Revista Notas de Matemática
Vol.3(1), No. 250, 2007, pp.33-44
http://www.matematica/ula.ve
Comisión de Publicaciones
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales

Giovanni Calderón

Resumen

Un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales es presentado. Éste se inspira en los métodos iterativos tipo predictor-corrector propuestos por Muhammad y Faizan [Muhammand Aslam Noor and Faizan Ahmad, Numerical comparison of iterative methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 167-172]. Resultados de convergencia muestran que el método puede alcanzar velocidad de convergencia cúbica. La experimentación numérica permite ver que el nuevo método supera la precisión alcanzada por otros métodos con un costo de cómputo igual o superior, incluyendo el método de Newton.

key words. ecuaciones no lineales; método Regula Falsi; método de Newton-Raphson; método de Müller; predictor-corrector.

Abstract

An iterative method to solve nonlinear equations is presented. This is inspired by the predictor-corrector type iterative methods proposed by Muhammad and Faizan [Muhammand Aslam Noor and Faizan Ahmad, Numerical comparison of iterative methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 167-172]. Convergence results show that the method can reach speed of cubic convergence. Numerical experimentation allows to see that the new method surpasses the precision reached about other methods with a cost of equal or superior calculation, including Newton's method.

key words. nonlinear equations; Regula Falsi method; Newton-Raphson method; Müller's method; predictor-corrector.

AMS(MOS) subject classifications.

1 Introducción

Uno de los problemas básicos en Análisis Numérico consiste en encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación $f(x) = 0$ para una función f dada. Aunque es tradición usar el método iterativo de Newton-Raphson (NR) para resolver tales ecuaciones, en los últimos años se han definido métodos iterativos que mejoran, en cierta forma, la precisión de este método; ver, por ejemplo, [1, 2, 3] para el caso de métodos iterativos definidos a partir del método de descomposición de Adomian, o [4, 5] donde se definen métodos tipo predictor-corrector o multipunto.

Inspirados en el trabajo de Ujević [4], Muhammand y Faizan [5] sugieren dos nuevos métodos tipo predictor-corrector que combinan los métodos de Newton-Raphson y Regula Falsi (NRF) y Regula Falsi con Newton (RFN); los ejemplos dados en [5], ilustran la eficiencia de estos métodos (NRF y RFN) comparados con el método de NR y el método (NU) propuesto por Ujević en [4]. En [5], el método NRF presentó, en general, mejor precisión que el RFN. Sin embargo, no se hace ningún análisis teórico sobre el orden de convergencia de estos métodos.

En este artículo se presenta un nuevo método predictor-corrector para resolver ecuaciones no lineales usando los métodos de Bisección y Müller (BM). Se analiza la convergencia de los método NRF y BM y se sugiere una modificación al método RFN para mejorar su precisión. De los resultados obtenidos, tanto analíticos como experimentales, se concluye que el nuevo método iterativo, BM, resulta más eficiente que los métodos NR, NU y los métodos propuestos por Muhammad y Faizan.

El resto del artículo esta distribuido de la siguiente forma. A continuación se dan los algoritmos NR, NU, NRF, la versión modificada de RFN y el nuevo algoritmo propuesto BM. En la tercera sección se introducen los resultados de convergencia para los métodos NRF y BM. La cuarta sección presenta los ejemplos numéricos en los cuales se comparan los métodos descritos.

2 Métodos iterativos

Sea α una raíz de $f \in \mathrm{C}^2(I)$, con I un intervalo que contiene a α. Se asume que $f'(\alpha) \neq 0$ y que la aproximación inicial x_0 del método de NR se toma en un entorno de α. El algoritmo del método de NR es dado a continuación.

Algoritmo 1 (NR)

Paso 1: Para un x_0 inicial dado, $\varepsilon > 0$, calcular x_1, x_2, x_3,..., tal que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Paso 2: Si $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$, PARAR

Paso 3: $n = n + 1$, ir al paso 1.

El proximo método, NU, es introducido por Ujević [4]. Este método resulta, en muchos casos, más eficiente que el método NR pero, en general, menos eficiente que los algoritmos introducidos por Muhammad y Faizan [5]. El método usa a NR (como algoritmo predictor) con un factor de peso de $\mu = 1/2$; este factor de peso produce la versión óptima del método (para los detalles, ver [4]).

Algoritmo 2 (NU)

Paso 1: Para un x_0 inicial dado, $\varepsilon > 0$, calcular x_1, x_2, x_3,..., tal que

$$z_n = x_n - (1/2)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n + 4(z_n - x_n)\frac{f(x_n)}{3f(x_n) - 2f(z_n)}$$

Paso 2: Si $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$, PARAR

Paso 3: $n = n + 1$, ir al paso 1.

Los métodos de intervalo NRF y RFN, propuestos por Muhammand y Faizan [5], son derivados usando en conjunto el método de NR y el método de Regula Falsi. El primer método, NRF, consiste en definir, en cierto sentido, el nuevo intervalo a partir de la aproximación obtenida por el método de Regula Falsi y el método NR. El algoritmo es como sigue.

Algoritmo 3 (NRF)

Paso 1: Para un intervalo $[a, b]$ dado, $\varepsilon > 0$, calcular x_1, x_2, x_3,..., tal que

$$x_{n+1} = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

Paso 2: Si $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$, PARAR

Paso 3: Si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$, entonces $b = x_{n+1}$ y $a = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$

En caso contrario: $a = x_{n+1}$ y $b = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$

Paso 4: $n = n + 1$, ir al paso 1.

El método RFN aproxima la raíz, en cada paso, usando el método Regula Falsi y, el valor obtenido es usado como condición inicial para el método NR. El nuevo intervalo queda definido a partir de las aproximaciones de la raíz encontradas por los métodos de Regula Falsi y NR. El algoritmo queda dado a continuación.

Algoritmo 4 (RFN)

Paso 1: Para un intervalo $[a, b]$ dado, $\varepsilon > 0$, calcular x_1, x_2, x_3,..., tal que

$$z_n = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}\ ; \qquad x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Paso 2: Si $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$, PARAR

Paso 3: Si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$, entonces $b = x_{n+1}$ y $a = z_n$

En caso contrario: $a = x_{n+1}$ y $b = z_n$

Paso 4: $n = n + 1$, ir al paso 1.

En esta nueva versión del RFN, la aproximación encontrada mediante el método Regula Falsi es usada para definir uno de los extremos del nuevo intervalo, a diferencia de la versión introducida en [5] donde la aproximación de Regula Falsi sólo sirve como condición inicial del NR. Con este cambio el método RFN mejora su precisión, superando en muchos casos al método NRF, lo cual no ocurría con la versión anterior.

En muchos problemas los métodos previamente dados (Algoritmos 1-4) pierden precisión o no convergen; por ejemplo, en funciones de tipo exponencial o en los casos donde se tiene un cambio de concavidad dentro del intervalo $[a, b]$ (ver, ejemplos 5 y 7). En estos problemas resulta apropiado combinar el método de la bisección y el método de Müller para crear un nuevo método. El algoritmo queda dado a continuación.

Algoritmo 5 (BM)

Paso 1: Para un intervalo $[a, b]$ dado, $\varepsilon > 0$ y un máximo número de iteraciones,

calcular x_1, x_2, x_3,..., tal que

$$c = (a + b)/2; \qquad a_0 = \frac{(c - b)[f(a) - f(b)] - (a - b)[f(c) - f(b)]}{(a - b)(c - b)(a - c)}$$

$$a_1 = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} + (b - c)a_0, \qquad a_2 = f(b)$$

$$\text{raíz} = b - 2a_2/(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2})$$

a_0, a_1 y a_2 definen los coeficientes del polinomio de segundo grado

$P(x) = a_0(x - x_2)^2 + a_1(x - x_2) + a_2$ (Müller).

Paso 2: Si $a <$ raíz $< b$, entonces $x_{n+1} =$ raíz

En caso contrario: $x_{n+1} = b - 2a_2/(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2})$

Paso 3: Si $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$ o $\left|f(x_{n+1})\right| < \varepsilon$, PARAR

Paso 4: Si $f(a)f(x_{n+1}) < 0$, entonces $b =$ raíz

Si $f(a)f(c) > 0$ entonces $a = c$

En caso contrario: $a =$ raíz

Si $f(b)f(c) > 0$ entonces $b = c$

Paso 5: $n = n + 1$, ir al paso 1.

3 Resultados de convergencia

Convergencia para el NRF: Se supone que las hipótesis necesarias para obtener convergencia en los métodos de Regula Falsi y Newton quedan garantizadas; es decir, $f \in C^2[a, b]$, con a y b tales que $f(a)f(b) < 0$, $f'(\alpha) \neq 0$ y f'' no cambie de signo en $[a, b]$. Se puede suponer, sin perdida de generalidad, que $f''(x) > 0$ en $[a, b]$, en otras palabras, f es convexa. En este caso, el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ estará siempre por encima de la gráfica de f, cualquiera sea el signo de la primera derivada de f. Ahora, si $f'(\alpha) > 0$, $\mathscr{M}_1 := f''(\eta)/(2f'(\xi))$ y $\mathscr{M}_2 := f''(\xi_n)/(2f'(x_n))$, se tiene entonces que el error para los métodos de Regula Falsi y Newton está dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} := \alpha - a_{n+1} &= \mathscr{M}_1(\alpha - a_n)(b - \alpha) \qquad \text{con } \ \eta, \xi \in (a_n, b), & (1)\\ e_{n+1} := x_{n+1} - \alpha &= \mathscr{M}_2(x_n - \alpha)^2 \qquad \text{con } \ \xi_n \in \text{interior}(\alpha, x_n), & (2) \end{aligned}$$

respectivamente. Debido a que el método NRF utiliza al método de Newton para modificar el extremo derecho, b, en cada iteración ($x_0 = b$ condición inicial), (1) queda dada por

$$\varepsilon_{n+1} := \alpha - a_{n+1} = \mathscr{M}_1(\alpha - a_n)(b_{n+1} - \alpha) \qquad \text{con } \ \eta, \xi \in (a_n, b_n). \tag{3}$$

Si $\mathscr{M} := \text{máx}_{x\in[a,b]} |f''(x)|/2|f'(x)|$ entonces al sustituir (2) en (3) se obtiene que

$$|\alpha - a_{n+1}| \leq \mathscr{M}^2|\alpha - a_n||b_n - \alpha|^2 \leq |\alpha - a_n||\mathscr{M} e_0|^{2^n},$$

con $e_0 := b - \alpha$ (error inicial para el método de Newton). Al ser $\mathscr{M}|e_0| < 1$ (condición necesaria para la convergencia del método de NR) resulta que $\text{lím}_{n\to\infty} |\alpha - a_{n+1}| = 0$ y por lo tanto $a_n \to \alpha$. Es decir, la sucesión de iterados $\{a_n\}$ del método NRF converge a la raíz simple α.

Por otro lado,

$$\alpha - a_{n+1} = \mathscr{M}_1\mathscr{M}_2(\alpha - a_n)(b_n - \alpha)^2 \leq \mathscr{M}^2(\alpha - a_n)\Big[(b_n - a_n) + (a_n - \alpha)\Big]^2 \tag{4}$$

Además, debido a las hipótesis ($f'' > 0$ y $f' > 0$) se tiene que

$$b_n - a_n \leq 2(\alpha - a_n), \tag{5}$$

pues el método de Newton converge más rápido a α que el método de Regula Falsi. En otras palabras, b_n está más cerca a α que a_n; por lo tanto,

$$\alpha - a_{n+1} \leq \mathscr{M}^2(\alpha - a_n)\Big[2(\alpha - a_n) + (a_n - \alpha)\Big]^2 = \mathscr{M}^2(\alpha - a_n)^3.$$

Pasando al límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - a_{n+1}|}{|\alpha - a_n|^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^3} = \Big[\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\Big]^2, \tag{6}$$

ya que $b_n \to a_n$ y f es dos veces continuamente diferenciable. Esto implica que el método presenta un orden cúbico en su convergencia.

Cuando $f'' > 0$ pero $f'(\alpha) < 0$ resulta en que $\alpha - a$ siempre es constante para el método de Regula Falsi. Por lo tanto, $b_n - a_n \leq 2(\alpha - b_n)$ y un análisis similar al anterior puede hacerse llegando nuevamente a un orden de convergencia cúbico. Para el caso en que $f'' < 0$, se cambia f por $-f$ y se hace un razonamiento análogo.

En conclusión, si el método NR no converge en las primeras iteraciones entonces el método NRF resultará más apropiado; pues, a partir de (4), (5) y (6) se concluye que NRF tiende a lograr un orden cúbico de convergencia en muy pocas iteraciones.

Convergencia para el BM: El algoritmo produce una sucesión de intervalos $[a_n, b_n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tal que: $\alpha \in [a_n, b_n]$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ $\forall n$ y $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Por lo tanto, para un cero simple, α, en el intervalo $[a, b] \equiv [a_0, b_0]$, la convergencia a α queda garantizada sólo bajo la hipótesis de la continuidad de f. Por otra parte, si $f \in C^3(U)$, con U una vecindad de α, el método presenta una velocidad de convergencia cúbica. Para probar esta afirmación, sea $P(x)$ el polinomio que interpola a f en los nodos a_{n+1}, b_{n+1} y $(a_{n+1} + b_{n+1})/2$ entonces, del error de interpolación polinomial [6], se obtiene

$$f(\alpha) - P(\alpha) = (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})(\alpha - \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2})\frac{f^{(3)}(\eta)}{3!},$$

con $\eta \in (a_{n+1}, b_{n+1})$. Ya que $f(\alpha) = 0$, resulta

$$-P(\alpha) = \Big[(\alpha - a_{n+1})^2(\alpha - b_{n+1}) + (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})^2\Big]\frac{f^{(3)}(\eta)}{12}. \tag{7}$$

Expandiendo $P(\alpha)$ alrededor de x_{n+1}, se tiene

$$P(\alpha) = P(x_{n+1}) + (\alpha - x_{n+1})P'(\xi) \qquad \text{con } \xi \in \text{interior}(\alpha, x_{n+1})$$

y, x_{n+1} seleccionado tal que $P(x_{n+1}) = 0$. Por sustitución en (7) resulta que

$$(\alpha - x_{n+1}) = -\Big[(\alpha - a_{n+1})^2(\alpha - b_{n+1}) + (\alpha - a_{n+1})(\alpha - b_{n+1})^2\Big]\frac{f^{(3)}(\eta)}{12P'(\xi)}\,, \tag{8}$$

donde $P'(\xi) = 2a_{0,n}\xi + a_{1,n}$, con $a_{i,n}$, $i = 0, 1$, los valores de a_0 y a_1 en la n-ésima iteración. Para facilitar el análisis, se supone inicialmente que $0 \le x_{n+1} < \alpha$ y que $a_{0,n} > 0$ ($P'(\xi)$ representa un segmento de recta con pendiente positiva). En este caso $a_{1,n} \le \text{mín}_{\xi\in(x_{n+1},\alpha)} P'(\xi)$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} a_{1,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(c_n)}{b_n - c_n} + \lim_{n\to\infty} (b_n - c_n)a_{0,n} = f'(\alpha)$$

y como el $\text{mín}_{x\in[a,b]} f'(x) \le f'(\alpha)$, pues $\alpha \in [a, b]$, entonces

$$\min_{x\in[a,b]} f'(x) \le \min_{\xi\in(x_{n+1},\alpha)} P'(\xi).$$

Se puede suponer, sin ninguna perdida de generalidad, que las derivadas de P y f tienen el mismo signo, por lo tanto

$$\min_{x\in[a,b]} |f'(x)| \le \min_{\xi\in(x_{n+1},\alpha)} |P'(\xi)|.$$

Es decir, el máximo valor de $f^{(3)}(\eta)/12P'(\xi)$ está dado por

$$\mathscr{M} := \frac{1}{12}\max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)}\right|. \tag{9}$$

Al multiplicar P' por -1 y con un análisis similar al anterior se obtiene el mismo valor de $\mathscr{M}$ para el caso en que $a_{0,n} \le 0$. Los casos restantes: $x_{n+1} < \alpha < 0$, $0 < \alpha < x_{n+1}$, $\alpha < x_{n+1} < 0$, o los casos donde α y x_{n+1} tienen signos opuestos, resultan equivalentes al caso analizado.

Por otro lado, en la n-ésima iteración, la raíz del polinomio de Müller, x_n, que está dentro del intervalo $[a_n, b_n]$ pasa a definir el nodo a_{n+1} o b_{n+1} según sea el caso (paso 4 del algoritmo). Entonces, podemos suponer, sin perdida de generalidad, que el error en la n-ésima iteración $\varepsilon_n := \alpha - x_n = \alpha - a_{n+1}$ (pues en caso contrario, $\alpha - x_n = \alpha - b_{n+1}$, el desarrollo resulta equivalente) y por lo tanto de (8) y (9) se tiene que

$$\left|\varepsilon_{n+1}\right| \le 2\mathscr{M}\left|\varepsilon_n\right|^3, \tag{10}$$

siempre y cuando $\left|\alpha - b_{n+1}\right| \leq \left|\alpha - a_{n+1}\right|$. A partir de (10) se obtiene una velocidad de convergencia cúbica para el método BM. Sin embargo, si

$$\left|\alpha - a_{n+1}\right| < \left|\alpha - b_{n+1}\right| \tag{11}$$

se tiene que

$$\left|a_{n+1} - b_{n+1}\right| = \left|a_{n+1} - \alpha + \alpha - b_{n+1}\right| < 2\left|\alpha - b_{n+1}\right|$$

y, en el peor de los casos, a partir del método de bisección se obtiene que

$$\left|\alpha - a_{n+1}\right| < 2\left|\alpha - b_{n+1}\right| \leq \left|\varepsilon_n\right| \tag{12}$$

Entonces, de (8) y (12)

$$\begin{aligned}
\left|\varepsilon_{n+1}\right| &\leq \mathscr{M}\left|\varepsilon_n^2(\alpha - a_{n+1} + a_{n+1} - b_{n+1}) + \varepsilon_n(\alpha - a_{n+1} + a_{n+1} - b_{n+1})^2\right| \\
&\leq \mathscr{M}\left[2\left|\varepsilon_n\right|^3 + 3\left|\varepsilon_n\right|^2\left|a_{n+1} - b_{n+1}\right| + \left|\varepsilon_n\right|\left|a_{n+1} - b_{n+1}\right|^2\right] \\
&\leq 6\mathscr{M}\left|\varepsilon_n\right|^3.
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq 6\mathscr{M}|\varepsilon_n|^3,$$

lo cual completa la prueba de convergencia del método BM. ■

Por último, se debe resaltar (lo cual no se hace en [4]) que el método NU no puede tener un orden de convergencia mayor a 2. A partir de su función de iteración $\phi_U(x) = x - 4\mu u(x)f(x)/(3f(x) - 2f(x - \mu u(x)))$, con $u(x) := f(x)/f'(x)$, se tiene que

$$\phi_U(\alpha) = \alpha, \qquad \phi_U'(\alpha) = \frac{1 - 2\mu}{1 + 2\mu}, \qquad \phi_U''(\alpha) = \frac{4\mu(1 + 2\mu - 2\mu^2)}{(1 + 2\mu)^2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

y para que $\phi_U'(\alpha) = 0$ se debe seleccionar $\mu = 1/2$. Pero para este valor especifico de μ se obtiene que $\phi_U''(\alpha) = 0.75f''(\alpha)/f'(\alpha) \neq 0$, lo cual no permite que el orden de convergencia del método NU sea mayor que 2.

4 Experimentación Numérica

En esta sección se presentan los resultados numéricos (número de iteraciones necesarias para alcanzar la tolerancia prescrita) para un test de ejemplos (ver Cuadro 1. Los ejemplos 1-6 son

Ejemplo	función	x_0	$[a,b]$
1	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$	2	[2, 3]
2	$f(x) = x - \cos(x)$	0	$[0,\ \pi/2]$
3	$f(x) = (1/x) - 1$	2.7	[0.9, 2.7]
4	$f(x) = e^{1-x} - 1$	3	[0, 3]
5	$f(x) = e^{x^2+7x-30} - 1$	2.8	[2.8, 3.2]
6	$f(x) = (1/x) - \sin(x) + 1$	-1.3	$[-1.3,\ -0.5]$
7	$f(x) = \sin^2(0.2x)e^{2x}\tan(1-x)$	1.7	[0.5, 1.7]
8	$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$	2.0	$[-0.5,\ 2.0]$
9	$f(x) = (x^{15}+1)e^{x^2-1}$	1.3	$[-2.0,\ 1.3]$

Cuadro 1: Test de ejemplos para la experimentación numérica.

tomados de [5]). Para todos los algoritmos propuestos se usa una tolerancia de error de $\varepsilon = 1 \times 10^{-10}$, y un máximo número de iteraciones $n = 1000$. Para efecto de la comparación, la condición inicial del método de NR, x_0, se toma en uno de los extremos del intervalo inicial $[a,\ b]$.

Los resultados numéricos son dados en el Cuadro 2, incluyendo el valor absoluto de la primera deriva de la función de iteración del método NR, $\phi_N(x) := x - u(x)$, calculada en el punto inicial x_0. La condición suficiente para asegurar la convergencia del método de NR viene dada por $|\phi'_N(x_0)| < 1$. Sin embargo, en la mayoría de los casos donde esta condición falla, el método NR logra obtener convergencia. En otras palabras, el método BM no esta siendo favorecido al ser el único método que no utiliza a NR como método predictor. La notación RFN^1 y RFN^2 representan los métodos de RFN propuesto en [5] y la nueva versión dada en este artículo, respectivamente. Además, "div" denota la divergencia del método y "est" indica que el método se estanca en un determinado valor, distinto de la raíz α, después de cierto número de iteraciones.

De los resultados, es claro que el algoritmo RFN^2 mejora la precisión obtenida con RFN^1. De esta manera, se puede concluir que la modificación propuesta en este trabajo al algoritmo RFN de [5] resulta apropiada. En muchos casos, el algoritmo RFN^2 llega a superar la precisión del algoritmo NRF, lo cual no se lograba en ningún momento en [5].

El nuevo algoritmo BM presenta, en línea general, mejor precisión que todos los algoritmos propuestos anteriormente. Resulta importante, hacer notar, que el método BM converge cualquiera sea el intervalo inicial, siempre y cuando se cumpla que $f(a)f(b) < 0$ en la primera iteración. En otras palabras, el radio de convergencia del nuevo método es mayor que el de los otros métodos

Ejemplo	$\lvert\phi'_N(x_0)\rvert$	NR	NU	NRF	RFN[1]	RFN[2]	BM
1	2.5	7	6	4	4	3	3
2	1.0	6	5	4	3	3	3
3	3.4	div	5	4	5	3	4
4	0.63	11	6	5	7	4	4
5	12.1	16	8	7	est	20	1
6	3.0	26	6	4	4	3	4
7	0.95	10	9	10	$> n$	29	5
8	4.32	6	6	6	54	6	4
9	0.98	147	div	19	div	30	8

Cuadro 2: Iteraciones necesarias para los distintos métodos propuestos. El término div es usado para representar la divergencia del método, mientras que est nos indica el estancamiento del método en un determinado valor.

propuestos. Por ejemplo, para el problema 5, los métodos NR y NU sólo convergen si $x_0 \in [2.8,\ 4.7]$ y NRF si el valor de b se mantiene por debajo de 4.6. En algunos casos, aunque se alcance la convergencia, el método necesitará un alto número de iteraciones para alcanzar la tolerancia prescrita, como resulta en el ejemplo 9 para el método NR.

En cada iteración del método NR es necesario evaluar f y f', mientras para el método BM se necesitan dos evaluaciones de f (después de la primera iteración). Si n es el número de iteraciones requeridas para el método NR, m el número de iteraciones requeridas para el método BM y suponiendo que el costo computacional para evaluar f y f' son los mismos, entonces (en principio) se debe usar el método BM si $m < n$. De la experimentación numérica, se observa, que en el peor de los casos, Ejemplo 8, el método NR supera en un 30 % el número de iteraciones del método BM. Aún más, desde un punto de vista práctico, la evaluación de f' resulta más costosa que la evaluación de f. Por lo cual, el método BM resultará más apropiado al no requerir la evaluación de la derivada.

Para cualquiera de los métodos NRF o RFN se necesitan 2 evaluaciones de f y una evaluación de la derivada f'. Por lo tanto, se debe usar el método BM si $2m < 3n$, es decir, $m < (3/2)n$ (suponiendo que n denota el número de iteraciones necesarias para NRF o RFN). Un razonamiento similar se aplica en el caso del método NU (2 evaluaciones de f y una evaluación de la derivada).

La eficiencia computacional, según Ostrowski [7], $\mathscr{E}(\phi) = r^{1/d}$, donde r es el orden de convergencia, d el número total de funciones evaluadas (por iteración) y ϕ la función de iteración referida al método en cuestión, esta dada por

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(\phi_U) &= 2^{1/3} \approx 1.26,\\
\mathscr{E}(\phi_N) &= 2^{1/2} \approx 1.41,\\
\mathscr{E}(\phi_\varsigma) &= 3^{1/3} \approx 1.44,\\
\mathscr{E}(\phi_{BM}) &= 3^{1/2} \approx 1.73,
\end{aligned}$$

donde ς denota cualquiera de los métodos NRF o RFN^i, con $i = 1, 2$. Por lo tanto, el método NU es menos eficiente que el método de NR, mientras que el método BM propuesto en este artículo supera en efectividad a todos los métodos analizados.

5 Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado por CDCHT-ULA, Mérida, Venezuela, bajo el proyecto de investigación C-1422-06-05-A.

Referencias

[1] Changbum Chum, *A new iterative method for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput. **178** (2006) 415–422.

[2] S. Abbasbandy, *Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput. **145** (2003) 887–893.

[3] Mário Basto, Viriato Semiao, Francisco L. Calheiros, *A new iterative method for compute nonlinear equations*, Appl. Math. Comput. **173** (2006) 468–483.

[4] Nenad Ujević, *A method for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput. **174** (2006) 1416–1426.

[5] Muhammand Aslam Noor and Faizan Ahmad, *Numerical comparison of iterative methods for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput. **180** (2006) 167–172.

[6] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, 6th ed., PWS Publishing Company, Bostan, 2002.

[7] A. M. Ostrowski, *Solution of Equatios and Systems of Equations*, 2th ed., Academic Press, 1966.

GIOVANNI CALDERÓN
Grupo Ciencias de la computación, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: giovanni@ula.ve