Revista Notas de Matemática
Vol.3(1), No. 251, 2007, pp.45-71
http://www.matematica/ula.ve
Comisión de Publicaciones
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Integral de Cauchy y Funciones Regladas

Nelson Viloria y Reinaldo Cadenas

Resumen

Presentamos la integral de Cauchy como una elegante alternativa a la integral de Riemann. Partiendo de la formalización de la teoría de integración de funciones escalonadas, transferimos las propiedades fundamentales a la clase de las funciones regladas. Limitamos el proceso de integración a una categoría de funciones suficientemente próxima a la de las funciones continuas y lo suficientemente amplia como para contener los tipos de funciones requeridas, desde un punto de vista pragmático.

Palabras y frases claves: Funciones regladas, funciones escalonadas, funciones de variación acotada, integral de Cauchy, Lema de Cauchy, convergencia uniforme.

Abstract

We present the Cauchy integral as an elegant alternative to the Riemann integral. Begining from the formalization on the theory of steps functions integrations, we transfer the fundamental properties to the kind of ruled functions we limit the integration process to a category of functions close enough to content the continues functions and wide enough to content the kinds os needed functions, from the pragmatic point of view.

1 Introducción

La clase de funciones Riemann integrables es algo difusa (cuando no se considera la Teoría de la Medida), en este sentido utilizaremos una categoría de funciones completamente caracterizada: el espacio de las funciones Regladas ($G[a,b]$), con la norma de la convergencia uniforme. En [2], Berberian estudia esta clase de funciones desde la óptica francesa (Bourbaki-Dieudonné). Nosotros definiremos la integral de Cauchy para una función reglada como el límite de una sucesión, de integrales de funciones escalonadas, que converge uniformemente a dicha función. A partir de esto, mostraremos todas las propiedades usuales de una integral, haciendo más natural la Teoría de Integración, pues partimos de conocimientos simples e intuitivos de la integral de una función escalonada. Las propiedades de la integral de Cauchy se transfieren de las propiedades de las funciones escalonadas. Una presentación bastante esquemática de esta novedosa óptica se encuentra en [3].

Las funciones regladas y la integral de Cauchy han sido apropiadamente privilegiadas en el estudio de las ecuaciones en diferencia: [1] y [6], así como en el de las ecuaciones integrales tipo Volterra-Stieltjes: [7] y [8].

2 Funciones Escalonadas

Definición 1 *Sea* $[a,b]$ *un intervalo cerrado y acotado en* $\mathbb{R}$*. Una* ***partición*** P *de* $[a,b]$ *es un conjunto* $\{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$*. Escribimos*

$$\mathcal{P}[a,b] = \{P \;:\; P \textit{ es una partición de } [a,b]\}.$$

Note que si $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, entonces P genera n sub-intervalos cerrados y acotados contenidos en $[a,b]$, a saber

$$[t_0, t_1],\ [t_2, t_3], \ldots, [t_{n-1}, t_n].$$

Además, si $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces $Q = P \cup \{c\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Así, de manera más general, cuando $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$, entonces $P \cup Q \in \mathcal{P}[a,b]$.

Decimos que $Q \in \mathcal{P}[a,b]$ es ***más fina*** que $P \in \mathcal{P}[a,b]$, si $P \subset Q$. De la definición, se sigue que cada sub-intervalo abierto de Q está contenido en algún sub-intervalo abierto de P.

Definición 2 *Una función* $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llama* ***escalonada*** *si existe* $P \in \mathcal{P}[a,b]$*, tal que* ϕ *es constante en cada sub-intervalo abierto de* P*. Es decir, si* $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ *para cada* $k = \overline{1,n}$ *existe* $\phi_k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\phi(x) = \phi_k \qquad \textit{si} \qquad t_{k-1} < x < t_k.$$

Nota 3

(1) De la definición 2 se sigue que ϕ *debe estar definida en los extremos de los sub-intervalos* $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1,n})$*; pero no es necesario que el valor que tome en los extremos de cada uno de los sub-intervalos coincida con* ϕ_k*.*

(2) Si ϕ *es una función escalonada sobre* $[a,b]$ *y* ϕ *es constante en cada sub-intervalo abierto de* $P \in \mathcal{P}[a,b]$*, entonces* ϕ *es constante en cada sub-intervalo abierto de* Q*, donde* Q *es una partición más fina que* P*.*

(3) $\boldsymbol{E[a,b]} = \{\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ \phi \textit{ es escalonada}\}.$

Teorema 4 *Sean* $\phi, \varphi \in E[a,b]$. *Entonces*

(a) $\phi + \varphi \in E[a,b]$ *(b)* $\phi \cdot \varphi \in E[a,b]$

Prueba

Como $\phi, \varphi \in E[a,b]$, entonces existen $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que ϕ es constante en cada sub-intervalo de P y φ es constante en cada sub-intervalo de Q.

Ahora, debemos hallar una partición $\mathrm{O} \in \mathcal{P}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ tal que $\phi + \varphi$ sea constante en cada uno de los sub-intervalos abiertos de O.

Definimos $\mathrm{O} = \mathrm{P} \bigcup \mathrm{Q}$. Claramente, $\mathrm{O} \in \mathcal{P}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ y en cada sub-intervalo abierto I de O tanto ϕ como φ son constantes en I. En consecuencia, $\phi + \varphi$ es constante en cada sub-intervalo abierto I de O y así, $\phi + \varphi \in E[a,b]$.

De manera análoga se verifica que $\phi \cdot \varphi \in E[a,b]$.

∎

3 Funciones Regladas

Definición 5 *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo, una función* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llama* ***reglada*** *si para cada* $x \in I$ *existen*

$$f(x-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad y \qquad f(x+) = \lim_{t \to x^+} f(t).$$

Escribimos $\boldsymbol{G[a,b]}= \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\quad f \textit{ reglada}\}.$

Nota 6

(1) Toda función continua es reglada, es decir,
$G[a,b] \subset C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \textit{ continua}\}.$

(2) Dadas dos funciones regladas, ¿se puede garantizar que la función compuesta de ambas es reglada? La respuesta es no.

Ejemplo 7 *Dadas las funciones* $f, g\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/\mathrm{x}) & si \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad y \quad g(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \\ \\ 1 & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Un cálculo simple nos permite concluir que f *y* g *son funciones regladas. Además,* f *toma valores positivos y negativos en cualquier intervalo* $(0, \delta)$ *y, en consecuencia,* $g \circ f$ *toma los valores 1 y -1; por lo tanto,* $(g \circ f)(0+)$ *no existe. Así,* $g \circ f$ *no es reglada.*

(3) Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función reglada. Entonces, para cada conjunto compacto* $K \subset I$, $f(K)$ *es un conjunto acotado.*

En efecto, como f *es reglada, para cada* $x \in I$ *existen* $\delta_x > 0$ *y* $M_x > 0$ *tales que*

$$|f(t)| \leq M_x$$

para cada $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \bigcap I$. *Luego, la colección* $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in I}$ *cubre al conjunto* K *y como* K *es compacto, existen* $x_1, \ldots, x_n \in K$ *tales que*

$$K \subset \bigcup_{1}^{n} (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}).$$

Si $M = \max\{M_{x_1}, \ldots, M_{x_n}\}$ *, entonces*

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall\ x \in K.$$

Así, f *es acotada.*

(4) Es necesario destacar que: K *compacto no implica que* $f(K)$ *compacto cuando* f *es reglada. Así, lo muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 8 *Sea* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ \\ 1/x & si \quad x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]; \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces, f *es reglada en* $[0, 1]$ *y, sin embargo,*

$$f([0, 1]) = \left\{ \frac{1}{n}; \qquad n \in \mathbb{N} \right\}$$

no es compacto, por no ser cerrado en $\mathbb{R}$.

Nota 9

De los resultados básicos de cálculo se sigue que el producto y la suma de funciones regladas son funciones regladas.

Lema 10 *Sean* $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(X) \subset Y$. *Sean* $a \in X'$ *y* $b \in Y' \bigcap Y$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *y* $\lim\limits_{y\to b} g(y) = g(b)$. *Entonces* $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

Prueba

Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario, por la definición de límite existe $\eta > 0$ tal que

$$y \in Y,\ |y - b| < \eta \implies |g(y) - g(b)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Para el η hallado por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \eta. \tag{2}$$

Por lo tanto, de (2) y (1) se sigue que

$$x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \implies |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

Así, $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$.

∎

Corolario 11 *Si* $f \in G[a, b]$ *y* $g \in C[a, b]$, *entonces* $g \circ f \in G[a, b]$.

4 Funciones de Variación acotada

Definición 12 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Si* $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$, *escribimos* $\triangle f_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ *y definimos la* ***variación de* f *relativa a la partición*** P, *como*

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i|.$$

Además, definimos la ***variación (total) de*** $\mathbf{f}$ *en* $[a, b]$, *denotada por* $V(f, a, b)$ *(o simplemente* $V(f)$ *),* *mediante:*

$$V(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V(f, P).$$

Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llama de* ***variación acotada*** *en* $[a, b]$ *si, y sólo si,* $V(f) < \infty$.

Nota 13

(1) Toda función monótona en $[a, b]$ *es de variación acotada en* $[a, b]$, *y además*

$$V(f) = |f(b) - f(a)|.$$

(2) Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función con derivada* f' *acotada en* (a, b), *entonces* f *es de variación acotada en* $[a, b]$.

(3) Una función, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *puede ser continua sin ser de variación acotada en* $[a, b]$, *como lo muestra el siguiente ejemplo*

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

4) Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es de variación acotada en* $[a, b]$, *entonces* f *es acotada en* $[a, b]$.

Teorema 14 *Si* f *y* g *son funciones de variación acotada, entonces* $f + g$ *y* $f \cdot g$ *son funciones de variación acotada.*

Prueba

Sea $P = \{t_0, \ldots , t_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |\triangle(f + g)_i| = \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i + \triangle g_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i| + \sum_{i=1}^{n} |\triangle g_i| \leq V(f) + V(g).$$

En consecuencia, $V(f + g) \leq V(f) + V(g)$ y, así, $f + g$ es de variación acotada en $[a, b]$.

Veamos que $f\cdot g$ es de variación acotada en $[a,b]$. Por hipótesis, f y g son acotadas, así, existen A y B tales que

$$|f(x)| \leq A \qquad \text{y} \qquad |g(x)| \leq B, \tag{3}$$

para todo $x \in [a,b]$. Sea $h = f\cdot g$, entonces

$$\begin{aligned}
\triangle h_i = &\ (f\cdot g)(t_{i-1}) - (f\cdot g)(t_i) = f(t_{i-1})g(t_{i-1}) - f(t_i)g(t_i)\\
= &\ f(t_{i-1})g(t_{i-1}) - f(t_i)g(t_{i-1}) + f(t_i)g(t_{i-1}) - f(t_i)g(t_i). \qquad (4)\\
= &\ g(t_{i-1})\triangle f_i + f(t_i)\triangle g_i.
\end{aligned}$$

De (3) y (4), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\triangle h_i| = &\ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i)\triangle g_i + g(t_{i-1})\triangle f_i|\\
\leq &\ \sum_{i=1}^{n} |f_i|\ |\triangle g_i| + \sum_{i=1}^{n} |g(t_{i-1})|\ |\triangle f_i|\\
\leq &\ A \sum_{i=1}^{n} |\triangle g_i| + B \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i|\\
\leq &\ A\, V(g)\ +\ B\, V(f).
\end{aligned}$$

Así, $V(h) \leq A\, V(g)\ +\ B\, V(f)$ y por tanto $f\cdot g$ es de variación acotada en $[a,b]$. ∎

Teorema 15 *(Relación entre funciones regladas y de variación acotada)*

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de variación acotada en* $[a,b]$, *entonces* f *es reglada en* $[a,b]$.

Prueba

Sea $(t_n) \subset [a,t)$ tal que $t_n \longrightarrow t$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{1}^{n} |\triangle f_i| \leq V(f,a,t)$. De donde,

$$\sum_{1}^{\infty} |\triangle f_i| \leq V(f,a,t) \tag{5}$$

(ya que $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i|$ es monótona creciente y acotada superiormente). Luego, para cada

$\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} m \geq n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow |f(t_m) - f(t_n)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{m} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \right| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|. \qquad (6) \end{aligned}$$

Ahora, si $n \longrightarrow \infty$, entonces $m \longrightarrow \infty$ y $s_n, s_m \longrightarrow L$. Entonces,

$$|s_m - s_n| \longrightarrow 0. \qquad (7)$$

Además, como $m > n$, entonces

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \sum_{i=1}^{m} |\triangle f_i| - \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i| + \sum_{i=n+1}^{m} |\triangle f_i| - \sum_{i=1}^{n} |\triangle f_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i=n+1}^{m} |\triangle f_i| \right| \\ &= \sum_{i=n+1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|. \qquad (8) \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (6), (7) y (8), se sigue que la sucesión $(f(t_n))$ es de Cauchy. En consecuencia, existe $f(t-)$.

De manera análoga se prueba la existencia de $f(t+)$.

■

5 Caracterización de las Funciones Regladas

Teorema 16 *(Criterio de Cauchy)*

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces

(a) Dado $x \in [a, b)$, existe $f(x+)$ si, y sólo si,
$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 : \forall\, s, t \in (x, x + \delta_x) \cap [a, b] \Longrightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$

(b) Dado $x \in (a,b]$, *existe* $f(x-)$ *si, y sólo si,*
$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta > 0 : \forall\, s,t \in (x-\delta_x, x) \cap [a,b] \Longrightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon.$

PRUEBA

$(\Rightarrow)$ Sea $L_x = \lim\limits_{u \to x^+} f(u)$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\forall \ \ u \in [a,b] \bigcap (x, x+\delta_x) \Longrightarrow |f(u) - L_x| < \varepsilon/2.$$

Luego, si $s,t \in [a,b] \bigcap (x, x+\delta_x)$, entonces

$$|f(s) - L_x| < \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad |f(t) - L_x| < \varepsilon/2.$$

Así,

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - L_x| + |L_x - f(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

siempre que $s,t \in [a,b] \bigcap (x, x+\delta_x)$.

$(\Leftarrow)$ Sea $(x_n) \subset [a,b)$ con $x_n > x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \longrightarrow x \in [a,b)$.

Veamos que $(f(x_n))$ converge. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta_x > 0$ que satisface la condición de la hipótesis. Ahora, por la convergencia de (x_n); para el $\delta_x > 0$ hallado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} m,n > n_0 \Longrightarrow & \quad |x_n - x| < \delta_x \wedge |x_m - x| < \delta_x \\ \Longrightarrow & \quad x_m, x_n \in (x, x+\delta_x) \\ \Longrightarrow & \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia, $(f(x_n))$ es de Cauchy en $[a,b]$ y, por la completitud de $[a,b]$, se obtiene que $(f(x_n))$ converge. Así, $f(x+)$ existe.

De manera similar se verifica la existencia de $f(x-)$.

$\blacksquare$

Teorema 17 *Una función* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es reglada si, y sólo si, existe una sucesión de funciones* $(\phi_n) \subset E[a,b]$ *tal que*

$$\phi_n \rightrightarrows f \quad \textit{en} \quad [a,b].$$

Prueba

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de funciones $(\phi_n) \subset E[a,b]$ tal que

$$\phi_n \rightrightarrows f \quad \text{en} \quad [a,b]. \tag{9}$$

Sea $x_0 \in [a,b]$ $(x_0 \neq a \quad \text{y} \quad x_0 \neq b)$. Entonces, por (9), dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

para todo $t \in [a,b]$.

Por otro lado, como ϕ_{n_0} es una función escalonada, ϕ_{n_0} es reglada, en consecuencia, existe $\phi_{n_0}(x_0+)$ y, por el teorema 16, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall s,t \in (x_0, x_0+\delta) \cap [a,b] \quad \Longrightarrow \quad |\phi_{n_0}(t) - \phi_{n_0}(s)| < \varepsilon/3. \tag{10}$$

Luego, para todo $s,t \in (x_0, x_0+\delta)$ se tiene, por (9) y (10), que

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| \leq & \quad |f(s) - \phi_{n_0}(s)| + |\phi_{n_0}(s) - \phi_{n_0}(t)| + |\phi_{n_0}(t) - f(t)| \\ < & \quad \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De nuevo por el teorema anterior, $f(x_0+)$ existe.

Procediendo de manera similar probamos que $f(x_0-)$ existe, y así, f es reglada.

($\Rightarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in [a,b]$, por el teorema anterior existe un abierto $I(x) = (y(x), z(x))$ que contiene a x tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{n}, \tag{11}$$

siempre que $s,t \in (y(x), x) \bigcap [a,b]$ o $s,t \in (x, z(x)) \bigcap [a,b]$.

Puesto que $[a,b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} I(x)$ y $[a,b]$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ tales que $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I(x_i)$. Sea $(c_j)_{0 \leq j \leq m = 3n+2}$ una sucesión creciente, formada por $a, b, x_i, y(x_i)$ y $z(x_i)$ $(i = \overline{1,n})$. Entonces, o $c_{j+1} \in I(x_i)$ o $c_{j+1} \in [z(x_i), c_m]$ ya que la sucesión es creciente. Esto último implica que $c_{j+1} = z(x_i)$; pues de lo contrario $c_j < z(x_i) < c_{j+1}$, pero $z(x_i)$ también es un c_k. En consecuencia,

$$(c_j, c_{j+1}) \subset V(x_i).$$

Luego, si $s, t \in (c_j, c_{j+1})$, entonces

$$(a) \quad s, t \in (y(x_i), x_i) \; \cap \; [a, b] \quad \text{o} \quad (a) \quad s, t \in (x_i, z(x_i)) \; \cap \; [a, b],$$

pues

$$1) \quad c_j \in (y(x_i), x_i) \quad \Longrightarrow \quad c_{j+1} \in (y(x_i), x_i] \quad \Longrightarrow \quad (a) \quad \text{o}$$

$$2) \quad c_j \in [x_i, z(x_i)) \quad \Longrightarrow \quad c_{j+1} \in (x_i, z(x_i)] \quad \Longrightarrow \quad (b).$$

Por lo tanto, si $s, t \in (c_j, c_{j+1})$, entonces por (11)

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{n}.$$

Definiendo

$$\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{m} f(\varepsilon_j) \chi_{(c_j, c_{j+1})}(x) \quad + \quad \sum_{j=0}^{m} f(c_j) \chi_{\{c_j\}}(x),$$

donde $\varepsilon_j \in (c_{j-1}, c_j)$. Tenemos que $(\phi_n) \subset E[a, b]$ y

$$x \in [a, b] \Longrightarrow \begin{cases} x \in (c_j, c_{j+1}) & \text{para algún } c_j \\ x = c_j & \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad |g_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |f(\varepsilon_j) - f(x)| \\ \qquad 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad |g_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a, b]$.

$\blacksquare$

Nota 18

Note que la convergencia uniforme de (ϕ_n) *a* f*, sobre* $[a, b]$*, nos asegura que* (ϕ_n) *es de Cauchy.*

Corolario 19 *(Discontinuidades de las Funciones Regladas)*

Sea $f \in G[a, b]$*. Entonces el conjunto de puntos donde* f *es discontinua es numerable.*

PRUEBA

Como f es reglada, por el Teorema 17, existe $(\phi_n) \subset E[a,b]$ tal que

$$\phi_n \rightrightarrows f \qquad \text{sobre} \quad [a,b].$$

Ahora, como cada $\phi_n \in E[a,b]$, entonces existe un conjunto finito $H_n \subset [a,b]$ donde ϕ_n es discontinua. Así, cada ϕ_n es continua en $T_n = [a,b] \setminus H_n$ y, por la convergencia uniforme, f es continua en $\bigcap_1^\infty T_n = [a,b] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ es numerable, el corolario queda probado.

∎

6 Integral de Funciones Escalonadas

Sea ϕ una función escalonada definida sobre $[a,b]$, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Así, ϕ es constante sobre cada sub-intervalo (t_{i-1}, t_i) $(i = \overline{1,n})$. Designamos por ϕ_i el valor constante que toma ϕ en cada (t_{i-1}, t_i) $(i = \overline{1,n})$; es decir,

$$\phi(x) = \phi_i \qquad \text{si} \quad x \in (t_{i-1}, t_i) \;\; (i = \overline{1,n}).$$

Definición 20 *La **integral de una función escalonada** ϕ sobre $[a,b]$, denotada por el símbolo $\int_a^b \phi(t)dt$, se define mediante*

$$\int_a^b \phi(t)dt = \sum_{i=1}^n \phi_i \triangle t_i, \tag{12}$$

donde $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$.

Nota 21

(1) Si $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función constante, dada por $\phi(x) = c$, entonces por (12)

$$\int_a^b cdt = \sum_{i=1}^n c\triangle t_i = c\sum_{i=1}^n \triangle t_i c(b-a). \tag{13}$$

Obsérvese que si $c > 0$, entonces el valor de (13) coincide con el área de un rectángulo de base $b-a$ y altura c.

(2) Veamos que el valor de (12) no depende de la elección de la partición P, mientras ϕ sea constante en los sub-intervalos abiertos de P.

En efecto, Sea Q una partición más fina que P $(P \subset Q)$, que contiene un punto t más que P. Así,

$$t_0 < \cdots < t_k < t < t_{k+1} < \cdots < t_n.$$

Luego,

$$\phi_1(t_1 - t_0) + \cdots + \overbrace{\phi_k(t - t_{k-1}) + \phi_k(t - t_k)} + \cdots + \phi_n(t_n - t_{n-1})$$

$$= \phi_1(t_1 - t_0) + \cdots + \phi_k(t_{k-1} - t_k) + \cdots + \phi_n(t_n - t_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \triangle t_i.$$

Luego, el valor de la suma en (12) no cambia. Por lo tanto, podemos pasar de P a cualquier partición más fina que Q añadiendo cada vez puntos de sub-división uno tras otro y en cada paso la suma en (12) no sea altera. Por lo cual, el valor de la integral es el mismo para todos los refinamientos de P.

Teorema 22 (Propiedad Aditiva)

$$\int_a^b [\phi(t) + \varphi(t)]dt = \int_a^b \phi(t)dt \; + \; \int_a^b \varphi(t)dt.$$

Prueba

Consideremos $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$, P asociada a la función ϕ y Q asociada a la función φ. Entonces $T = P \bigcup Q \in \mathcal{P}[a, b]$ está asociada a la función $\phi + \varphi$, es decir, $\phi + \varphi$ es constante en cada sub-intervalo abierto de T.

Ahora, podemos escribir $T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ y definir $\displaystyle\int_a^b \phi(t)dt$ y $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt$ usando la partición T. Así,

$$\int_a^b \phi(t)dt \; + \; \int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \triangle t_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \triangle t_i = \sum_{i=1}^{n} (\phi_i + \varphi_i) \triangle t_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\phi(t) + \varphi(t)) \triangle t_i = \int_a^b [\phi(t) + \varphi(t)]dt.$$

$\blacksquare$

Teorema 23 (Propiedad Homogénea)

Para todo $c \in \mathbb{R}$, *se tiene que*

$$\int_a^b c\phi(t)dt = c\int_a^b \phi(t)dt.$$

Prueba

Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ una partición asociada a la función ϕ, y si $c \in \mathbb{R}$, entonces cP es también una partición asociada a la función $c\phi$ y si ϕ_i es el valor que toma ϕ en el sub-intervalo (t_{i-1}, t_i) de P, entonces $c\phi_i$ es el valor que toma $c\phi$ en el sub-intervalo (t_{i-1}, t_i). En consecuencia,

$$c\int_a^b \phi(t)dt = c\sum_{i=1}^{n} \phi_i \triangle t_i = \sum_{i=1}^{n} c\phi_i \triangle t_i = \sum_{i=1}^{n} c\phi \triangle t_i = \int_a^b c\phi(t)dt.$$

∎

Teorema 24 (Teorema de Comparación)

Si $\phi(t) \leq \varphi(t)$ *para todo* $t \in [a,b]$, *entonces*

$$\int_a^b \phi(t)dt \leq \int_a^b \varphi(t)dt. \tag{14}$$

Prueba

Como $\phi(t) \leq \varphi(t)$, entonces $\varphi(t) - \phi(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Por otro lado, de los teoremas 22 y 23,

$$\int_a^b [\varphi(t) - \phi(t)]dt = \int_a^b \varphi(t)dt - \int_a^b \phi(t)dt.$$

Luego, para probar (14), basta mostrar que

$$\int_a^b [\varphi(t) - \phi(t)]dt \ \geq 0.$$

Ahora, si $\psi(t) = \varphi(t) - \phi(t) \geq 0$, entonces es claro por la definición de $\int_a^b \psi(t)dt$, que $\int_a^b \psi(t)dt \geq 0$, pues $\int_a^b \psi(t)dt$ es la suma de términos no negativos.

∎

Teorema 25 (Aditividad Respecto al Intervalo de Integración)

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^c \phi(t)dt \ + \ \int_c^b \phi(t)dt \qquad si \quad a < c < b.$$

Prueba

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, asociada a la función ϕ. Podemos asumir que $c = t_j$ para algún j $(1 < j < n)$ (en otro caso podemos formar $Q = P \bigcup \{c\}$ más fina que P.) Así,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \phi(t)dt = & \ \sum_{i=1}^{n} \phi_i \triangle t_i \sum_{i=1}^{j} \phi_i \triangle t_i \ + \ \sum_{i=j+1}^{n} \phi_i \triangle t_i. \\
= & \ \phi_1 \triangle t_1 + \cdots + \phi_j \triangle t_j + \phi_{j+1} \triangle t_{j+1} + \cdots + \phi_n \triangle t_n \\
= & \ \int_a^c \phi(t)dt \ + \ \int_c^b \phi(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Teorema 26 (Invariancia Frente a la Traslación)

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_{a+c}^{b+c} \phi(t-c)dt.$$

Prueba

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, tal que $\phi(t) = \phi_i$ $(i = \overline{1,n})$ y $t \in (t_{i-1}, t_i)$.

Tomamos $\varphi(t) = \phi(t-c)$, siempre que $t \in (a+c, b+c)$ $(c \in \mathbb{R})$. Luego, $t - c \in (t_{i-1}, t_i)$ y $\varphi(t) = \phi_i$ en $(t_{i-1}+c, t_i+c)$. Así, $P' = \{t_0 + c, \dots, t_n + c\} \in \mathcal{P}[a+c, b+c]$, y φ es una función escalonada relativa a la partición P' y

$$\begin{aligned}
\int_{a+c}^{b+c} \phi(t-c)dt = & \ \sum_{i=1}^{n} \phi_i [(t_i + c) - (t_{i-1} + c)] \\
= & \ \sum_{i=1}^{n} \phi_i \triangle t_i = \int_a^b \phi(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Teorema 27 (Dilatación o Contracción del Intervalo de Integración)

$$\int_{ka}^{kb} \phi\left(\frac{t}{k}\right) dt = k \int_a^b \phi(t)dt, \qquad \forall \ \ k > 0. \tag{15}$$

Prueba

$P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, tal que $\phi(t) = \phi_i$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $(i = \overline{1,n})$.

Sea $\varphi(t) = \phi\left(\dfrac{t}{k}\right)$ si $ka < t < kb$. Luego $a < \dfrac{t}{k} < b$ $(k > 0)$ y, entonces,

$$u(t) = \phi_i \qquad \text{si} \quad t \in (kt_{i-1}, kt_i).$$

Así, $P' = \{kt_0, \ldots, kt_n\} \in \mathcal{P}[ka, kb]$, φ es una función escalonada relativa a la partición P' y

$$\int_{ka}^{kb} \phi\left(\frac{t}{k}\right) dt = \int_{ka}^{kb} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(kt_i - kt_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} \phi_i \triangle t_i = k \int_a^b \phi(t)dt.$$

■

Nota 28

(1) Ahora nos hace falta extender las propiedades de la integral de una función escalonada para $b < a$. Para eso definimos

$$\int_b^a \phi(t)dt = -\int_a^b \phi(t)dt, \qquad si \quad a < b$$

y también

$$\int_a^a \phi(t)dt = 0.$$

Con estas convenciones, el teorema 25 vale para cualquier ordenación de a, b y c.

(2) El teorema anterior puede extenderse al caso $k < 0$. Luego, para $k = -1$, (15) se convierte en

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_{-b}^{-a} \phi(-t)dt.$$

Esta propiedad se conoce como **Propiedad de Reflexión de la integral***, ya que el gráfico de la función $\varphi(t) = \phi(-t)$ se obtiene de la función ϕ, por reflexión con respecto al eje y.*

7 Integral de Cauchy o Integral Reglada

Teorema 29 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función reglada tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, donde $(\phi_n) \subset E[a,b]$. Entonces,* *(a) La sucesión* $\left(\int_a^b \phi_n(t)dt\right)$ *es de Cauchy.*

(b) Supongamos que $(\varphi_n) \subset E[a,b]$ *tal que* $\varphi_n \rightrightarrows f$ *en* $[a,b]$. *Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon \quad \forall \ t \in [a,b].$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt.$

Prueba

(a) Por la hipótesis, (ϕ_n) es de Cauchy, así, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > 0 \implies |\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall \ t \in [a,b]. \tag{16}$$

Por otro lado, por (16) y los teoremas 22 y 24, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b \phi_n(t)dt - \int_a^b \phi_m(t)dt\right| &= \left|\int_a^b (\phi_n(t) - \phi_m(t))dt\right| \\ &\leq \int_a^b |\phi_n(t) - \phi_m(t)|dt \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dt \\ &= \varepsilon\,\frac{b-a}{b-a} = \varepsilon, \end{aligned}$$

siempre que $m, n > n_0$. Así, $\left(\int_a^b \phi_n(t)dt\right)$ es de Cauchy.

(b) Como $\phi_n \rightrightarrows f$ y $\varphi_n \rightrightarrows f$ sobre $[a,b]$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $t \in [a,b]$, se tiene

$$n > n_1 \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2 \qquad \text{y}$$

$$n > n_2 \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2.$$

Luego, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ se sigue que

$$n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n(t) - f(t)|\ ,\ |\varphi_n(t) - f(t)| \quad < \varepsilon/2, \tag{17}$$

para todo $t \in [a,b]$. En consecuencia, si $n > n_0$ se sigue de (17) que

$$|\phi_n(t) - \varphi_n(t)| \leq |\phi_n(t) - f(t)| + |f(t) - \varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces por (b) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n(t) - \varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

para todo $t \in [a,b]$.

Por otro lado, si $n > n_0$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \phi_n(t)dt - \int_a^b \varphi_n(t)dt \right| &\leq \int_a^b |\phi_n(t) - \varphi_n(t)| dt \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt \qquad (18) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por (18), $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt$ existen. De la continuidad de la función valor absoluto, usando (18), concluimos que

$$\left| \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt \; - \; \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt. \qquad \blacksquare$$

Ese teorema nos permite definir sin ambigüedad la integral de una función reglada.

Definición 30 *Se define la* ***integral de una función reglada*** f, *sobre* $[a,b]$, *mediante*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt,$$

donde $(\phi_n) \subset E[a,b]$ *y satisface* $\phi_n \rightrightarrows f$, *sobre* $[a,b]$.

Decimos que f *es integrable y tal integral la denotamos por* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Nota 31

Es evidente que toda función continua es integrable.

Teorema 32 (Propiedad Aditiva)

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Prueba

Si f, g son funciones regladas, existen sucesiones de funciones escalonadas $(\phi_n), (\varphi_n)$ tales que $\phi_n \longrightarrow f$ y $\varphi_n \longrightarrow g$. De donde, $\phi_n + \varphi_n \longrightarrow f + g$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt &= \lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt + \lim_n \int_a^b \varphi_n(t)dt \\
&= \lim_n \left[\int_a^b \phi_n(t)dt + \int_a^b \varphi_n(t)dt\right] \\
&= \lim_n \int_a^b \left[\phi_n(t) + \varphi_n(t)\right] dt \qquad \text{(Teorema 22)} \\
&= \int_a^b [f(t)+g(t)]dt.
\end{aligned}$$

■

Teorema 33 (Propiedad Homogénea)

Para todo $c \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt.$$

Prueba

Existe una sucesión de funciones escalonadas (ϕ_n) tal que $\phi_n \longrightarrow f$. Luego, $c\phi_n \longrightarrow cf$. Así,

$$\begin{aligned} c\int_a^b f(t)dt &= c\lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt \\ &= \lim_n c\int_a^b \phi_n(t)dt \\ &= \lim_n \int_a^b c\phi_n(t)dt \qquad \text{(Teorema 23)} \\ &= \int_a^b cf(t)dt. \end{aligned}$$

∎

Teorema 34 (De Comparación)

Si $f(t) \leq g(t)$ *para todo* $t \in [a,b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Prueba

Existen sucesiones $(\phi_n), (\varphi_n)$ tales que $\phi_n \longrightarrow f$ y $\varphi_n \longrightarrow g$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$; tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $\phi_n(t) \leq \varphi_n(t)$. Así, por el teorema 24, se tiene que

$$\int_a^b \phi_n(t)dt \leq \int_a^b \varphi_n(t)dt, \qquad \forall \quad n \geq n_0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt \leq \lim_n \int_a^b \varphi_n(t)dt.$$

Es decir,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

∎

Teorema 35 (Aditividad con respecto al intervalo de integración)

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt,$$

Prueba

Existe $(\phi_n) \in E[a,b]$ tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. Luego, $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Así,

$$\int_a^c f(t)dt = \lim_n \int_a^c \phi_n(t)dt \quad \text{y} \quad \int_c^b f(t)dt = \lim_n \int_c^b \phi_n(t)dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \lim_n \int_a^b \phi_n(t)dt \\
&= \lim_n \left[\int_a^c \phi_n(t)dt + \int_c^b \phi_n(t)dt\right] \qquad \text{(Nota 28)} \\
&= \lim_n \int_a^c \phi_n(t)dt + \lim_n \int_c^b \phi_n(t)dt \\
&= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.
\end{aligned}$$

∎

8 Teoremas Fundamentales del Cálculo

Teorema 36 *Si* $f \in G[a,b]$ *y* $g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds$, *entonces* g *es uniformemente continua sobre* $[a,b]$ *(y, por lo tanto, continua sobre* $[a,b]$ *).*

Prueba

Como $f \in G[a,b]$ y $[a,b]$ es compacto, entonces por la nota 6, parte (3), $f([a,b])$ es acotado y, así, f es acotada sobre $[a,b]$. En consecuencia, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$, para todo $t \in [a,b]$. Por lo tanto, para todo $x, y \in [a,b]$ se sigue que

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(x)| &= \left|g(a) + \int_a^y f(t)dt - g(a) - \int_a^x f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_x^y f(t)dt\right| \\
&\leq \int_x^y |f(t)|dt \\
&\leq M|y-x|.
\end{aligned}$$

Así, g es una función Lipchitz y, de esta manera, g es uniformemente continua sobre $[a,b]$.

$\blacksquare$

Teorema 37 (Caracterización de Hönig)[7]

Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $f\in G[a,b]$ *y* $g(t)=g(a)+\int_a^t f(s)ds$ *para cada* $t\in[a,b]$.

(b) *Para cada* $t\in[a,b]$ *existe* $g'_+(t)=f(t+)$ *y, para cada* $t\in(a,b]$, *existe* $g'_-(t)=f(t-)$.

(c) $f\in G[a,b]$ *y* g *es una primitiva de* f *(es decir,* g *es continua y, fuera de un conjunto numerable de* $[a,b]$, *existe* $g'(t)=f(t)$*).*

Prueba

(a)⇒(b) Sea $t_0\in[a,b)$, veamos que $g'_+(t_0)=f(t_0^+)$

Nótese que

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[g(t_0+h)-g(t_0)\right]-f(t_0^+) = & \ \frac{1}{h}\left[g(a)+\int_a^{t_0+h} f(s)ds-g(a)\right.\\ & \left.-\int_a^{t_0} f(s)ds\right]-f(t_0^+)\\ = & \ \frac{1}{h}\int_a^{t_0+h} f(s)ds-f(t_0^+)\\ = & \ \frac{1}{h}\int_a^{t_0+h}[f(s)-f(t_0^+)]ds.\end{aligned} \tag{19}$$

Por otro lado, como $f\in G[a,b]$, entonces

$$\forall\ \ \varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta>0:\quad t_0<s<t_0+\delta\Longrightarrow|f(s)-f(t_0^+)|<\varepsilon. \tag{20}$$

Luego, de (19) y (20), se sigue que

$$g'_+(t_0)=f(t_0^+).$$

De manera similar se prueba que $g'_-(t_0)=f(t_0^-)$.

(b)⇒(c) Claramente, de la hipótesis (b), se tiene que $f\in G[a,b]$.

Ahora veamos que g es una primitiva de f. Como el conjunto de puntos donde una función reglada es discontinua es numerable, entonces

$$A = \{t \in [a,b) : \quad f(t+) \neq f(t)\} \qquad \text{y} \qquad B = \{t \in (a,b] : \quad f(t-) \neq f(t)\}$$

son numerables. En consecuencia, en los puntos de los conjuntos

$$[a,b] \setminus A \qquad \text{y} \qquad [a,b] \setminus B$$

f es continua; es decir, $f(x) = f(x+) = f(x-) = g'_+(x) = g'_-(x) = g'(x)$ para cada $x \in [a,b] \setminus A$ y para cada $x \in [a,b] \setminus B$. Así, fuera de un conjunto numerable de $[a,b]$, existe g' y $g'(t) = f(t)$. La continuidad de la función g se sigue del teorema 36.

(c)⇒(a) Como $f \in G[a,b]$, entonces existe $(\phi_n) \subset E[a,b]$ tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. Definimos,

$$\varphi_n(t) = g(a) + \int_a^t \phi_n(t)dt.$$

Como $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, entonces

$$\varphi_n \rightrightarrows \psi(t) = g(a) + \int_a^t f(t)dt$$

en $[a,b]$. Por la hipótesis (c), g es continua y, por (a)⇒(b)⇒(c), ψ es continua, con

$$g(a) = \psi(a).$$

Nuevamente, como (a)⇒(b)⇒(c), ψ es una primitiva de f y, así, existe ψ' con $\psi'(t) = f(t) = g'(t)$, fuera de un conjunto numerable de $[a,b]$. En consecuencia,

$$\psi = g.$$

Por lo tanto, (a) es cierto.

■

Corolario 38 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)

Sean $f \in G[a,b]$ *y* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Si f *es continua en* $c \in [a,b]$, *entonces* g *es derivable en* c *y*

$$g'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b, entonces $g'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F).

Prueba

La continuidad de f en c garantiza que $f(c+) = f(c-) = f(c)$ y, así, por (a)⇒(b) del teorema 37, se sigue que

$$g'(c) = g'_+(c) = g'(c) = f(c).$$

∎

Corolario 39 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f \in G[a,b]$ *y* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que* $g'(x) = f(x)$ *para cada* $x \in [a,b]$. *Entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Prueba

Como $f \in G[a,b], entonces$ g es continua en $[a,b]$ y $g'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Luego, por el teorema 37, g es una primitiva de f y, así,

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds,$$

para cada $t \in [a,b]$. En particular,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(s)ds.$$

∎

Corolario 40 *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua sobre* $[a,b]$ *y* $f = g'$ *para alguna función* g, *entonces*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

Prueba

Basta ver que si f es continua sobre $[a,b]$, entonces $f \in G[a,b]$ y, por el corolario 39, el resultado es inmediato.

∎

Nota 41

(1) Dada la función $F(x) = x\ln x + e^x$ *conocemos que* $F'(x) = \ln x + e^x - 1$*. El corolario 39 asegura que toda derivada* F' *nos da una fórmula para integrales, así en nuestro ejemplo*

$$\begin{aligned}\int_a^b (\ln x + e^x - 1)dx &= F(b) - F(a)\\ &= [b\ln b - e^b] - [a\ln a + e^a].\end{aligned}$$

(2) Es importante destacar que el primer teorema fundamental del cálculo nos dice que toda función f *definida sobre* $[a,b]$ *tiene una primitiva a saber*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + f(a).$$

9 Integración en términos elementales

Teorema 42 (Integración por Partes)

Sean $f', g' \in G[a,b]$*. Entonces*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt. \tag{21}$$

PRUEBA

Como

$$(f\cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t). \tag{22}$$

Entonces, por la hipótesis y (22), se sigue que

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b (f\cdot g)'(t)dt - \int_a^b f'(t)g(t)dt. \tag{23}$$

Por otro lado, por el corolario 40,

$$\int_a^b (f\cdot g)'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{24}$$

En consecuencia, de (23) y (24), se obtiene (21).

∎

Corolario 43 (Fórmula usual de Integración por Partes)

Si f' y g' son funciones continuas sobre $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Prueba

Basta recordar que $C[a,b] \subset G[a,b]$ y aplicar el Teorema 42.

■

Teorema 44 (Fórmula de Sustitución)

Sean $f', g' \in G[a,b]$. Si f es continua, entonces

$$\int_a^b (f\circ g)(t)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Prueba

Sea F una primitiva de f, entonces, por el corolario 40, se tiene que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por otro lado, como F es una primitiva de f, por la regla de la cadena, obtenemos

$$(F\circ g)'(t) = (F'\circ g)(t)g'(t) = (f\circ g)(t)g'(t),$$

para todo $t \in [a,b]\setminus E$, $E \subset \mathbb{R}$ numerable. En consecuencia, $F\circ g$ es una primitiva de $(f\circ g)g'$. Por otro lado, como $f \in C[a,b]$ y $g, g' \in G[a,b]$, entonces $(f\circ g)g' \in G[a,b]$. Por lo cual, usando el corolario 40, concluimos que

$$\int_a^b (f\circ g)(t)g'(t)dt = F(g(b)) - F(g(a)).$$

■

Referencias

[1] **AULBACH, B. and NEIDHART, L.** *Integration on measure chains.* Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations, 239-252, CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[2] **BERBERIAN, S.** *Regulated Functions: Bourbaki's Alternative to the Riemann Integral.* American Mathematical Monthly, $N°$ 86, pags 208-211, 1979.

[3] **CADENAS, R. y VILORIA, N.** *Integral de Cauchy: Alternativa a la Integral de Riemann.* Divulgaciones Matemáticas, Vol. 11, No. 1(2003), pp. 49-53.

[4] **CHAMBADAL, L. and OVAERT, J.** *Fonctions d'une Variable Réelle.* Dunod Université. Gauthier-Villars, 1972.

[5] **DIEUDONNÉ, J.** *Fundamentos de Análisis Moderno.* Editorial Reverté, S.A. España, 1966.

[6] **HILGER, S.** *Analysis on measure chains -a unified approach to continuous and discrete calculus-.* Results Math. 18 (1990), no. 1-2, 18-56.

[7] **HÖNIG, C.** *Équations intégrales généralisées et applications.* (French) [Generalized integral equations and applications] Harmonic analysis: study group on translation-invariant Banach spaces, Exp. No. 5, 50 pp., Publ. Math. Orsay 83, 1, Univ. Paris XI, Orsay, 1983.

[8] **VILORIA, N.** *El operador de Nemytskij en el Espacio de las Funciones Regladas.* Divulgaciones Matemáticas, Vol. 12, No. 2(2004), pp. 149-153.

NELSON VILORIA
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: nelson@ula.ve

REINALDO CADENAS
Departamento de Medición y Evaluación, Facultad de Humanidades y Educación,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: rcadena@ula.ve