$$x^*(x_0) = \lim_\gamma x^*(x_\gamma) \leq \sup x^*(\overline{K}^{\|\cdot\|}) < x^*(x_0).$$

■

Algunas consecuencias interesantes se deducen ahora del Teorema de Mazur. Como siempre usaremos la notación $co(A)$ para expresar la cápsula o envoltura convexa de un subconjunto A de X y $\overline{co}(A)$ la clausura de $co(A)$.

Corolario 2.1 *Si (x_n) es una sucesión en X que converge débilmente a algún $x \in X$, entonces $x \in \overline{co}\{x_m : m \in \mathbf{N}\}$; es decir, existe una sucesión $(\tilde{x}_n)_n$ en X tal que*
(a) $\tilde{x}_n \in co\{x_m : m \in \mathbf{N}\}$, y
(b) $\lim_n \|\tilde{x}_n - x\| = 0$.

Prueba. Sea $K = co\{x_m : m \in \mathbf{N}\}$. Entonces K es convexo y por consiguiente $x \in \overline{K}^\omega$. Por el Teorema 2.1, $\overline{K}^\omega = \overline{K}^{\|\cdot\|}$, de donde se sigue la existencia de una sucesión $(\tilde{x}_n)_n$ en X verificando (1) y (2). ■

Corolario 2.2 *Si Y es un subespacio lineal de X, entonces $\overline{Y}^\omega = \overline{Y}^{\|\cdot\|}$.*

La **topología débil-$*$** sobre X^*, en notación $\sigma(X^*, X)$ o ω^*, es la topología inicial asociada a la familia JX, donde $J : X \to X^{**}$ es la aplicación canónica natural definida por $Jx(x^*) = x^*(x)$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$. Cada ω^*-entorno básico del $0 \in X^*$ es de la forma

$$V^*(0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| \leq \varepsilon\}$$

donde $x_1, \ldots, x_n \in X$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\varepsilon > 0$. No es difícil probar que con la $\sigma(X^*, X)$-topología, X^* es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo.
Una sucesión (x_n^*) en X^* *ω^*-converge* a un $x^* \in X^*$ si

$$\lim_{n\to\infty} x_n^*(x) = x^*(x)$$

para todo $x \in X$.

De modo similar a como hicimos con la topología débil, la notación $\overline{A}^{\omega^*}$ será usada en lugar de $\overline{A}^{\sigma(X^*,X)}$. Similarmente, las notaciones $x_n \xrightarrow{\omega^*} x^*$, $\omega^* - \lim_n x_n^* = x^*$, o $\sigma(X^*, X) - \lim_n x_n^* = x^*$ serán utilizadas para expresar que una sucesión (x_n^*) en X^* ω^*-converge a un $x^* \in X^*$.

Respecto a la topología ω^* debemos mencionar dos resultados relevantes que usaremos en estas notas y cuyas pruebas omitiremos (ver, por ejemplo: [5] para una demostración).

Teorema 2.2 (Goldstine) *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces*

$$\overline{J(B_X)}^{\omega^*} = B_{X^{**}},$$

donde $J : X \to X^{**}$ *es el isomorfismo (isométrico) canónico.*

Observemos que la ω^*-topología usada en el teorema de Goldstine es precisamente $\sigma(X^{**}, X^*)$. Puesto que la aplicación canónica natural $J : X \to X^{**}$ es una isometría del primer espacio en el segundo, uno puede identificar cada subconjunto M de X con su imagen $J(M)$ en X^{**}. Bajo esta identificación el Teorema de Goldstine dice que B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Una característica importante que posee la ω^*-topología la constituye, sin duda, el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Banach-Alaoglu) *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces la bola unitaria cerrada* B_{X^*} *en* X^* *es* ω^**-compacto. En particular, cada subconjunto de* X *norma-acotado y* ω^**-cerrado es* ω^**-compacto.*

3 El Teorema de Eberlein-Šmulian

Es un hecho ya establecido que la topología débil de un espacio de Banach X de dimensión infinita no es, en general, ni completa ni metrizable. Sin embargo, algunos subconjuntos especiales de X se comportan de una manera envidiable. Ellos son los conjuntos débilmente compactos y para caracterizarlos **¡tan sólo sucesiones son suficientes!** Este es el contenido del famoso teorema de Eberlein-Šmulian. He aquí los preparativos para su demostración.

Recordemos que si (S, τ) es un espacio topológico Hausdorff, un subconjunto no vacío K de S se dice que es:

(a) *relativamente τ-compacto* si $\overline{K}^{\tau}$ es compacto.
(b) *relativamente secuencialmente τ-compacto* si cada sucesión en K posee una subsucesión τ-convergente en S.
(c) *relativamente numerablemente τ-compacto* si cada sucesión en K posee un τ-punto límite (también llamado τ-punto de acumulación) en S.

De modo general valen, en cualquier espacio topológico Hausdorff, las siguientes implicaciones:

$$(a) \Longrightarrow (c) \qquad \text{y} \qquad (b) \Longrightarrow (c)$$

mientras que si nuestro espacio es *métrico*, esas tres propiedades son equivalentes. *Una de las razones que hacen interesante y maravillosa a la topología débil de un espacio de Banach es que esas tres propiedades aún permanecen equivalentes a pesar de que los subconjuntos débilmente compactos no son necesariamente metrizables.* Veamos un ejemplo. Tomemos un espacio de Banach reflexivo y no separable, por ejemplo: $X = \ell_2(\Gamma)$ con Γ no-numerable. Entonces B_X es débilmente compacto, pues X es reflexivo, pero no es metrizable. En efecto, si fuera B_X metrizable, él sería débilmente separable y gracias al Teorema de Mazur, norma separable por su convexidad. Por esto, X sería norma separable, lo cual es imposible.

Los siguientes lemas constituyen un aperitivo a la demostración del Teorema de Eberlein-Šmulian. Aquí seguimos los pasos de R. Whitley ([26]).

Lema 3.1 (Whitley) *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y E un subespacio de dimensión finita de X^{**}. Entonces existe una colección finita $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ en S_{X^*} tal que la desigualdad*

$$\tfrac{1}{2}\|x^{**}\| \leq \max\{\,|x^{**}(x_i^*)| \,:\, i = 1, \ldots, n\}$$

se cumple para todo $x^{**} \in E = E^{**}$.

Prueba. Puesto que S_E es norma-compacto, uno puede determinar, con $\varepsilon = 1/4$, una ε-red finita $F = \{x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}\}$ para S_E; es decir,

$$S_E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_E(x_i^{**}, 1/4) \tag{2}$$

donde $B_E(x_i^{**}, 1/4)$ es una bola cerrada de X con centro x_i^{**} y radio $1/4$. Por otro lado, ya que para cada $i = 1, \ldots, n$

$$1 = \|x_i^{**}\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x_i^{**}(x^*)|,$$

uno puede elegir un $x_i^* \in S_{X^*}$ de modo que

$$|x_i^{**}(x_i^*)| > 1 - \varepsilon = \tfrac{3}{4}.$$

Ahora, si $x^{**} \in E$, $x^{**} \neq 0$, entonces $z^{**} = x^{**}/\|x^{**}\| \in S_E$ y gracias a (2) existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\|z^{**} - x_k^{**}\| \leq \tfrac{1}{4};$$

en particular

$$\|z^{**}(x_k^*) - x_k^{**}(x_k^*)\| \leq \tfrac{1}{4}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|x^{**}(x_k^*)\| &= \|x^{**}\|\,|z^{**}(x_k^*)| \\ &= \|x^{**}\|\,|z^{**}(x_k^*) - x_k^{**}(x_k^*) + x_k^{**}(x_k^*)| \\ &\geq \|x^{**}\| \left(|z^{**}(x_k^*)| - |x_k^{**}(x_k^*) + x_k^{**}(x_k^*)|\right) \\ &> \|x^{**}\|\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\|x^{**}\|,\end{aligned}$$

lo cual da por finalizada la prueba. ■

Lema 3.2 (Whitley) *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto relativamente numerablemente débilmente compacto de X. Entonces, para cada $x^{**} \in \overline{JK}^{\omega^*}$ existe una sucesión (x_n) en K tal que $Jx = x^{**}$ para cualquier ω-punto límite x de la sucesión (x_n).*

Prueba. Sea $x^{**} \in \overline{JK}^{\omega^*}$ y tomemos un $x_1^* \in S_{X^*}$. Puesto que $x^{**} \in \overline{JK}^{\omega^*}$, cada ω^*- entorno de x^{**} intersecta a JK; en particular, el ω^*-entorno de x^{**}

$$V_1 = \{\, y^{**} \in X^{**} \;:\; |(x^{**} - y^{**})(x_1^*)| < 1\}$$

intersecta a JK. Sea $x_1 \in K$ tal que $Jx_1 \in V_1 \cap JK$ y observemos que

$$\left|(x^{**} - Jx_1)(x_1^*)\right| < 1.$$

Definamos $E_1 = [x^{**}, x^{**} - Jx_1]$, el subespacio lineal generado por x^{**} y $x^{**} - Jx_1$. Ya que $dim(E) < \infty$, uno apela al Lema 3.1 para obtener una colección finita $x_2^*, \ldots, x_{n(2)}^*$ en S_{X^*} satisfaciendo

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \max\{\, |y^{**}(x_i^*)| \;:\; i = 1, \ldots, n(2)\},$$

para todo $y^{**} \in E_1$. De nuevo, como x^{**} sigue estando en $\overline{JK}^{\omega^*}$, el ω^*-entorno de x^{**},

$$V_2 = \{\, y^{**} \in X^{**} \,:\, |(x^{**} - y^{**})(x_i^*)| < 1/2,\ i = 1, \ldots, n(2)\},$$

contiene un miembro de JK. Sea $x_2 \in K$ tal que $Jx_2 \in V_2 \cap JK$ y notemos que

$$\left|(x^{**} - Jx_2)(x_i^*)\right| < 1/2, \qquad i = 1, \ldots, n(2).$$

Formemos entonces $E_2 = [x^{**}, x^{**} - Jx_1, x^{**} - Jx_2]$ y volvamos a hacer uso del Lema 3.1 para determinar elementos $x^*_{n(2)+1}, \ldots, x^*_{n(3)}$ en S_{X^*} que verifiquen

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \max\{\, |y^{**}(x_i^*)| \,:\, i = 1, \ldots, n(3)\}$$

para cualquier $y^{**} \in E_2$.

Una vez más. El ω^*-entorno de x^{**},

$$V_3 = \{\, y^{**} \in X^{**} \,:\, |(x^{**} - y^{**})(x_i^*)| < 1/2,\ i = 1, \ldots, n(3)\},$$

intersecta a JK, por lo que se garantiza la existencia de un $x_3 \in K$ para el cual se cumple que

$$\left|(x^{**} - Jx_3)(x_k^*)\right| < 1/3, \qquad k = 1, \ldots, n(3).$$

Aplicando el Lema 3.1 a $E_3 = [x^{**}, x^{**} - Jx_1, x^{**} - Jx_2, x^{**} - Jx_3]$, podemos de nuevo hallar puntos $x^*_{n(3)+1}, \ldots, x^*_{n(4)}$ en S_{X^*} satisfaciendo la desigualdad

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \max\{\, |y^{**}(x_i^*)| \,:\, i = 1, \ldots, n(4)\}$$

para todo $y^{**} \in E_3$. Continuando inductivamente con este proceso uno logra obtener un par de sucesiones (x_n) en K y $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ en S_{X^*} satisfaciendo, con $n(1) = 1$, las desigualdades

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \max\{\, |y^{**}(x_i^*)| \,:\, i = 1, \ldots, n(j+1)\}, \qquad y^{**} \in E_j$$

y

$$\left|(x^{**} - Jx_j)(x_k^*)\right| < 1/j, \qquad k = 1, \ldots, n(j). \tag{3}$$

Sea x un punto límite débil de la sucesión $(x_n) \subseteq K$, el cual existe ya que K es relativamente débilmente numerablemente compacto. Puesto que $E = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ es convexo y débilmente cerrado, tenemos que $x \in E$. De esto se deduce que $x^{**} - Jx \in \overline{Y}$, donde $Y = [x^{**}, x^{**} - Jx_1, x^{**} - Jx_2, \dots,]$. Más aún, nuestra construcción de (x_n) y $(x_k^*)_{k=1}^{\infty}$ nos asegura que

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \max\{\, |y^{**}(x_n^*)| \,:\, n = 1, 2, \dots\} \tag{4}$$

se cumple para todo $y^{**} \in Y$. Por continuidad, vemos que (4) sigue siendo válida para todo $y^{**} \in \overline{Y}$. En particular,

$$\frac{\|x^{**} - Jx\|}{2} \leq \max\{\, |(x^{**} - Jx)(x_n^*)| \,:\, n = 1, 2, \dots\} \tag{5}$$

ya que $x^{**} - Jx \in \overline{Y}$. Además, de (3) resulta que para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo

$$\left|(x^{**} - Jx_p)(x_m^*)\right| < 1/j$$

para todo $p \geq n(j) \geq m$ y, en consecuencia, la desigualdad

$$\begin{aligned}\left|(x^{**} - Jx)(x_m^*)\right| &\leq \left|(x^{**} - Jx_p)(x_m^*)\right| + \left|(Jx_p - Jx)(x_m^*)\right| \\ &< \frac{1}{j} + \left|x_m^*(x_p - x)\right|\end{aligned}$$

vale para todo $p \geq n(j) \geq m$. Pero al ser x un punto límite débil de (x_n), entonces para cada $N > m$, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq n(N) \geq m$ y

$$\left|x_m^*(x_p - x)\right| < \frac{1}{N}.$$

De todo esto se concluye que $(x^{**} - Jx)(x_m^*) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y, gracias a (5), uno obtiene finalmente que $x^{**} = Jx$. ∎

Observación. La construcción de Whitley (Lema 3.2) nos muestra que

$$\overline{JK}^{\omega^*} \subseteq JX = X.$$

Esta inclusión nos revela que para demostrar que un subconjunto norma-acotado K de X es relativamente débilmente compacto, es suficiente aplicar la siguiente estrategia: miramos a K dentro de X^{**} por medio de la aplicación canónica $J : X \to X^{**}$; esto es consideramos JK. Clausurando a JK en la ω^*-topología de X^{**} e invocando el Teorema de Alaoglu nos damos cuenta que $\overline{JK}^{\omega^*}$ es compacto. Aquí está la clave: si $\overline{JK}^{\omega^*}$ permanece dentro de $JX = X$ entonces $\overline{K}^{\omega} = J^{-1}(\overline{JK}^{\omega^*})$ resultará débilmente compacto. La razón de esto radica en el hecho de que la aplicación $J : (X, \omega) \longrightarrow (JX, \omega^*)$ es un homeomorfismo lineal del primer espacio sobre el segundo.

Lo bueno se hace esperar. Ahora el Teorema de Eberlein-Šmulian.

Teorema 3.1 (Eberlein-Šmulian) *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto no vacío y norma acotado de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) K es relativamente débilmente compacto.
(b) K es relativamente débilmente secuencialmente compacto.
(c) K relativamente débilmente numerablemente compacto.

Prueba. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea (x_n) una sucesión en K e indiquemos con $E = \overline{[(x_n)]}$ el subespacio norma-cerrado generado por la sucesión (x_n). Entonces E es un espacio de Banach norma-separable y, por consiguiente, existe un subconjunto numerable $F \subseteq E^*$ tal que

$$\text{si } x \in E \text{ y } x_n^*(x) = 0 \text{ para todo } x_n^* \in F, \text{ entonces } x = 0. \qquad (6)$$

Ahora bién, como $\overline{K}^{\omega}$ es compacto, la función $d : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x - y)|}{(\|x_n^*\| + 1)2^n}$$

es, en virtud de (6), una métrica sobre E. Si consideramos la aplicación identidad

$$id : (\overline{K}^{\omega}, \omega) \longrightarrow (\overline{K}^{\omega}, d),$$

entonces id resulta ser un homeomorfismo por el hecho de ser $\overline{K}^{\omega}$ compacto. De esto se sigue que $d\,|_{K \times K}$ es una métrica que genera la topología débil de K, y por consiguiente, (K, ω) es metrizable.

Siendo $E = \overline{E}^{\omega}$, tenemos que $\overline{K \cap E}^{\omega}$ es metrizable en (E, ω) y gracias a que compacidad y compacidad secuencial son equivalentes en espacios métricos, tenemos que $\overline{K \cap E}^{\omega}$ es débilmente secuencialmente compacto. En particular, si x es un punto límite débil de la sucesión (x_n), entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de (x_n) que converge débilmente a x en E. Es claro que también $(x_{n_k})_k$ converge débilmente a x en X.

$(b) \Rightarrow (c)$. Es trivial.

$(c) \Rightarrow (a)$. Por el Lema 3.2, $\overline{JK}^{\omega^*}$ queda dentro de JX y puesto que $J : (X, \omega) \to (JX, \omega^*)$ un homeomorfismo, entonces $\overline{K}^{\omega}$ es compacto. ■

El Teorema de Eberlein-Šmulian permite reducir el análisis de la demostración de que un conjunto, viviendo en un espacio de Banach, es débilmente compacto al caso en que nuestro espacio de Banach sea norma-separable. Dicho de otro modo, compacidad débil es una propiedad separablemente determinada. En efecto, del Teorema 3.1 se deduce rápidamente el siguiente

Corolario 3.1 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto no vacío de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K es débilmente compacto.

(b) $K \cap Y$ es débilmente compacto para todo subespacio norma-cerrado y norma-separable Y de X.

4 Compacidad débil al estilo Grothendieck

Para precisar un poco la notación, como siempre usaremos la letra J para denotar el isomorfismo (isométrico) canónico de X en X^{**}, mientras que J_1 denotará el isomorfismo canónico de X^* en X^{***}. Comencemos con un clásico:

Teorema 4.1 (Grothendieck) *Sea K un subconjunto no vacío, acotado y débilmente cerrado de X. Si para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto débilmente compacto $K_\varepsilon \subseteq X$ tal que*

$$K \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon B_X,$$

entonces K es débilmente compacto.

Prueba. Sea $\overline{JK}^{\omega^*}$ la ω^*-clausura de JK en X^{**}, donde $J : X \to X^{**}$ es la aplicación canónica. Por el Teorema de Banach-Alaoglu, $\overline{JK}^{\omega^*}$ es compacto. Para ver K es débilmente compacto sólo tenemos que aplicar nuestra estrategia; es decir, probar que $\overline{JK}^{\omega^*}$ vive dentro de $X = JX$. Ahora bién, como K_ε es débilmente compacto resulta que $J(K_\varepsilon)$ también lo es y, en particular, ω^*-compacto. Así,

$$\overline{JK_\varepsilon}^{\omega^*} = JK_\varepsilon.$$

Esto junto con el Teorema de Goldstine produce, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\overline{JK}^{\omega^*} &\subseteq \overline{J(K_\varepsilon + \varepsilon B_X)}^{\omega^*}\\ &\subseteq \overline{JK_\varepsilon}^{\omega^*} + \varepsilon\overline{J(B_X)}^{\omega^*}\\ &= JK_\varepsilon + \varepsilon B_{X^{**}},\end{aligned}$$

de donde resulta que $\overline{JK}^{\omega^*} \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} (JK_\varepsilon + \varepsilon B_{X^{**}}) \subseteq JX = X.$ ■

Otra importante caracterización de compacidad débil en función de la *propiedad del límite doble intercambiable* es el objetivo que nos proponemos, alcanzar de inmediato. Precisamos ahora la definición la propiedad del límite doble intercambiable.

Definición 4.1 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto no vacío y norma-acotado de X. Diremos que K y B_{X^*} tienen la* ***propiedad del límite doble intercambiable****, PLDI, si para cualquier par de sucesiones (x_n) en K y (x_m^*) en B_{X^*} se cumple que*

$$\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) = \lim_m \lim_n x_m^*(x_n)$$

siempre que dichos límites existan.

De modo más general, si K y T son subconjuntos no vacíos y norma-acotados de X y X^* respectivamente, entonces diremos que K y T tienen la propiedad del límite doble intercambiable si para cualquier par de sucesiones (x_n) en K y (x_m^*) en T se cumple que

$$\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) = \lim_m \lim_n x_m^*(x_n)$$

siempre que dichos límites existan.

El siguiente resultado, el cual constituye la idea esencial en la caracterización de compacidad débil en función de la propiedad del límite doble intercambiable, es muy simple y se debe a Stefan Kremp ([16]).

Lema 4.1 (Kremp) *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, K un subconjunto acotado de X y T es subconjunto acotado de X^*. Supongamos que K*

y T tienen la PLDI. Si (x_n) es una sucesión en K y para algún $x \in K$ se cumple que

$$\lim_n x^*(x_n) = x^*(x), \qquad (*)$$

para todo $x^* \in T$, entonces $(*)$ sigue siendo válido para todo $x^* \in \overline{T}^{\omega^*}$.

Prueba. Sea $x^* \in \overline{T}^{\omega^*}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, el $\sigma(X,T)$-entorno de x^*,

$$V(x^*, x, x_1, \dots, x_m; 1/m),$$

intersecta a T. Escojamos entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ un $x^*_m \in T$ tal que

$$|x^*_m(x_k) - x^*_m(x_k)| < \frac{1}{m} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m \qquad \text{y}$$
$$|x^*_m(x) - x^*_m(x)| < \frac{1}{m}.$$

De esto se sigue que $\lim_m x^*_m(x) = x^*(x)$ y como por hipótesis $\lim_n x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in T$, tenemos que $\lim_n x^*_m(x_n) = x^*_m(x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\lim_m \lim_n x^*_m(x_n) = \lim_m x^*_m(x) = x^*(x)$. Por otro lado, tenemos que $\lim_m x^*_m(x_n) = x^*(x_n)$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Ahora la PLDI ímplica que $\lim_n \lim_m x^*_m(x_n) = \lim_n x^*(x_n)$ existe y es igual a $x^*(x)$, ya que cada subsucesión convergente de $\left(\lim_m x^*_m(x_n)\right)_n$ debe tener como límite a $x^*(x)$. ■

Lema 4.2 (Kremp) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sean K y T subconjuntos acotados de X y X^* respectivamente con la PLDI. Entonces para cada $x \in \overline{K}^{\sigma(X,T)}$, existe una sucesión (x_n) en K la cual converge a x en $\sigma(X, \overline{T}^{\omega^*})$.*

Prueba. Sea $x \in \overline{K}^{\sigma(X,T)}$. Pongamos $x_0 = x$ y construyamos, inductivamente, para $n = 1, 2, \dots$ una sucesión $(\varphi^n_k)_k$ en T y un punto $x_n \in K$ con las siguientes propiedades:

(i) $\{\varphi^n_k : k \in \mathbb{N}\}|Y_{n-1}$ es un subconjunto denso numerable de $T|Y_{n-1} \subset Y^*_{n-1}$ en $\sigma(Y^*_{n-1}, Y_{n-1})$, donde $Y_{n-1} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$.

(ii) $|\varphi^m_k(x) - \varphi^m_k(x_n)| < \frac{1}{n}$ para todo $k, m = 1, 2, \dots, n$.

En efecto, uno comienza tomando $Y_0 = [x_0]$, el subespacio lineal generado por $\{x_0\}$, y entonces elegimos un subconjunto denso numerable $\{\varphi_k^1 : k \in \mathbb{N}\}|Y_0$ de $T|Y_0 \subset Y_0^*$ en $\sigma(Y_0^*, Y_0)$, el cual es posible gracias a que $dim Y_0$ es finita. Una vez hecho esto, el $\sigma(X,T)$-entorno $V(x_0, \varphi_1^1, 1)$ de x intersecta a K, por lo que se obtiene un $x_1 \in K$ tal que $|\varphi_1^1(x) - \varphi_1^1(x_1)| < 1$. Ahora definimos $Y_1 = [x_0, x_1]$ y de nuevo escogemos un subconjunto denso numerable $\{\varphi_k^2 : k \in \mathbb{N}\}|Y_1$ de $T|Y_1 \subset Y_1^*$ en $\sigma(Y_1^*, Y_1)$. Una vez más el $\sigma(X,T)$-entorno $V(x_0, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_2^1, \varphi_2^2, 1/2)$ de x intersecta a K, por lo que existe un $x_2 \in K$ tal que $|\varphi_k^m(x) - \varphi_k^m(x_2)| < 1/2$ para $k, m = 1, 2$. Repitiendo inductivamente el proceso uno logra (i) y (ii).
Si ahora definimos

$$T' = \{\varphi_k^n : k, n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{y} \qquad Y = [x_n : n = 0, 1, 2, \ldots],$$

entonces

(a) $K \cap Y$ y $T'|Y$ tienen la PLDI;

(b) $T'|Y \subset T|Y \subset Y^*$ es $\sigma(Y^*, Y)$-denso en $T|Y$;

(c) (x_n) converge a x en $\sigma(Y, T'|Y)$.

En vista del Lema 4.1, (x_n) converge a x en $\sigma(Y, T|Y)$; es decir, en $\sigma(X,T)$, y de nuevo por el Lema 4.1 converge en $\sigma(X, \overline{T}^{\omega^*})$. ■

Corolario 4.1 (Kremp) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y supongamos que $K \subseteq X$ y B_{X^*} tienen la PLDI. Si $x^{**} \in \overline{JK}^{\omega^*}$, entonces existe una sucesión (x_n) en K tal que $Jx_n \to x^{**}$ débilmente (en $\sigma(X^{**}, X^{***})$).*

Prueba. Sean $K' = JK \subset X^{**}$ y $T' = J_1 B_{X^*} \subset X^{***}$. Puesto que K' y T' tienen la PLDI, el Lema 4.2 produce, para $x^{**} \in \overline{JK}^{\omega^*}$, una sucesión (x_n) en K tal que $(Jx_n)_n$ converge a un punto $x^{**} \in X^{**}$ en la topología $\sigma(X^{**}, \overline{T'}^{\omega^*})$. Pero por el Teorema de Goldstine

$$\overline{T'}^{\omega^*} = \overline{J_1 B_{X^*}}^{\sigma(X^{***}, X^{**})} = B_{X^{***}}$$

finalizando la prueba, ya que $\sigma(X^{**}, B_{X^{***}}) = \sigma(X^{**}, X^{***})$. ■

El siguiente resultado de A. Grothendieck [10] nos proporciona otra elegante caracterización de compacidad débil en función de la PLDI.

Teorema 4.2 (Grothendieck) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un subconjunto no vacío y norma-acotado de X es relativamente débilmente compacto si y sólo si K y B_{X^*} tienen la propiedad del límite doble intercambiable.*

Prueba. Supongamos que $\overline{K}^{\omega}$ es compacto y sean (x_n) una sucesión en K y (x_m^*) una sucesión en B_{X^*} tales que los límites

$$\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) \qquad \text{y} \qquad \lim_m \lim_n x_m^*(x_n)$$

existan. Por el Teorema de Eberlein-Šmulian (Teorema 3.1), K es relativamente débilmente numerablemente compacto y, en consecuencia, la sucesión (x_n) posee un punto límite débil $x_\infty \in X$. Por otro lado, gracias al Teorema de Banach-Alaoglu, B_{X^*} es ω^*-compacto por lo que la sucesión (x_m^*) también posee un punto límite débil-$*$, $x_\infty^* \in B_{X^*}$. Ahora bién, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_\infty^*(x_n)$ es un punto límite de la sucesión $(x_m^*(x_n))_{m=1}^{\infty}$, y ya que $\lim_m x_m^*(x_n)$ existe, resulta entonces que

$$\lim_m x_m^*(x_n) = x_\infty^*(x_n).$$

Similarmente, como $x_\infty^*(x_\infty)$ es un punto límite de la sucesión $(x_\infty^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$, y teniendo en cuenta que $\lim_n x_n^*(x_\infty)$ existe, concluimos que

$$\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) = x_\infty^*(x_\infty) = \lim_m \lim_n x_m^*(x_n).$$

Esto prueba que K y B_X^* tienen la PLDI.

Supongamos ahora que K y B_{X^*} tienen la PLDI y sea $x^{**} \in \overline{JK}^{\omega^*}$. Queremos probar que $\overline{JK}^{\omega^*} \subset JX$. Gracias al Corolario 4.1 existe una sucesión (y_n) en K tal que $Jy_n \to x^{**} \in X^{**}$ débilmente. Por Corolario 2.1, resulta que $x^{**} \in co\{Jy_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq JX$. Esto prueba que K es débilmente compacto. ∎

Usaremos la propiedad del límite doble para dar la prueba de una caracterización de compacidad débil usando la forma vectorial del Teorema de Silverman-Toeplitz.

Definición 4.2 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una matriz infinita de escalares $A = (a_{n,k})_{n,k}$ se dice que es un* ***método regular de sumabilidad***

en X, en breve MRS, si para cada sucesión (x_n) en X convergiendo a un $x \in X$, la sucesión

$$x_n^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k \tag{*}$$

existe para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} x_n^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k = x. \tag{**}$$

Teorema 4.3 (Silverman-Toeplitz) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una matriz infinita de escalares $A = (a_{n,k})_{n,k}$ es un método regular de sumabilidad si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

(1) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| := M < \infty$,

(2) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ *para todo $k \in \mathbb{N}$,*

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1$.

Prueba. Supongamos que (1), (2) y (3) se satisfacen. Sea (x_n) un sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$. En este caso, la sucesión (x_n) es acotada por lo que queda garantizada la existencia de una constante positiva K tal que $\sup_n \|x_n\| \leq K$. Por (1), $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{n,k}\, x_k\| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|\, \|x_k\| \\ &\leq K \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \\ &\leq K\, M.\end{aligned}$$

Por esto y la completitud de X se sigue que

$$x_n^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k$$

existe para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba (*), restándonos por demostrar (**).

Sin perder generalidad podemos suponer, y así lo haremos, que $x = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe un entero $N_1 > 0$ tal que

$$\|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \qquad \text{para todo } n \geq N_1.$$

Sea $T = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{N_1-1}\|\}$. Se deduce de (2), que para cada $k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, existe un $N'_k > 0$ tal que

$$|a_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2TN_1} \qquad \text{para todo } n \geq N'_k.$$

Finalmente, definiendo $N = \max\{N_1, N'_1, N'_2, \ldots, N'_{N_1-1}\}$, resultará que para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\|x_n^A\| &= \|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_1-1} |a_{n,k}|\, \|x_k\| + \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_{n,k}|\, \|x_k\| \\
&< T\left(\sum_{k=1}^{N_1-1} |a_{n,k}|\right) + \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \\
&< T\frac{\varepsilon}{2TN_1} N_1 + \frac{\varepsilon}{2(M+1)} M \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que significa que $x_n^A \to x = 0$.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que $A = (a_{n,k})_{n,k}$ es un método regular de sumabilidad en X. Veamos que (1), (2) y (3) se cumplen.

En efecto, sean $k \in \mathbf{N}$ y $x \in X$, $x \neq 0$, fijos, y definamos la sucesión (x_n) por

$$x_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k, \\ x \text{ si } n = k. \end{cases}$$

Entonces $x_n \to 0$ y se sigue de (*) que

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty} x_n^A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k \\
&= x \lim_{n\to\infty} a_{n,k},
\end{aligned}$$

por lo que $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Si por otro lado, definimos la sucesión (y_n) por $y_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ y de nuevo por (*)

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k$$
$$= x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k,$$

de donde se sigue que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\, x_k = 1$.

Finalmente, si consideramos el espacio

$$c(X) = \Big\{ z = (x_n) \subset X \ :\ x_n \to x, \text{ para algún } x \in X \Big\},$$

provisto de la norma $\|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\|$, resultará que $c(X)$ es un espacio de Banach. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador lineal $T_n : c(X) \to X$ por

$$T_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k,$$

entonces tenemos que

$$\|T_n(z)\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \right) \|z\|,$$

lo cual prueba que cada T_n es continuo, y que la sucesión $(T_n(\cdot))_n$ es puntualmente acotada. Un llamado al Teorema de Acotación Uniforme nos revela que

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty.$$

La prueba es completa. ∎

Veamos ahora como se conjugan los Teoremas de Grothendieck, Silverman-Toeplitz y de Eberlein-Šmulian para caracterizar compacidad débil en función del Método Regular de Sumabilidad. La prueba del siguiente resultado es tomada de [4].

Teorema 4.4 (Nishiura-Waterman-Pełczyński) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y sea K un subconjunto norma-acotado de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *K es relativamente débilmente compacto.*

(b) *Para cada sucesión (x_n) en K, existe un MRS $A = (a_{n,k})_{n,k}$ tal que la sucesión $(x_n^A)_{n=1}^{\infty}$ es norma-convergente.*

(c) *Para cada sucesión (x_n) en K, existe un MRS $A = (a_{n,k})_{n,k}$ tal que la sucesión $(x_n^A)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente-convergente.*

Prueba.(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que K es relativamente débilmente compacto y sea (x_n) en K. De acuerdo al Teorema de Eberlein-Šmulian, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) la cual converge débilmente a algún punto $x \in X$. Por el Teorema de Mazur, $x \in \overline{co}\,(x_{n_k})$ y en consecuencia, existen escalares $\lambda_{1,k} \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, p_1$ con $\sum_{k=1}^{p_1} \lambda_{1,k} = 1$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_{1,k} x_{n_k} - x \right\| < 1.$$

Ya que $x \in \overline{co}\,(x_{n_k}) \setminus \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_{p_1}}\}$, podemos hallar escalares $\lambda_{2,k} \geq 0$, $k = p_1 + 1, \ldots, p_2$ tal que $\sum_{k=p_1+1}^{p_2} \lambda_{2,k} = 1$ y

$$\left\| \sum_{k=p_1+1}^{p_2} \lambda_{2,k} x_{n_k} - x \right\| < \frac{1}{2}.$$

Continuando inductivamente con este proceso, obtenemos una sucesión de enteros $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ satisfaciendo

$$0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_n < \ldots \qquad \text{y} \qquad \left\| \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} \lambda_{n,k} x_{n_k} - x \right\| < \frac{1}{n}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Si ahora definimos

$$a_{n,k} = \begin{cases} \lambda_{n,k} & \text{si } k = p_{n-1} + 1, \ldots, p_n \\ 0 & \text{si } k \notin \{p_{n-1} + 1, \ldots, p_n\}, \end{cases}$$

entonces la matriz $A = (a_{n,k})_{n,k}$ es un método regular de sumabilidad y claramente

$$x_n^A = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_{n_k} = \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} a_{n,k} x_{n_k}$$

converge en la norma a x.

$(b) \Rightarrow (c)$ es trivial.

$(c) \Rightarrow (a)$. Gracias al Teorema de Grothendieck será suficiente demostrar que K y B_{X^*} tienen la propiedad del límite doble intercambiable. Sean entonces (x_n) en K, (x_n^*) en B_{X^*} y supongamos que los límites $\lim_m \lim_n x_m^*(x_n)$ y $\lim_n \lim_m x_m^*(x_n)$ existen. Ahora bién, (c) garantiza la existencia de un método regular de sumabilidad $A = (a_{n,k})_{n,k}$ tal que $(x_n^A)_{n=1}^\infty$ converge débilmente a algún $x \in X$. Por consiguiente, si x^* es un ω^*-punto límite de (x_m^*), tendremos que

$$\begin{aligned}
\lim_n \lim_m x_m^*(x_n) &= \lim_n x^*(x_n) \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^\infty a_{n,k} x^*(x_k) \\
&= \lim_n x^* \left(\sum_{k=1}^\infty a_{n,k} x_k \right) \\
&= \lim_n x^*(x_n^A) \\
&= x^*(x),
\end{aligned}$$

mientras que por el otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_m \lim_n x_m^*(x_n) &= \lim_m \lim_n \sum_{k=1}^\infty a_{n,k} x_m^*(x_k) \\
&= \lim_m \lim_n x_m^* \left(\sum_{k=1}^\infty a_{n,k} x_k \right) \\
&= \lim_m \lim_n x_m^*(x_n^A) \\
&= \lim_m x_m^*(x) \\
&= x^*(x).
\end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba. ∎

5 La desigualdad de Simons

La siguiente desigualdad, conocida como la Desigualdad de Simons [23], será usada para probar una de las caracterizaciones más prolífica sobre compacidad débil en espacios de Banach. Esta es la caracterización que R. C. James demostró en su artículo [14] y la cual dice que *si cada funcional lineal continuo definido sobre un espacio de Banach alcanza su supremo sobre un subconjunto acotado y débilmente cerrado en ese espacio, entonces dicho conjunto es débilmente compacto.* Con este instrumento en la mano tendremos ocasión de demostrar algunos resultados interesantes relacionados con compacidad débil en espacios de Banach.

La desigualdad de Simons constituye, hoy en día, una herramienta poderosa en la Geometría de los espacios de Banach, en particular, en lo relacionado con el concepto de *suavidad.* Una buena dosis de aplicaciones de la desigualdad de Simons se encuentran en [9] y [2].

Un subconjunto K de X se llama **σ-convexo** si para cualquier sucesión (x_n) de K ocurre que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in K$ siempre que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ sea una sucesión de escalares positivos con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Es claro que todo conjunto σ-convexo es convexo.

Lema 5.1 (Desigualdad de Simons) *Sea K un conjunto y sea C un subconjunto no vacío, acotado y σ-convexo de $\ell_\infty(K)$. Supongamos que*

$$\textit{para cada } x \in C \textit{ existe } \lambda \in K \textit{ tal que } x(\lambda) = \sup\{x(\gamma) : \gamma \in K\}. \qquad (\clubsuit)$$

Si (x_n) es cualquier sucesión en C, entonces

$$\sup\left\{ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n(\gamma) : \gamma \in K\right\} \geq \inf_{x\in C} \sup\left\{x(\gamma) : \gamma \in K\right\}.$$

Prueba. Sean

$$m = \inf_{x\in C} \sup\{x(\gamma) : \gamma \in K\} \qquad \text{y} \qquad M = \sup_{x\in C} \sup\{x(\gamma) : \gamma \in K\}.$$

Puesto que C es acotado en $\ell_\infty(K)$, entonces $-\infty < m \leq M < \infty$. Sea (x_n) una sucesión en C y para cada $\gamma \in K$, definamos

$$u(\gamma) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n(\gamma).$$

Como C es acotado, $u \in \ell_\infty(K)$. Sea ahora $\delta > 0$ y escojamos un $\lambda \in (0,1)$ de modo que

$$\lambda \leq \frac{\delta}{M - m + 3\delta}$$

o lo que es lo mismo,

$$m - \delta(1+\lambda) - M\lambda \geq (m - 2\delta)(1-\lambda).$$

Probaremos de inmediato que $\sup_{\gamma \in K} u(\gamma) \geq m - 2\delta$. Comencemos por definir, para cada $n \in \mathbf{N}$, el conjunto $C_n = co\{x_k : k \geq n\}$ y usemos inducción para escoger $y_n \in C_n$ de modo que se cumpla

$$\sup_K \left(\sum_{k \leq n} \lambda^{k-1} y_k \right) \leq \inf \left\{ \sup_K \left(\sum_{k \leq n-1} \lambda^{k-1} y_k + \lambda^{n-1} y \right) : y \in C_n \right\} + \delta(\frac{\lambda}{2})^n.$$

En efecto, como $C_1 \subseteq C$ es acotado tenemos que $\inf\{\sup_K y : y \in C_1\} < \infty$. De aquí se sigue la existencia de un $y_1 \in C_1$ tal que

$$\sup_K y_1 \leq \inf\{\sup_K y : y \in C_1\} + \delta(\frac{\lambda}{2}).$$

Ahora $y_1 + \lambda C_2$ es acotado y de nuevo podemos hallar un $y_2 \in C_2$ de modo que

$$\sup_K (y_1 + \lambda y_2) \leq \inf\{\sup_K (y_1 + \lambda y : y \in C_2\} + \delta(\frac{\lambda}{2})^2.$$

Consideremos $y_1 + \lambda C_2 + \lambda^2 C_3$. Repitiendo inductivamente el proceso anterior, uno obtiene lo deseado.

Como cada C_n es convexo y $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ resulta que para todo $n \geq 1$,

$$\frac{y_n + \lambda y_{n+1}}{1+\lambda} \in C_n,$$

por lo que

$$\sup_K \left(\sum_{k \leq n} \lambda^{k-1} y_k \right) \leq \sup_K \left(\sum_{k \leq n-1} \lambda^{k-1} y_k + \lambda^{n-1} \left(\frac{y_n + \lambda y_{n+1}}{1+\lambda} \right) \right) + \delta(\frac{\lambda}{2})^n. \tag{*}$$

Sean $z_0 = 0$, $z_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} y_k$ para $n \geq 1$, y $z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} y_n$. Multiplicando la desigualdad (*) por $1 + \lambda$, obtenemos

$$\begin{aligned}(1+\lambda) \sup_K z_n &\leq \sup_K (\lambda z_{n-1} + z_{n+1}) + \delta(1+\lambda)(\lambda/2)^n \\ &\leq \lambda \sup_K z_{n-1} + \sup_K z_{n+1} + \delta(1+\lambda)(\lambda/2)^n.\end{aligned}$$

Por esto,

$$\frac{\sup_K z_{n+1} - \sup_K z_n}{\lambda^n} \geq \frac{\sup_K z_n - \sup_K z_{n-1}}{\lambda^{n-1}} - \frac{\delta(1+\lambda)}{2^n}.$$

Ya que $\sup_K z_1 - \sup_K z_0 = \sup_K z_1 \geq m$, la desigualdad anterior junto con un argumento inductivo ayuda a

$$\begin{aligned} \frac{\sup_K z_n - \sup_K z_{n-1}}{\lambda^{n-1}} &\geq m - \delta(1+\lambda)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\geq m - \delta(1+\lambda). \end{aligned}$$

De allí que

$$\sup_K z - \sup_K z_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sup_K z_k - \sup_K z_{k-1}\right) \geq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda^{k-1}(m - \delta(1+\lambda)).$$

Así,

$$\sup_K z - \sup_K z_{n-1} \geq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}(m - \delta(1+\lambda)).$$

Puesto que $(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} = 1$ y ya que $y_n \in C$ para todo $n \geq 1$, se sigue que $(1-\lambda)z \in C$ (aquí es donde usamos la σ-convexidad de C). De acuerdo a nuestra hipótesis (♣), existe un $\gamma_0 \in K$ tal que $z(\gamma_0) = \sup_K z$. Por esto, para cada $n \geq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda^{n-1} y_n(\gamma_0) &= z(\gamma_0) - z_{n-1}(\gamma_0) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^{k-1} y_k(\gamma_0) \\ &\leq \sup_K z - \sup_K z_{n-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^{k-1} M \\ &\leq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}(m - \delta(1+\lambda)) - \frac{\lambda^n}{1-\lambda} M \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}(m - \delta(1+\lambda) - \lambda M). \end{aligned}$$

Se sigue ahora de nuestra elección de λ que $y_n(\gamma_0) \geq m - 2\delta$ para cada $n \geq 1$. Pero como $y_n \in C_n$, resulta que para cada $n \geq 1$, existe un $k(n) \geq n$ para el cual se cumple que $x_{k(n)}(\gamma_0) \geq m - 2\delta$. De allí que

$$u(\gamma_0) = \overline{\lim}_n x_n(\gamma_0) \geq m - 2\delta$$

lo cual muestra que $\sup_K u \geq m - 2\delta$. Esto finaliza la prueba puesto que $\delta > 0$ era arbitrario. ■

6 El Teorema de James

Estamos preparados para dar una presentación de la prueba del Teorema de James ahora bajo la óptica de Simons. La demostración es tomada de [2], donde la idea de la prueba consiste en reducir el caso general al caso separable usando el Teorema de Eberlein-Šmulian.

Como siempre usaremos la letra J para denotar el isomorfismo canónico de X en X^{**}, mientras que J_1 denotará el isomorfismo canónico de X^* en X^{***}. Con el fin de evitar una notación un poco engorrosa en la prueba del Teorema de James, identificaremos cada subconjunto K de X con su imagen $JK \subseteq X^{**}$. Similar consideración haremos con los subconjuntos de X^* por intermedio de J_1.

El resultado de R. C. James [14] que a continuación exponemos es uno de los más sorprendentes y profundos en lo referente a la caracterización de la compacidad débil de un conjunto en un espacio de Banach. Veamos ahora su formulación.

Teorema 6.1 (Teorema de James) *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y K un subconjunto débilmente cerrado de X. Entonces K es débilmente compacto si y sólo si cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre K.*

Prueba. Si K es débilmente compacto, entonces cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre K, por el simple hecho de que x^* es débilmente continuo.

Para probar el recíproco, un par de suposiciones son necesarias para facilitar la demostración. La primera es asumir, haciendo uso del Teorema de Eberlein-Šmulian, que X es norma-separable, y la segunda en suponer que K es convexo. Aceptadas estas premisas, supongamos ahora que cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre K. En primer lugar notemos que K es norma-acotado gracias al Principio de Acotación Uniforme.

Si K no es débilmente compacto, entonces $\overline{K}^{\omega^*} \setminus K \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \overline{K}^{\omega^*} \setminus K$. El Teorema de Hahn-Banach nos proporciona la existencia de un $u \in B_{X^{***}}$ y de un $\alpha > 0$ tal que

$$u(x_0) > \alpha > \sup\{u(x) : x \in K\}. \qquad (*)$$

Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión norma-densa en K. Puesto que (Goldstine una vez más)

$$\overline{B_{X^*}}^{\omega^*} = B_{X^{***}},$$

podemos escoger, para cada $n \in \mathbf{N}$, un $x_n \in B_{X^*}$ de tal forma que

$$x_n(x_0) > \alpha \qquad \text{y} \qquad |(x_n - u)(z_k)| < \frac{1}{n}, \quad \text{siempre que } 1 \leq k \leq n.$$

Por la equicontinuidad de los x_n, tenemos que $\lim_n x_n(t) = u(t)$ para todo $t \in K$. Definamos

$$C = \{x \in X^* : x(x_0) \geq \alpha\}.$$

Notemos ahora que el conjunto C puede ser identificado con un subconjunto de $\ell_\infty(K)$ el cual satisface las hipótesis del Lema 5.1, y que (x_n) es una sucesión en C. Más aún, por nuestra hipótesis, cada $x \in C$ alcanza su supremo sobre K. Un llamado al Lema 5.1, nos conduce a

$$\begin{aligned} \sup\{u(x) : x \in K\} &\geq \inf\{\sup_K x : x \in C\} \\ &\geq \inf\{x(x_0) : x \in C\} \\ &\geq \alpha, \end{aligned}$$

lo cual contradice a (*). Esta contradicción establece que K es débilmente compacto y termina la prueba. ∎

Otra demostración interesante del Teorema de James usando la propiedad del límite doble intercambiable es la que aborda Holmes en ([12], pág. 157-160).

7 Aplicaciones del Teorema de James

Lo que sigue constituye una prueba de la importancia del Teorema de James en el concierto de la teoría de los espacios de Banach relacionado con la compacidad débil.

Se conoce que *un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *es reflexivo si y sólo si su bola unitaria cerrada* B_X *es débilmente compacta.* Esto, combinado con el Teorema de James para el caso $K = B_X$, produce la siguiente caracterización de reflexividad.

Teorema 7.1 *Un espacio de Banach* X *es reflexivo si y sólo si cada* $x^* \in X^*$ *alcanza su supremo sobre* B_X.

Un resultado importante que ha merecido la atención de muchos es el siguiente Teorema de Krein. Existen variadas demostraciones de ese teorema utilizando herramientas muy diversas como por ejemplo Medidas Vectoriales (ver por ejemplo [6], pág. 51), o usando el Teorema Eberlein-Šmulian (ver [7], pág, 434), o utilizando el Teorema de Representación de Riesz (ver [27]). Holmes ([12]) fue el primero en dar una demostración usando el Teorema de James.

Teorema 7.2 (M. Krein) *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Un subconjunto débilmente cerrado* K *de* X *es débilmente compacto si y sólo si* $\overline{co}(K)$ *es débilmente compacto.*

Prueba. Supongamos que $\overline{co}(K)$ es débilmente compacto. Puesto que K es débilmente cerrado y $K \subseteq \overline{co}(K)$, resulta entonces que él es débilmente compacto.

Recíprocamente, supongamos que K es débilmente compacto, y sea $x^* \in X^*$. Ya que la restricción de x^* a K es una función débilmente continua, ella alcanza su supremo sobre K; esto es, existe algún $x_0 \in K$ tal que

$$x^*(x_0) = \sup x^*(K).$$

Pero como

$$\sup x^*(K) = \sup x^*(\overline{co}(K))$$

resulta que

$$x^*(x_0) = \sup x^*(\overline{co}(K)).$$

Un llamado al Teorema de James nos revela que $\overline{co}(K)$ es débilmente compacto. ∎

Teorema 7.3 (Ülger) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un subconjunto norma-acotado K de X es relativamente débilmente compacto si y sólo si para cada sucesión (x_n) en K existe una subsucesión $(\hat{x}_n)$ con $\hat{x}_n \in co\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ convergiendo débilmente.*

Prueba. Supongamos que K es relativamente débilmente compacto. Entonces cualquier sucesión (x_n) en K posee, gracias al Teorema de Eberlein-Šmulian, una subsucesión débilmente convergente, digamos (x_{n_k}). Pongamos $\hat{x}_k = x_{n_k}$, $n = 1, 2, \dots$ Claramente $\hat{x}_k \in co\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ y la sucesión $(\hat{x}_n)$ converge débilmente.

Para demostrar el recíproco será suficiente, gracias al Teorema de James, probar que cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre $\overline{co}(K)$. Sea entonces $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ y sea

$$\beta = \sup x^*(\overline{co}(K)).$$

Puesto que también $\beta = \sup x^*(K)$, podemos elegir una sucesión (x_n) en K de modo que $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \beta$. Con esto a la mano, nuestra hipótesis nos garantiza la existencia de una sucesión $(\hat{x}_n)$ con $\hat{x}_n \in co\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ convergiendo débilmente a un elemento $x \in \overline{co}(K)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \beta$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x^*(x_n) > \beta - \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Ahora bién, como cada $\hat{x}_n$ es de la forma

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i x_{n+i} \quad \text{con } \lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i = 1$$

se sigue que para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} x^*(\hat{x}_n) &= \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i x^*(x_{n+i}) \\ &> \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i (\beta - \varepsilon) \\ &= \beta - \varepsilon \end{aligned}$$

y por la continuidad de x^* vemos que

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x^*(\hat{x}_n) > \beta - \varepsilon.$$

Por otro lado, por estar x en $\overline{co}(K)$ resulta que $x^*(x) \leq \beta = \sup x^*(\overline{co}(K))$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $x^*(x) = \beta$. Esto prueba que

$x^*(x) = \sup x^*(\overline{co}(K))$ y por el Teorema de James, $\overline{co}(K)$ es débilmente compacto y en consecuencia $K \subseteq \overline{co}(K)$ resulta ser relativamente débilmente compacto. ■

Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se llama **uniformemente convexo** si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_X$ y $\|x - y\| = \varepsilon$, entonces $\|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta$. Una formulación equivalente de la noción de convexidad uniforme, conveniente a nuestro propósito, es la siguiente: X es uniformemente convexo si para cualquier par de sucesiones (x_n) y (y_n) en S_X satisfaciendo $\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{2}(x + y)\| = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$.

Una demostración frecuente del siguiente resultado, debido a Milman-Pettis, hace uso del ya conocido Teorema de Goldstine. Pero ciertas "*exquisiteces*" pueden ser también frutos del Teorema de James.

Teorema 7.4 (Milman-Pettis) *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Prueba. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach uniformemente convexo. Todo lo que tenemos que probar es que la bola unitaria cerrada B_X es débilmente compacta. Sea entonces $x^* \in X^*$. Seleccionemos una sucesión (x_n) en $S_X \subseteq B_X$ de modo que $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \|x^*\|$. La linealidad de x^* junto con la convexidad de B_X nos asegura que

$$\lim_{m,n\to\infty} x^*\left(\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right) = \|x^*\|.$$

De aquí se sigue que $\lim_{m,n\to\infty}\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\| = 1$. Ya que X es uniformemente convexo obtenemos que $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m\| = 0$, lo cual prueba que nuestra sucesión (x_n) es de Cauchy y, en consecuencia, convergente a algún $x \in X$. Por esto, $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x) = \|x^*\|$. Un llamado al Teorema de James nos dice que B_X es débilmente compacto y por lo tanto X es reflexivo. ■

Compacidad débil en función de la propiedad de intersección finita tiene su versión convexa según el siguiente resultado de Dieudonné-Šmulian.

Teorema 7.5 (Dieudonné-Šmulian) *Un subconjunto débilmente cerrado K de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es débilmente compacto si y sólo si para cualquier sucesión de subconjuntos convexos y cerrados $(C_n)_1^\infty$ de X satisfaciendo*

$$\bigcap_{n=1}^{m} C_n \cap K \neq \emptyset, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

implica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \cap K \neq \emptyset.$$

Prueba. Si K es débilmente compacto, entonces la condición es claramente necesaria.

Para demostrar la suficiencia, sea $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, y definamos $\alpha = \sup_{x \in K} x^*(x)$. Escojamos una sucesión (α_n) en $\mathbf{R}$ tal que $\alpha_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Definiendo, para cada $n \in \mathbf{N}$, el conjunto

$$C_n = \{x \in X \, : \, x^*(x) \geq \alpha_n\},$$

resulta que cada C_n es convexo, cerrado y se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{m} C_n \cap K = C_m \cap K \neq 0$$

para cada $m = 1, 2, \ldots$ y gracias a nuestra hipótesis tenemos que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \cap K = \{x \in K \, : \, x^*(x) = \alpha\}.$$

Esto nos dice que existe algún $x_0 \in K$ que verifica

$$x^*(x_0) = \sup_{x \in K} x^*(x).$$

El Teorema de James nos revela que K es débilmente compacto. ∎

Teorema 7.6 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un subconjunto K de X es débilmente compacto si y sólo si para cada sucesión (x_n) en K, existe un $x_0 \in K$ tal que para todo $x^* \in X^*$*

$$\underline{\lim}\, x^*(x_n) \leq x^*(x_0) \leq \overline{\lim}\, x^*(x_n).$$

Prueba. Supongamos que K es débilmente compacto y sea (x_n) una sucesión en K. Si x_0 es un punto límite débil de la sucesión (x_n) entonces es claro que para cualquier $x^* \in X^*$, $x^*(x_0)$ es un punto límite de la sucesión $(x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Se sigue entonces que

$$\underline{\lim}\, x^*(x_n) \leq x^*(x_0) \leq \overline{\lim}\, x^*(x_n)$$

se cumple para todo $x^* \in X^*$.

Recíprocamente, sea $x^* \in X^*$ y definamos $\alpha = \sup x^*(K)$. Elijamos entonces una sucesión (x_n) en K que cumpla $\alpha = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$. Por hipótesis, existe un $x_0 \in K$ tal que

$$\underline{\lim}\, x^*(x_n) \leq x^*(x_0) \leq \overline{\lim}\, x^*(x_n).$$

Pero como $\underline{\lim}\, x^*(x_n) = \overline{\lim}\, x^*(x_n) = \lim x^*(x_n)$, vemos que $\alpha = x^*(x_0)$. Invocando al Teorema de James resulta que K es débilmente compacto. ■

Teorema 7.7 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. X es reflexivo si y sólo si $X^{**} \subseteq C(K)$, donde $K = B_{X^*}$ está dotado de la ω^*-topología.*

Prueba. Puesto que $X \subseteq C(B_{X^*})$ isométricamente, entonces la reflexividad de X nos asegura que $X^{**} = X \subseteq C(B_{X^*})$.

Recíprocamente, sea $x^{**} \in X^{**}$. Entonces $x^{**} \in C(K)$ y como K es ω^*-compacto existe algún $x_0^* \in K$ tal que

$$x^{**}(x_0^*) = \sup_{x^*\in K} x^{**}(x^*).$$

Un llamado al Teorema de James nos asegura que $K = B_{X^*}$ es débilmente compacto, lo que a su vez nos dice que X^* es reflexivo y por consiguiente también lo es X. ■

Teorema 7.8 (James) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un subconjunto débilmente cerrado K de X es débilmente compacto si y sólo si para cualquier conjunto débilmete cerrado $B \subset X$ y disjunto de K se cumple que $dist(K, B) > 0$.*

Prueba. Supongamos que K es débilmente compacto y que para algún $B \subseteq X$ débilmente cerrado y disjunto de K, se cumple que $dist(K, B) = 0$. Seleccionemos entonces una sucesión (x_n, y_n) en $K \times B$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

La compacidad de K junto con el Teorema de Eberlein-Šmulian nos proporciona la existencia de una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) para la cual se tiene que $\omega - \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x$ para algún $x \in K$. De la desigualdad

$$\begin{aligned} x^*(y_{n_k} - x) &= x^*(y_{n_k} - x_{n_k}) + x^*(x_{n_k} - x) \\ &\leq \|x^*\|\, \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + x^*(x_{n_k} - x) \end{aligned}$$

se deduce que $\omega - \lim_{n\to\infty} y_{n_k} = x$. Pero como $K \cap B = \emptyset$, resulta que $x \notin B$ lo cual niega que B sea débilmente cerrado. Esta contradicción establece que $dist(B, K) > 0$ cualquiera que sea el conjunto débilmente cerrado $B \subseteq X$ disjunto de K.

Para probar el recíproco, supongamos que K no es débilmente compacto. Por el Teorema de James, existe algún $x^* \in X^*$ que no alcanza su supremo sobre K; esto es, para todo $x \in K$

$$x^*(x) < \sup_{z\in K} x^*(z).$$

Sean $c = \sup\{x^*(z) : z \in K\}$ y $B = \{x \in X : x^*(x) = c\}$. Entonces, B es convexo, norma(=débilmente)-cerrado y disjunto de K, y se cumple que $dist(B, K) = 0$, lo cual viola nuestra hipótesis. ■

Corolario 7.1 (James) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. X es reflexivo si y sólo si $dist(A, B) > 0$ para todo par disjunto (A, B) de subconjuntos débilmente cerrados de X, con al menos uno de ellos acotado.*

Prueba. Si X no es reflexivo, entonces su bola cerrada unitaria $A = B_X$ es débilmente cerrada pero no débilmente compacta. Se sigue del Teorema 7.8 que existe al menos un conjunto débilmente cerrado B tal que $A \cap B = \emptyset$ y $dist(A, B) = 0$.

Recíprocamente, si X es reflexivo y A es acotado y débilmente cerrado, entonces A es débilmente compacto y de nuevo, por el Teorema 7.8, tenemos que $dist(A, B) > 0$ para cada conjunto B débilmente cerrado y disjunto de A. ■

Si Y es un subespacio norma-cerrado de un espacio de Banach real X, entonces es de sumo interés determinar si cada elemento de $X \setminus M$ puede ser *aproximado* por miembros de M. Un ejemplo clásico de tal situación ocurre cuando $X = C[0, 1]$ es el espacio de Banach real de todas las funciones continuas definidas sobre $[0, 1]$ y M es el conjunto de todos los polinomios de grado n, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Un elemento $x_0 \notin M$ que puede ser apróximado por elementos de M está estrechamente vinculado a la cantidad

$$dist(x_0, M) := \inf\{\|x_0 - x\| : x \in M\}.$$

Un subconjunto convexo y cerrado K de X se llama **proximal** si para cada $x \notin K$ existe algún $x_0 \in K$ tal que

$$\|x - x_0\| = \inf\left\{\|x - z\| : z \in K\right\} = dist(x, K).$$

A este elemento $x_0 \in K$ se le llama la *mejor aproximación a x en K*.

Teorema 7.9 *Un espacio de Banach real X es reflexivo si y sólo si cada subconjunto convexo y cerrado de X es proximal.*

Prueba. . Supongamos que X es reflexivo. Sean K un subconjunto convexo y cerrado de X y $x_0 \notin K$. Si $d = dist(x_0, K)$ y si denotamos por $B_d(x_0)$ la bola cerrada con centro en x_0 y radio d, entonces $K \cap B_d(x_0)$ es débilmente compacto y como la norma, $\|\cdot\|$, es una función débilmente semicontinua inferior, resulta que ella alcanza su mínimo sobre $K \cap B_d(x_0)$.

Supongamos ahora que cada subconjunto convexo y cerrado de X es proximal pero que X no es reflexivo. Siendo la reflexividad un propiedad separablemente-determinada, entonces existe algún subespacio separable Y de X que no es reflexivo. De aquí se sigue que B_Y no es débilmente compacto y gracias al Teorema de James existe algún $x^* \in Y^*$ que no alcanza su norma sobre B_Y. Esto significa que el conjunto convexo y cerrado $K = \{x \in Y : x^*(x) = \|x^*\|\}$ no tiene elemento minimal y en consecuencia no puede ser proximal. ■

Teorema 7.10 (M. Pavone) *Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es reflexivo si y sólo si para cualquier $x^{**} \in B_{X^{**}}$ y cualquier elección finita de puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en X^*, existe un $x \in B_X$ tal que $x^{**}(x_i^*) = x_i^*(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Prueba. Supongamos que X es reflexivo y sea $x^{**} \in B_{X^{**}}$. Entonces existe un único $x \in B_X$ que cumple $Jx = x^{**}$, donde como siempre $J : X \to X^{**}$ es la isometría canónica. De esto se sigue que para cualquier elección finita de puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en X^*, tenemos que $x^{**}(x_i^*) = Jx(x_i^*) = x_i^*(x)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para la otra implicación, sea $x^* \in X^*$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe un $x^{**} \in X^{**}$ tal que $\|x^{**}\| = 1$ y $x^{**}(x^*) = \|x^*\|$. Pero por hipótesis, existe un $x \in B_X$ tal que $x^*(x) = x^{**}(x^*) = \|x^*\|$, lo cual nos dice que x^* alcanza su supremo sobre B_X. Un llamado al Teorema de James nos muestra que B_X es débilmente compacto y, por consiguiente, X es reflexivo. ■

La siguiente aplicación del Teorema de James tiene que ver con la así llamada propiedad de la gota. Comencemos entonces con un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y tomemos un $x \notin B_X$. La *gota generada por x*, en notación $D(x, B_X)$, se define como

$$D(x, B_X) = co\,(x, B_X).$$

Danĕs demostró que en todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, cualquier conjunto norma-cerrado C con $dist(C, B_X) > 0$ contiene un punto x satisfaciendo

$$D(x, B_X) \cap C = \{x\}.$$

Rolewicz entonces propone la siguiente:

Definición 7.1 *La norma $\|\cdot\|$ de X tiene la* ***propiedad de la gota*** *si para cualquier conjunto norma-cerrado C de X y disjunto de B_X, existe un $x \in C$ tal que*

$$D(x, B_X) \cap C = \{x\}.$$

Una sucesión (x_n) en $X \setminus B_X$ tal que $x_{n+1} \in D(x_n, B_X)$ se llama un **raudal**.

Teorema 7.11 (Danĕs-Giles-Sims-York) *Si la norma $\|\cdot\|$ de un espacio de Banach X tiene la propiedad de la gota, entonces X es reflexivo.*

Prueba. Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de la gota. Nuestro primer objetivo es demostrar que cualquier raudal (x_n) en $X \setminus B_X$ posee una subsucesión norma-convergente. Aceptemos por un momento que existe un raudal (x_n) en $X \setminus B_X$ sin ninguna subsucesión norma-convergente. Esto significa que si definimos $C = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$, entonces C es norma-cerrado ($\overline{C} = C \cup C'$) y ya que por hipótesis $x_{n+1} \in D(x_n, B_X)$, resulta que no existe $x_n \in C$ que cumpla con

$$D(x_n, B_X) \cap C = \{x_n\}$$

lo cual es contrario al hecho de que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de la gota.

Sea ahora $x^* \in X^*$. Sin perder generalidad podemos suponer que $\|x^*\| = 1$. Escojamos una sucesión (y_n) en B_X de modo que

$$x^*(y_n) > 1 - 4^{-n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Construyamos, a partir de esto, un raudal (x_n) en $X \setminus B_X$ del modo siguiente: sea $x_1 \in 2B_X$ satisfaciendo

$$x^*(x_1) > 2 - \frac{1}{4}$$

(esto obliga, por supuesto, a que $x_1 \notin B_X$) y para todo $n \geq 2$, pongamos

$$x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}.$$

Un fácilmente argumento inductivo nos revela que a.) $1 + \dfrac{3}{4^n} < x^*(x_n) \le \|x_n\| \le 1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$, para todo $n \ge 1$.

b.) $x_n \notin B_X$, para todo $n \ge 1$, y

c.) $x_{n+1} \in D(x_n, B_X)$, para todo $n \ge 1$.

Se sigue, por la primera parte, que existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) convergiendo en la norma a un $x_0 \in X$. Gracias al inciso *a.*), vemos que $\|x_0\| \le 1$ y se cumple además que

$$x^*(x_0) = \lim_{k \to \infty} x^*(x_{n_k}) = 1 = \|x^*\|.$$

Lo acabado de exponer nos dice que cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre B_X, por lo que invocando al Teorema de James nos conduce a que B_X es débilmente compacto y, por consiguiente, a la reflexividad de X. ∎

Veamos otra aplicación del Teorema de James ahora en el ámbito de la Teoría de las Medidas Vectoriales. Sean (Ω, Σ) un espacio medible y $\mu : \Sigma \to X$ una medida vectorial; esto es, μ satisface:

i.) $\mu(\emptyset) = 0$, y

ii.) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$,
para cualquier sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ disjunta dos a dos de elementos de Σ.

Teorema 7.12 (Bartle-Dunford-Schwartz) *Si $\mu : \Sigma \to X$ es una medida vectorial, entonces el rango de μ,*

$$\mu(\Sigma) = \{\mu(E) : E \in \Sigma\}$$

es un conjunto relativamente débilmente compacto de X.

Prueba. Sea $x^* \in X^*$. Puesto que $x^* \circ \mu$ es una medida finita con signo, el Teorema de Descomposición de Hahn, nos garantiza la existencia de un par de conjuntos medibles A, B tales que $\Omega = A \cup B$, $A \cup B = \emptyset$, $x^* \circ \mu$ es no-negativa sobre A y $-x^* \circ \mu$ es no-negativa sobre B. Observemos ahora que

$$\begin{aligned}
\sup\{x^*(x) : x \in \overline{\mu(\Sigma)}^{\omega}\} &= \sup\{x^*(x) : x \in \mu(\Sigma)\} \\
&= \sup\{x^*(\mu(E)) : E \in \Sigma\} \\
&= \sup\{x^*(\mu(E \cap A)) + x^*(\mu(E \cap B)) : E \in \Sigma\} \\
&= x^*(\mu(A)),
\end{aligned}$$

lo cual nos revela que cada $x^* \in X^*$ alcanza su supremo sobre $\overline{\mu(\Sigma)}^{\omega}$ y gracias al Teorema de James tenemos que $\mu(\Sigma)$ es relativamente débilmente compacto. ■

8 Compacidad débil en $C(\Omega)$

Si Ω es un conjunto compacto, entonces $C(\Omega)$ denotará el espacio de Banach de todas la funciones continuas a valores reales definidas sobre Ω, provisto de la norma del supremo. Uno define la *topología de la convergencia puntual* sobre $C(\Omega)$, en notación τ_p, declarando que una sucesión $(f_n)_1^\infty$ en $C(\Omega)$ *converge puntualmente* a una $f \in C(\Omega)$ si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

para cada $\omega \in \Omega$. Es un hecho ya establecido que la topología de la convergencia puntual es menos fina que la topología débil sobre $C(\Omega)$.

Es también conocido que existen espacios compactos que no son secuencialmente compactos. Un ejemplo lo constituye el conjunto K formado por todas las funciones $f : [0,1] \to [0,1]$ provisto de la topología de la convergencia puntual (ver por ejemplo [17], Ejemplo 26, pág. 192-193). Sin embrago, para la τ_p-topología sobre $C(\Omega)$ vale el siguiente resultado. Aquí seguimos la prueba dada por H. P. Rosenthal [22].

Lema 8.1 *Si $K \subseteq C(\Omega)$ es τ_p-compacto, entonces K es secuencialmente τ_p-compacto.*

Prueba. Sea (f_n) una sucesión en K. Veamos que existe una subsucesión (f'_n) de (f_n) y un punto $g \in K$ tal que $\lim_n f'_n(\omega) = g(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Afirmación: *existe un conjunto numerable $D \subseteq \Omega$ tal que si $g, g' \in C(\Omega)$ son τ_p-puntos límites de la sucesión (f_n) y $g_{|D} = g'_{|D}$, entonces $g = g'$.*

En efecto, definiendo la relación de equivalencia $\backsim$ sobre Ω por

$$\omega \backsim \omega' \quad \text{si y sólo si} \quad f_n(\omega) = f_n(\omega') \quad \text{para todo } n = 1, 2, \ldots$$

y si denotamos por S el conjunto de todas la clases de equivalencias provenientes de $\backsim$, resulta que (S, d) es un espacio métrico compacto con la métrica d definida por

$$d([\omega], [\omega']) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(\omega) - f_n(\omega')|$$

para todo $[\omega], [\omega'] \in S$. Ahora bién, si $g \in C(\Omega)$ satisface $g(\omega) = g(\omega')$ siempre que $\omega \backsim \omega'$, entonces la función $\hat{g}$ definida por $\hat{g}(\varphi(\omega)) = g(\omega)$ pertenece a $C(S)$, donde $\varphi : \Omega \to S$ es la aplicación cociente natural.

Como S es separable y φ es sobreyectiva, existe un subconjunto numerable D en Ω tal que $\varphi(D)$ es denso en S. Veamos que D cumple con la conclusión de nuestra afirmación. En efecto, supongamos que g y g' son τ_p-puntos límites de la sucesión (f_n). Se sigue entonces que si $\omega \backsim \omega'$, entonces $g(\omega) = g(\omega')$ y $g'(\omega) = g'(\omega')$. Pero ahora, si g y g' están en $C(\Omega)$ y coinciden sobre D, entonces $\hat{g}$ coincide con $\hat{g}'$ sobre un subconjunto denso de S, de donde se deduce que $\hat{g} = \hat{g}'$ sobre todo S y en consecuencia $g = g'$.

Una vez establecida la existencia del conjunto D, un simple argumento de diagonalización nos permite obtener una subsucesión (f_n') de (f_n) convergiendo puntualmente sobre D. Siendo K τ_p-compacto, entonces él es numerablemente τ_p-compacto, por lo que se garantiza la existencia de un τ_p-punto límite $g \in K$ de la sucesión (f_n'). Si $g' \in K$ es cualquier otro τ_p-punto límite de (f_n'), entonces $g_{|_D} = g'_{|_D}$ y así, $g = g'$. Esto nos muestra que la subsucesión (f_n') tiene un único τ_p-punto límite $g \in K$. Pero una sucesión en un espacio compacto Hausdorff con exactamente un punto límite, converge a dicho punto. Por esto $\lim_n f_n'(\omega) = g(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$. ∎

Ahora una elegante caracterización de compacidad débil en $C(\Omega)$ debida a Grothendieck ([11]). La prueba más común de éste resultado usa el hermoso Teorema de Representación de Riesz para $C(\Omega)^*$. Uno puede hacer una presentación de la prueba del resultado de Grothendieck prescindiendo del Teorema de Representación de Riesz pero usando, en su lugar, el Teorema de James.

Teorema 8.1 (Grothendieck) *Sea K un subconjunto norma acotado de $C(\Omega)$. Entonces K es débilmente compacto si y sólo si es τ_p-compacto.*

Prueba. Supongamos en primer lugar que K es débilmente compacto. Puesto que la τ_p-topología es más débil que la ω-topología, entonces K es τ_p-compacto.

Recíprocamente, supongamos que K es τ_p-compacto y sea $x^* \in C(\Omega)^*$. Si $\alpha = \sup x^*(K)$, entonces escojamos una sucesión (f_n) en K de modo que $\alpha = \lim_{n\to\infty} x^*(f_n)$. Por el Lema 8.1, existe una subsucesión (f_n') de (f_n) convergiendo puntualmente a alguna función $f \in K$. De aquí se sigue que $x^*(f) = \alpha$ y, por el Teorema de James, K es débilmente compacto. ∎

Una combinación del Teorema de Hahn-Banach junto con el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se usa con frecuencia en la demostración del siguiente resultado. He aquí otra sin usar teoría de la medida.

Corolario 8.1 (Mazur) *Si (f_n) es una sucesión acotada en $C(\Omega)$ y τ_p-convergente a una función $f \in C(\Omega)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen $f_{n_1}, \ldots, f_{n_k} \in \{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ y $0 \leq \lambda_1, \ldots, \lambda_k \leq 1$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ tal que*

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i} \right\| < \varepsilon.$$

Prueba. Sea $K = \{f_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{f\}$. Entonces K es norma-acotado y τ_p-compacto. Se sigue del Teorema 8.1 que K es débilmente compacto y gracias al Teorema de Krein, $\overline{co}(K)$ también lo es. Un llamado al Teorema 2.1 termina la prueba. ■

Compacidad débil en $L_1(\mu, X)$ es una de las bellas tentaciones a las que uno no puede resistirse. Pero esto forma parte de otra historia ...

Bibliografía

[1] Banach, S. **Théorie des opérationes linéaires**, Monogr. Mat. 1, Warszawa, 1932.

[2] Deville R., Godefroy G. and Zizler V. **Smoothness and Renorming in Banach Spaces**, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 64(1993).

[3] De Wilde, M. *Pointwise Compactness in Spaces of Functions and R. C. James Theorem*, Math. Ann. 208(1974), 33-47.

[4] Díaz, S. *Weak compactness in* $L^1(\mu, X)$, Amer. Math. Soc. 124(1996), 2685-2693.

[5] Diestel, J. **Sequences and Series in Banach Spaces**, Springer-Verlag New York, Inc. 1984.

[6] Diestel, J. and Uhl, J. J. **Vector measures**, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc. 1977

[7] Dunford, N. and Schwartz, J. T. **Linear operators I**, Interscience, New York, 1958.

[8] Floret, K. *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Math. 1980.

[9] Godefroy, G. *Some applications of Simons' inequality.* Por aparecer.

[10] Grothendieck A. *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, Amer. J. Math. 74(1952), 168-186.

[11] Grothendieck A. *Sur les applications lineáires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$, Canad. J. Math. 3(1953), 129-127.

[12] Holmes, R. B. **Geometric functional analysis and its applications**, New York-Heidelberg-Berlin 1975.

[13] James, R. C. *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math. 66(1957), 159-169.

[14] James, R. C. *Weakly compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 113(1964), 129-140.

[15] Klee, V. L. *A conjecture on weak compactness*, Trans. Amer. Math. Soc. 104(1962), 398-402.

[16] Kremp, S. *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian Theorem and the Double Limit Criterion*, Arch. Math. 47(1986), 66-69.

[17] Lages Lima, E. **Elementos de topologia geral**, IMPA, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1976

[18] Narici, L. and Beckenstein, E. **Topological vector spaces**, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1985.

[19] Pavone, M. *A note on reflexivity in Banach spaces*, Rend. Circolo Matem. di Palermo, Serie II, Tomo XXXVII (1988), 120-125.

[20] Pryce J. D. *Weak compactness in locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 17(1966), 148-155.

[21] Rosenthal, H. P. *On injective Banach spaces and the spaces $L^{\infty}(\mu)$ for finite measures μ*, Acta Math. 124(1970), 205-248.

[22] Rosenthal, H. P. *The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces*, Compositio Math. 28(1974), 83-111.

[23] Simons, S. *A convergence theorem with boundary*, Pacific J. Math. 40(1972), 703-708.

[24] Simons, S. *Maximinimax, minimax, and antiminimax theorems and a result of R. C. James*, Pacific J. Math. 40(1972), 709-718.

[25] Ülger, A. *Weak compactness in $L^1(\mu, X)$*, Amer. Math. Soc. 103(1991), 143-149.

[26] Whitley, R. *An Elementary Proof of the Eberlein-Šmulian Theorem*, Math. Annalen 172(1967), 116-118.

[27] Whitley, R. *The Krein-Smulian theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. (1986), 376-377.