Revista Notas de Matemática
Vol.5(2), No. 277, 2009, pp. 12-20
http://www.saber.ula.ve/notasdematematica/
Comisión de Publicaciones
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Teoremas del punto fijo para $T-$operadores de Banach

José R. Morales

Abstract

In this article we study the existence of fixed points for $T-$operators of Banach

Resumen

En este artículo estudiamos la existencia de puntos fijos para $T-$operadores de Banach

1 Introducción

Sea (M, d) un espacio métrico, una función $S : M \longrightarrow M$ se dice que es una contracción si existe $a \in [0, 1)$ tal que $\forall\, x, y \in M$

$$d(Sx, Sy) \leq ad(x, y) \tag{1.1}$$

S es llamado un operador de Banach si existe un $h \in (0, 1)$ tal que $\forall\, x \in M$

$$d(Sx, S^2x) \leq hd(x, Sx) \tag{1.2}$$

Evidentemente, toda contracción es un operador de Banach.

En el año 1979, T.L. Hicks - B. E. Rhoades [5] mostraron el siguiente resultado.

Teorema 1.1 *Sea (M, d) un espacio métrico completo, $0 \leq h < 1$ y $S : M \longrightarrow M$ supongamos que existe un $x \in M$ tal que*

$$d(Sy, S^2y) \leq hd(y, Sy) \tag{1.3}$$

Para todo $y \in 0(x, \infty) = \{x, Sx, \ldots , S^n x, \ldots \}$ la órbita de x. Entonces

i.- $\lim_{n\to\infty} S^n x = q$ *existe;*

ii.- $d(S^n x, q) \leq \dfrac{h}{1-h} d(x, Sx)$;

iii.- *q es un punto fijo de $S \Leftrightarrow G(x) = d(x, Tx)$ es $T-$orbitalmente semicontinua inferiormente es q*

En el 2008, U. C. Gairola - A. S. Rawat [4] usando la idea de Branciari mostro el siguiente resultado:

Teorema 1.2 *Sea (M, d) un espacio métrico completo, $0 \leq h < 1$ y $S : M \longrightarrow M$ supongamos que existe un $x \in M$ tal que*

$$\int_0^{d(Sy,S^2y)} \varphi(t)dt \leq h \int_0^{d(y,Sy)} \varphi(t)dt \tag{1.4}$$

Para todo $y \in 0(x, \infty)$, donde $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es una función localmente integrable, no negativa y $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0$. Entonces:

i.- $\lim_{n\to\infty} S^n x = q$;

ii.- $\displaystyle\int_0^{d(S^n)x,q} \varphi(t)dt \leq \frac{h^n}{1-h} \int_0^{d(x,Sx)} \varphi(t)dt$;

iii.- *q es un punto fijo de $S \Leftrightarrow G(x) = d(x, Sx)$ es $S-$orbitalmente continua en q.*

Evidentemente, si en (1.4) tomamos $Sx = x$ entonces obtenemos Teorema 1.1

2 Definiciones y resultados principales

En esta sección usando las ideas de A. Beiranvand - S. Moradi - M. Onid y H. Pazandeh [1], S. Moradi - A. Beiranvand [3] y S. Moradi [2] introducimos la noción de la $T-$operador de Banach.

Definición 2.1 *Sea (M, d) un espacio métrico y $T, S : M \longrightarrow M$ dos funciones. Se dice que S es un $T-$operador de Banach si existe un $h \in (0, 1)$ tal que para todo $x \in M$*

$$d(TSx, TS^2x) \leq hd(Tx, TSx) \tag{2.5}$$

Es claro, que si en 2.5 tomamos $Tx = x$ entonces obtenemos 1.2.

Ejemplo 2.2 *Sea* $M = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ *con la métrica inducida por* $\mathbb{R} : d(x, y) = |x - y|$. *Consideremos las funciones* $T, S : M \longrightarrow M$ *definida por* $Tx = \dfrac{1}{x} + 1$ *y* $Sx = 2x$. *Entonces*

i.- S *y* T *son funciones continuas en* M;

ii.- S *no es un operador de Banach, ya que*

$$d(Sx, S^2x) = |Sx - S^2x| = |2x| = 2|x| > |x| = d(x, Sx);$$

iii.- S *es un* $T-$*operador de Banach, puesto que*

$$\begin{aligned} d(TSx, TS^2x) &= |TSx - TS^2x| = \left|\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \left(\frac{1}{4x} + 1\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \left(\frac{1}{2x} + 1\right)\right| = \frac{1}{2}d(Tx, TSx) \\ &\leq \frac{1}{2}d(Tx, TSx). \end{aligned}$$

Definición 2.3 *Sea* (M, d) *un espacio métrico una función* $T : M \longrightarrow M$ *se dice que es secuencialmente convergente, si* $T(y_n)$ *es convergente entonces* (y_n) *también es convergente, para todo sucesión* $(y_n) \subset M$.

Definición 2.4 *Sea* (M, d) *un espacio métrico una función* $T : M \longrightarrow M$ *se dice que es subsecuencialmente convergente, si* $T(y_n)$ *es convergente entonces* (y_n) *tiene una subsucesión convergente, para todo* $(y_n) \subset M$.

Ejemplo 2.5 *Sea* $T : [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ *una función definida por* $T(x) = e^{-x}$,
$x \in [0, +\infty)$. *Entonces*

i.- T *es una función continua en* $[0, +\infty)$;

ii.- T *no es una función subsecuencialmente convergente ya que,* $T(n) = e^{-n} \longrightarrow 0$ *pero* $(n) \subset [0, +\infty)$ *no posee una subsucesión convergente.*

El siguiente resultado es una variante del teorema 1.1.

Teorema 2.6 *Sea (M, d) un espacio métrico completo y $T, S : M \longrightarrow M$ dos funciones tales que T es una función continua, inyectiva y subsecuencialmente convergente. Si S es un $T-$operador de Banach continuo entonces:*

i.- $\lim_{n\to\infty} TS^n x = q$ *existe;*

ii.- $d(TS^n x, q) \leq \dfrac{h^n}{1-h} d(Tx, TSx)$;

iii.- *S posee un único punto fijo, $y_0 \in M$;*

iv.- *Si T es secuencialmente convergente entonces* $\lim_{n\to\infty} S^n x = y_0$.

Prueba: Como S es un $T-$operador de Banach entonces para todo $x \in M$ se tiene,

$$d(TSx, TS^2x) \leq hd(Tx, TSx) \tag{2.6}$$

para algún $h \in (0, 1)$ usando inducción,

$$d(TS^n x, TS^{n+1}x) \leq h^n d(Tx, TSx) \tag{2.7}$$

y de 2.7 obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} d(TS^n x, TS^{n+1}x) = 0 \tag{2.8}$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$

$$\begin{aligned} d(TS^n x, TS^m x) &\leq d(TS^n x, TS^{n+1}x) + \ldots + d(TS^{m-1}x, TS^m x) \\ &\leq (h^n + \ldots + h^{m-1})d(Tx, TSx) \end{aligned}$$

y

$$d(TS^n x, TS^m x) \leq \frac{h^n}{1-h} d(Tx, TSx) \tag{2.9}$$

de (2.9) obtenemos

$$\lim_{n,m\to\infty} d(TS^n x, TS^m x) = 0$$

lo cual implica que $(TS^n x) \subset M$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto existe un $q \in M$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} TS^n x = q \tag{2.10}$$

y esto nos muestra (i).

En (2.9) haciendo $m \to \infty$ y obtenemos (ii):

$$d(TS^n x, q) \leq \frac{h^n}{1-h} d(Tx, TSx)$$

Como T es subsecuencialmente convergente, $(S^n x)$ posee una subsucesión $(S^{nk} x) \subset (S^n x)$ convergente, esto es, existe un $y_0 \in M$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} S^{nk} x = y_0 \tag{2.11}$$

Por la continuidad de T se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} TS^{nk} x = T(y_0) \tag{2.12}$$

De (2.10) y (2.12) obtenemos

$$T(y_0) = q \tag{2.13}$$

Usando la continuidad de S en (2.11),

$$\lim_{k\to\infty} S^{n_k+1} x = S(y_0) \tag{2.14}$$

Ahora, usando nuevamente la continuidad de T en (2.14) se tiene,

$$\lim_{k\to\infty} TS^{n_k+1} x = TS(y_0) \tag{2.15}$$

De (2.10) y (2.15) se obtiene,

$$q = TS(y_0) \tag{2.16}$$

y de (2.13) y (2.16) obtenemos

$$Ty_0 = TSy_0$$

como T es una función inyectiva entonces $y_0 = Sy_0$ y así hemos probado que y_0 es el punto fijo de S. Ahora, para ver la unicidad, supongamos que existe otro punto fijo $z_0 = Sz_0$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(Ty_0, Tz_0) &= d(TSy_0, TS^2 z_0) \leq hd(Ty_0, TSz_0) \\ &\leq hd(Ty_0, Tz_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(Ty_0, Tz_0) = 0$, lo cual implica que $Ty_0 = Tz_0$ y por la inyectividad de T, $y_0 = z_0$. Esto nos muestra (iii).

Finalmente, como T es secuencialmente convergente y usando (2.10) obtenemos que $(S^n x) \subset M$ es una sucesión convergente a y_0. □

El siguiente ejemplo nos muestra que la condición sobre T de ser subsecuencialmente convergente no puede ser eliminada en el teorema 2.6

Ejemplo 2.7 *Consideremos $M = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R} : d(x, y) = |x - y|$. Sean $T, S : M \longrightarrow M$ dos funciones definidas por $Tx = \dfrac{1}{x} + 1$, $Sx = 2x$, $x \in M$. En el ejemplo 2.2, mostramos que S es un operador de Banach.*

Sea $(n) \subset [1, +\infty)$. Entonces $T(n) = \dfrac{1}{n} + 1 \longrightarrow 1$, pero (n) no posee una subsucesión convergente, por lo tanto, T no es subsecuencialmente convergente. Así, no podemos aplicar el teorema 2.6, puesto que, si $Sy_0 = 2y_0 \Longleftrightarrow y_0 = 0 \notin M$. Así S no posee punto fijo en M. □

Ejemplo 2.8 *Sea $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R} : d(x, y) = |x - y|$. Consideremos las funciones $T, S : M \longrightarrow M$ definidas por $Tx = x^2$ y $S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$, $x \in M$. Entonces*

i.- *T y S son funciones continuas en M;*

ii.- *T es subsecuencialmente convergente;*

iii.- *T es secuencialmente convergente;*

iv.- *T es inyectivo;*

v.- *S es un $T-$operador de Banach.*

Por lo tanto, por el teorema 2.6 existe un $y_0 = \sqrt{1/5} \in M$ que es el único punto fijo de S. $\square$

Definición 2.9 *Sea (M,d) un espacio métrico y $T,S : M \longrightarrow M$ dos funciones. Se dice que S es un $T_{\int\varphi}-$operador de Banach si existe un $h \in (0,1)$ tal que para todo $x \in M$,*

$$\int_0^{d(TSx,TS^2x)} \varphi(t)dt \leq h \int_0^{d(Tx,TSx)} \varphi(t)dt \tag{2.17}$$

donde φ es una función localmente integrable, no - negativa y para todo $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$.

Si en 2.17, tomamos $Tx = x$, obtenemos la noción introducida por A. Branciari [6] y si en 2.17 tomamos $Tx = x$ y $\varphi(t) = 1$ obtenemos (1.2).

Ejemplo 2.10 *Sea $\mathbb{N}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|$. Sean $T,S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ funciones definidas por*

$$T(x) = x = Id, \quad S(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq 1 \\ \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases} \qquad \varphi(t) = \begin{cases} e^{1/1-t} & si \quad t > 1 \\ \\ 0 & si \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces

i.- *T es una función continua;*

ii.- *S no es una función continua y por lo tanto S no es una contracción;*

iii.- *S es una $\int\varphi-$contracción;*

iv.- *S es una $T_{\int\varphi}-$contracción.*

Teorema 2.11 *Sea (M,d) un espacio métrico completo y $T,S : M \longrightarrow M$ dos funciones tales que T es una función continua, inyectiva y subsecuencialmente convergente y S es un $T_{\int\varphi}-$operador de Banach. Entonces*

i.- $\lim\limits_{n\to\infty} TS^n x = q$ *existe;*

ii.- $d(TS^n x, q) \leq \dfrac{h^n}{1-h} d(Tx, TSx)$;

iii.- *S posee un único punto fijo, $y_0 = Sy_0$;*

iv.- *Si T es secuencialmente convergente entonces*

$$\lim_{h\to\infty} S^n x = y_0.$$

Prueba: Como S es un $T_{\int \varphi}-$operador de Banach entonces para todo $x \in M$ y $h \in (0,1)$

$$\int_0^{d(TSx,TS^2x)} \varphi(t)dt \leq h \int_0^{d(Tx,TSx)} \varphi(t)dt$$

y usando inducción obtenemos

$$\int_0^{d(TS^nx,TS^{n+1}x)} \varphi(t)dt \leq h^n \int_0^{d(Tx,TSx)} \varphi(t)dt$$

y de acá se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{d(TS^nx,TS^{n+1}x)} \varphi(t)dt = 0$$

Como $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(TS^nx, TS^{n+1}x) = 0$$

Sean $m, n \in M$ con $m > n$

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(TS^nx,TS^mx)} \varphi(t)dt &\leq (h^n + \ldots + h^{m-1}) \int_0^{d(Tx,TSx)} \varphi(t)dt \\
&= \frac{h^n}{1-h} \int_0^{d(Tx,TSx)} \varphi(t)dt
\end{aligned}$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^{d(TS^nx,TS^mx)} \varphi(t)dt = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n,m\to\infty} d(TS^n x, TS^m x) = 0,$$

lo cual implica que $(TS^n x) \subset M$ es Cauchy en M. Así existe un $q \in M$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} TS^n x = q.$$

El resto de la demostración del teorema es similar al teorema 2.6. $\square$

Referencias

[1] A. Beiranvand, S. Moradi, M. Omid, H. Pazandeh, *Two fixed point theorems for special mappings*, por aparecer.

[2] S. Moradi, *Fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type depend an another function*, por aparecer.

[3] S. Moradi and A. Beiranvand, *A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type depend an another function*, por aparecer.

[4] U. C. Gairola y A. S. Rawat, *A fixed point theorem for integral type inequality*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol 2, (2008), 15, 709 - 712.

[5] T. L. Hicks and B. E. Rhoader, *A Banach type fixed point theorem*, Math. Japónica 24, 3, (1979), 327 - 330.

[6] A. Branciari, *A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type*, Int. J. Math. Sci., 29, (2002), 9, 531 - 536.

JOSÉ R. MORALES
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: moralesj@ula.ve