DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR MEDIANTE EL ESTUDIO DE CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS DE LA PROPORCIONALIDAD

DEVELOPMENT OF KNOWLEDGE OF A PROFESSOR THROUGH THE STUDY OF EPISTEMIC AND COGNITIVE CONFIGURATIONS OF PROPORTIONALITY

DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO DO PROFESSOR MEDIANTE O ESTUDO DE CONFIGURAÇÕES EPISTÉMICAS E COGNITIVAS DA PROPORCIONALIDADE

MAURO RIVAS OLIVO*
rmauro@ula.ve
JUAN D. GODINO**
jgodino@ugr.es
Universidad de los Andes
Facultad de Humanidades y Educación
Escuela de Educación
Mérida, Edo. Merida
Venezuela

Fecha de recepción:14 de marzo de 2009
Fecha de revisión: 16 de marzo de 2009
Fecha de aceptación:28 de septiembre de 2009

Resumen

Este estudio tiene como objeto informar algunos avances teóricos sobre el constructo "conocimiento del profesor" de matemáticas referido en la literatura, y sobre la puesta en práctica de herramientas de análisis epistémico/cognitivo, concebidas y diseñadas con el fin de fomentar el desarrollo de esta forma de conocimiento en la formación de futuros profesores. Se presenta de manera esquemática el desarrollo de ese constructo en la literatura respectiva, se describen las herramientas de análisis utilizadas y se informa sobre la puesta en juego de tales herramientas en una muestra de 50 futuros profesores, al tratar con la resolución de un problema sobre proporcionalidad. Los resultados señalan la utilidad potencial del uso de dichas herramientas para fomentar el "Conocimiento Matemático para Enseñar" y se concluye con algunas implicaciones de este estudio en la formación de profesores.

Palabras clave: conocimiento matemático para enseñar, configuraciones epistémicas y cognitivas, proporcionalidad, formación de profesores.

Abstract

This article has an objective of informing regarding some theoretical advances on the "knowledge of a professor" of mathematics, as referred to in the literature, as well as the use of epistemic and cognitive analysis tools, conceived and designed in order to foment the development of this form of knowledge and the training of future professors. The development of this construct in the literature is presented in a schematic manner, the tools of analysis that are used are presented, and the use of such tools in a sample of 50 future professors is set forth, when dealing with a problem of proportionality. The results point out the potential usefulness of said tool to foment the "Mathematical knowledge to be taught" and a conclusion is given on some implications of this article for the training for professors.

***Keywords**: Mathematical knowledge to be taught, epistemic and cognitive configurations, proportionality, faculty training.*

Resumo

Este estudo visa informar de alguns avanços teóricos sobre o constructo "conhecimento do professor" de matemáticas referido na literatura, e sobre a posta em prática de ferramentas de análise epistêmico/cognitivo, concebidas e desenhadas visando promover o desenvolvimento desta forma de conhecimento na formação de futuros professores. Apresenta-se de maneira esquemática o desenvolvimento desse constructo na literatura respectiva, descrevem-se as ferramentas de análise utilizadas e informa-se sobre a posta em jogo dessas ferramentas numa mostra de 50 futuros professores, ao lidar com a resolução dum problema sobre proporcionalidade. Os resultados mostram a utilidade potencial do uso de ditas ferramentas para promover o "Conhecimento Matemático para Ensinar", e conclui-se com algumas implicações deste estudo na formação de professores.

***Palavras chave:** conhecimento matemático para ensinar, configurações epistémicas e cognitivas, proporcionalidade, formação de professores.*

EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 - 4910 • Año 14, Nº 48 • Enero - Junio 2010 • 189 - 205

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad constituye un espacio de investigación de amplia extensión; lograr que los alumnos resuelvan problemas en los que la noción de proporcionalidad se encuentra involucrada, constituye una tarea inscrita dentro de una problemática para la cual no se ha encontrado aún solución. La tarea de enseñanza, cuya responsabilidad descansa en gran parte en manos del docente, no parece haber alcanzado los niveles de suficiencia para garantizar ese aprendizaje. Aun cuando diversos estudios han abordado este asunto, sigue vigente la búsqueda de alternativas de posibles soluciones a una problemática que aún continúa en vigor.

Diversas investigaciones (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto, y Miller, 1998; Lo y Watanabe, 1997) convergen al señalar que los alumnos de la tercera etapa de educación básica presentan dificultades para resolver problemas que involucran el razonamiento proporcional, y, en correspondencia con este hecho, la tarea de los profesores para ayudar a sus alumnos a construir, consolidar y vincular esta forma de razonamiento no es fácil (Dole y Shield, 2008, p. 19). En este sentido, se reconoce la necesidad de fortalecer la formación de los futuros profesores para fomentar competencias pertinentes a fin de afrontar estas cuestiones.

Conscientes de esta problemática, inscrita en una más general de la educación matemática, la literatura actual señala el arribo a algunos avances teóricos de interés para la formación de profesores de matemáticas, cuyo progreso busca constituir cimientos para el estudio, producción y desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la matemática.

En el estudio que aquí se presenta, se expone, de manera muy sintética y posiblemente esquemática, una evolución observada en la literatura, que ha permitido ir consolidando un planteamiento teórico, alrededor del conocimiento matemático requerido para llevar a cabo su enseñanza; se hace énfasis en dos de las facetas de ese conocimiento y se presenta un estudio de las configuraciones epistémicas y cognitivas[1] de una situación problema de proporcionalidad, con el objeto de identificar la manifestación y desarrollo de estas dos facetas del conocimiento y el posible fomento de su adquisición por parte de futuros profesores.

Se trata de mostrar que el uso integrado de las aportaciones teóricas derivadas de los estudios del conocimiento del profesor y del Enfoque Onto-Semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) (EOS)[2], plantea la posibilidad (a través del estudio de un ejemplo de análisis epistémico/cognitivo de una situación problema sobre proporcionalidad) de ejemplificar procedimientos, que al ser realizados en el ámbito de los profesores en formación, pueden conducir a la producción de conocimientos relativos a las categorías del conocimiento del profesor propuestas por Hill, Ball, y Schilling (2008).

1. MARCO TEÓRICO

1. Elementos del razonamiento proporcional identificados en la literatura

Diversos estudios realizados sobre el razonamiento proporcional han conducido a la identificación de varios elementos caracterizadores de su puesta en juego. Con el objeto de establecer una referencia sobre qué aspectos del razonamiento proporcional serán considerados en el desarrollo de esta investigación, se presenta a continuación una síntesis de algunos de esos elementos.

Lesh, Post y Behr (1988, p. 93) consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de múltiples comparaciones, la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información, así como también la inferencia y predicción en situaciones de razonamientos tanto cualitativos como cuantitativos.

Vergnaud (1988) en una descripción del campo conceptual de estructuras multiplicativas, señala: "está formado por todas aquellas situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple y para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir." (p. 141), lo cual coloca el razonamiento proporcional dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. En este orden de ideas, Lo y Watanabe (1997, p. 217), reconocen la necesidad de considerar el desarrollo de estructuras multiplicativas para la adquisición de los conceptos de razón y proporción[3].

Confrey y Smith (1995) señalan la habilidad para reconocer la similitud estructural y el sentido de covariación y comparación multiplicativa como componentes del razonamiento proporcional.

Singer, Kohn y Resnick (1997, p. 128), presentan, a modo de síntesis de una revisión de estudios precedentes, dos aspectos fundamentales que caracterizan la manifestación de un verdadero razonamiento proporcional, a saber: a) un cambio de atención de las relaciones aditivas hacia las relaciones multiplicativas entre los números y b) la habilidad para pensar fluidamente en y entre espacios de medida, es decir, realizando razonamientos escalares y funcionales. Los escalares tienen lugar cuando las cantidades son extensivas y los funcionales cuando las cantidades son intensivas[4].

Lamon (2007) refiere la necesidad de comprender qué cosas varían y cuáles permanecen constantes al realizar razonamientos proporcionales: "…la habilidad para discernir una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como también la habilidad de extender la misma relación para otro par de cantidades." (p. 638).

Tournaire y Pulos (1985) en su revisión de la literatura de investigaciones dirigidas al estudio de la proporcionalidad, sugieren que un número considerable de factores relativos al contexto son los responsables de la variedad de respuestas dadas por los sujetos. Sanz, Pozo, Pérez y Gómez (1996) presentan un estudio en el que evalúan la influencia de variables: contenido y formato de la tarea, unidad de medida de las variables, nivel de dificultad computacional de los ítems, nivel de instrucción y desarrollo cognitivo de los sujetos. Los resultados señalan que el rendimiento de los sujetos varía de acuerdo al contenido y formato de la tarea, notándose la influencia cuando el contexto es cercano a la vida cotidiana, aunque no de manera significativa, obteniéndose mejores calificaciones relativas en el grupo de menor grado de instrucción. Lamon (1993) y Smith (2001, p. 16) consideran como factores contextuales influyentes: (1) la naturaleza de la situación y la experiencia de los alumnos, (2) el tipo de números involucrados, y (3) el carácter de las razones, en y entre las cantidades correspondientes.

Sobre la base de estos estudios se identifican algunos elementos caracterizadores de la noción de proporcionalidad, la cual comprende:

a) Aspectos estructurales, requeridos para avanzar de formas de razonamiento aditivo a formas de razonamiento multiplicativo.

b) Sentido de covariación entre magnitudes, cuya precisión depende de la comprensión de la condición "constante", apoyada por la noción de linealidad.

d) Equivalencia, no equivalencia, que permite distinguir en una misma noción la manifestación de relaciones que permanecen constantes (proporción, identidad) y otras que sí varían (componentes de la razón, relación que los pone en correspondencia).

e) Razonamientos cualitativos y cuantitativos, que indican el desarrollo natural de la noción de proporcionalidad (intuitivo-numérico, inductivo-deductivo, informal-formal).

f) Relaciones escalares y funcionales, relativas a las que se establecen entre cantidades extensivas e intensivas que diferencian una razón de una tasa de cambio.
Relaciones aritmético-algebraicas relativas al desarrollo intra-matemático de la noción de proporcionalidad que comprende avanzar desde lo numérico hacia formas más generales de índole algebraica.

g) Aspectos contextuales, referidos a diferentes factores en los que se precisa el uso de un razonamiento proporcional (variables de la tarea).

Esta identificación de elementos, implicados en el razonamiento proporcional, constituye un referente sobre los aspectos fundamentales a ser tomados en cuenta en el estudio de la resolución de problemas matemáticos relativos a la proporcionalidad.

2. Conocimiento del profesor y razonamiento proporcional

Una de las áreas de interés en el estudio de la formación de profesores es el "conocimiento del profesor". Se tratará de mostrar en este apartado algunas de las aportaciones provenientes de la investigación en esta área. Luego se delimitarán los aspectos de su desarrollo que serán considerados como parte del fundamento de esta investigación.

En sus inicios, la investigación referida al conocimiento del profesor reconocía la existencia de dos formas de conocimiento principales, a saber, el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido. Estas formas de conocimiento se consideraban como entidades separadas; siendo la primera la que se refiere a los contenidos enseñados en la clase de educación y, la segunda, al conocimiento obtenido en cursos de contenido específico (Ball y Bass, 2000).

EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 - 4910 • Año 14, Nº 48 • Enero - Junio 2010 • 189 - 205

El conocimiento del contenido

El conocimiento del contenido matemático se considera un aspecto de suma relevancia para el logro de una enseñanza efectiva. Fennema y Franke (1992, p. 147), citado por Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder, Thompson (1998), señalan: "Nadie cuestiona la idea de que lo que un profesor sabe es una de las influencias más importantes sobre lo que se hace en el aula de clase y finalmente sobre lo que un estudiante aprende… Nadie puede enseñar lo que no sabe". Así, el conocimiento del contenido es irrefutablemente necesario para lograr un ambiente favorable para el aprendizaje en el aula de clase.

Una visión general sobre algunas de las diferentes investigaciones publicadas, dirigidas al estudio del conocimiento del contenido por profesores en servicio, es presentada en Ponte y Chapman (2006). En el caso del conocimiento del contenido en la formación inicial de profesores, se han realizado diversas investigaciones (Ball, 1990; Even 1993; Tirosh, Even y Robinson, 1998).

Más específicamente, refiriendo a la formación inicial de profesores y al conocimiento de la proporcionalidad, Ilany, Keret, y Ben-Chaim (2004, p. 81) encuentran la existencia de lagunas en el conocimiento del contenido de futuros profesores sobre los tópicos enseñados, incluyendo la razón y la proporción. Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007, p. 334), Sowder et ál. (1998) señalan que tanto profesores en formación como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad.

Person, Berenson, y Greenspan (2004), en su estudio sobre el rol de los números en la comprensión del razonamiento proporcional, señalan las limitaciones que tienen futuros profesores de bachillerato para manejarse fluidamente entre las diferentes interpretaciones dadas a los números en problemas relativos a la proporcionalidad, quedando "atrapados" en el uso de procedimientos basados en fórmulas, casi impedidos para realizar y comprender el razonamiento proporcional involucrado.

Por otra parte, Kahan, Cooper y Bethea (2003) realizan una investigación sobre la relación entre el conocimiento matemático del contenido en profesores en formación y la elaboración de una lección de matemática. Concluyen que los profesores que exhibieron un sólido conocimiento del contenido matemático produjeron lecciones mejor elaboradas. No obstante, Thompson y Thompson (1996), quienes realizan una investigación sobre la enseñanza de la razón, encuentran que aun cuando el profesor mostró tener un sólido conocimiento de la noción de razón, del mismo modo, no fue capaz de producir procesos de comunicación efectivos para ayudar a los alumnos a desarrollar una comprensión conceptual de razón.

Conocimiento pedagógico del contenido

Las investigaciones realizadas sobre el conocimiento del profesor no se limitan sólo al estudio del conocimiento del contenido. Existe un número creciente de investigaciones que señalan la insuficiencia del conocimiento del contenido per se, para lograr acciones de enseñanza verdaderamente efectivas (Ball, 1990; Hill y Ball, 2004; Ma, 1999; Shulman, 1986). De acuerdo con Hill y Ball (2004) a mediados de los años ochenta se comienza a ver el problema de manera diferente, se reformula la pregunta de cómo el conocimiento del contenido puede contribuir al aprendizaje del alumno, enfocando sobre formas de conocimiento más próximas a la enseñanza.

En este contexto, Shulman (1987) propone siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza, a saber: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes, conocimiento del contexto educacional y el conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales.

La propuesta de Shulman (1986, 1987) ha jugado un papel primordial en el desarrollo de investigaciones, formulaciones e implantaciones curriculares. Las categorías identificadas por él siguen vigentes, aun cuando las concepciones iniciales dadas a las mismas han ido cambiando. Ponte y Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría "*Conocimiento Pedagógico del Contenido*" (PCK[5]), la cual en su momento representó un avance importante en las concepciones del conocimiento del profesor (Hill y Ball, 2004). El conocimiento pedagógico del contenido "es el conocimiento de la asignatura pertinente para el acto de enseñar" (Shulman, 1986, p. 9). Constituye una integración entre las dos formas iniciales del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico.

Un apreciable número de investigaciones sobre el conocimiento del profesor se desarrolla a partir de la propuesta de Shulman (Even y Tirosh, 2002; Fennema y Franke, 1992; Lin, 2002, Steele, 2005; entre otras). Se distinguen aquellas dirigidas a dar sustento teórico y una mayor precisión al conocimiento pedagógico del contenido (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill y Ball, 2004; Hill, Ball y Schilling, 2008). En esta línea de estudio, el trabajo de Hill, Ball y Schilling (2008) constituye una de las propuestas más recientes, sus aportes se exponen más adelante.

Conocimiento matemático para enseñar

La propuesta del "Conocimiento Matemático para Enseñar" ha sido impulsada desde inicios de los años noventa por Ball y colaboradores. En Ball, Lubienski y Mewborn (2001) logran consolidar, sobre la base de los aportes de Shulman (1986), Ma (1999) y Ball (1990), además de diversos trabajos desarrollados por Ball y colaboradores, una noción mejor delimitada para el constructo C*onocimiento Matemático para Enseñar*, el cual se refiere a:

> *Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático como virtud por haber estudiado matemáticas avanzadas. Tampoco sería parte de un conocimiento de un profesor de estudios sociales de secundaria como virtud por tener experiencia en la enseñanza. Más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas. (Ball et ál., 2001, p. 448)*

Luego, en investigaciones posteriores, Ball y colaboradores, presentan ejemplos sobre diferentes aspectos comprendidos por esta noción, los cuales han servido para ir obteniendo mayor precisión sobre la misma (Ball y Bass, 2003; Ball, Hill, y Bass, 2005; Hill, Rowan, y Ball, 2005; Hill, Sleep, Lewis, y Ball, 2007).

En Hill et ál. (2007) se reconoce la necesidad de concebir y generar un marco teórico para el estudio del Conocimiento Matemático para Enseñar. En Hill, Ball, y Schilling (2008) se hace una propuesta encaminada a construir ese marco. El desarrollo de la presente investigación se sustenta en la propuesta de Hill, Ball, y Schilling (2008), en el uso de dos de las categorías identificadas y caracterizadas en tal propuesta, las cuales se refieren a continuación.

En Hill, Ball, y Schilling (2008) se define el Conocimiento Matemático para Enseñar como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula de clase para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374). La propuesta plantea una división del conocimiento del profesor en seis categorías, a saber: (a) Conocimiento Común del Contenido (CCK[6]), (b) Conocimiento en el Horizonte Matemático, (c) Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), (d) Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS), (e) Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (KCT), y (f) Conocimiento del Currículo.

De acuerdo con Hill, Ball, y Schilling, las tres primeras categorías corresponden al conocimiento de contenido, y las otras tres, corresponden al conocimiento pedagógico del contenido. En conjunto, todas las categorías se encuentran en el dominio del Conocimiento Matemático para Enseñar. Se trata de un refinamiento e integración de las propuestas de Shulman (1986, 1987) y Hill et ál. (2007). En este modelo se hace más evidente la diferencia que podría estar sugerida por las dos formas de conocimiento del profesor esenciales: la del contenido y la pedagógica, aunque esta última no se asume con el sentido amplio de una forma de conocimiento general de la pedagogía, sino como una pedagogía de la matemática, formando parte de la didáctica de la matemática.

Algunas precisiones deben ser consideradas respecto a los aportes de esta nueva propuesta. La distinción fundamental entre el conocimiento común del contenido (CCK) y el especializado (SCK) consiste en que, mientras el primero se refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo se refiere, por ejemplo, a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico. Para esta última acción, es posible que un sujeto adulto, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la posibilidad de llevarla a cabo (Hill, Schilling y Ball, 2004).

Hill, Ball y Schilling (2008) definen el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS) como el “conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375). Comprende el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático.

Respecto al Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza. Comprende saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para encaminar y corregir sus errores y concepciones erróneas (Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Las descripciones precedentes muestran un desarrollo del constructo conocimiento del profesor, para efectos de la presente investigación tendrán una importancia particular el uso de las categorías conocimiento especializado del contenido (SCK), Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CKS) y el Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (CKT).

Un aspecto de relevancia que vincula el desarrollo del conocimiento del profesor con el desenvolvimiento de las actividades de esta investigación, consiste en la necesidad de adquirir-generar un profundo conocimiento de los objetos (conceptos, procedimientos, argumentos…) requeridos y puestos en juego en una actividad matemática, inscrita en el contexto educacional, concebida tal actividad con el fin de comprender de manera adecuada los procesos matemáticos y didácticos necesarios para facilitar la enseñanza y aprendizaje de un determinado contenido matemático. Así, considerando una situación problema y su resolución como elemento desencadenante de una actividad matemática tal, se trata de convertir ese suceso en una actividad que conduzca a adquirir-generar ese profundo conocimiento. Se trata de traducir esa situación en potenciadora de acciones asociadas a la actividad de la enseñanza, en el que se le solicite al profesor en formación identificar los elementos-objetos, sus significados, puestos en juego en la resolución de la situación problema, tratar de ir hacia los detalles de lo que el problema y su solución comprende, ser minuciosos en la determinación de los objetos y significados matemáticos que la misma involucra.

Es claro que esta actividad no es una tarea matemática, no interesa a los matemáticos, interesa al formador, al maestro. Si la misma es concebida en el ámbito de la formación de profesores, buscaría hacernos conscientes a los formadores y a los profesores en formación, sobre la presencia de esos elementos-objetos en la situación problema y su resolución, dar el significado que los mismos tienen de acuerdo a la función que cumplen en la misma. De aquí la identificación que se gesta entre la propuesta de Hill, Ball y Schilling (2008) sobre el conocimiento del contenido especializado, con las acciones centrales realizadas en el marco del desarrollo de esta investigación.

En este caso, teniendo como marco general el contenido matemático de la proporcionalidad en primaria, se pretende por medio del uso de herramientas específicas propuestas por el enfoque ontosemiótico, realizar acciones encaminadas a producir un tipo de comprensión profunda de ese contenido matemático (Ma, 1999), del conocimiento especializado del contenido (SCK), y el conocimiento de los estudiantes (CKS) por parte del profesor formador, en el ámbito de la formación de profesores de primaria.

3. La aproximación del enfoque ontosemiótico

La perspectiva teórica del "Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) proporcionan un espacio para el estudio, interpretación y análisis de los conocimientos y comprensiones que tienen lugar en los procesos de cognición e instrucción, puestos en juego en una actividad matemática, en el contexto de la educación matemática.

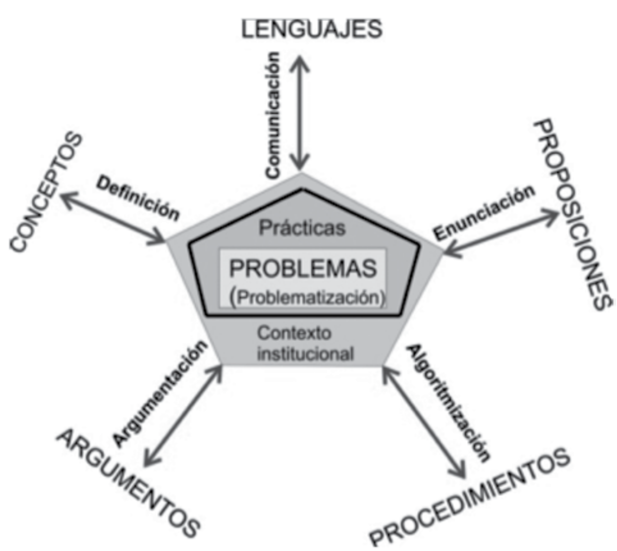
Para describir y comprender las prácticas puestas en juego en una actividad tal, el EOS propone las nociones de configuración epistémica y cognitiva, lo epistémico como parte de los sistemas de práctica institucionales y lo cognitivo asociado a los sistemas de práctica personales. Ambas configuraciones (epistémicas y cognitivas) hacen operativos los sistemas de prácticas, permitiendo fijar la atención sobre la red de objetos emergentes e intervinientes en dichas prácticas. Desde esta perspectiva ha sido posible identificar algunos de los tipos de objetos matemáticos que componen ambas configuraciones, habiendo sido reconocidos los siguientes: situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007). La comprensión de los objetos identificados y su papel dentro de la actividad matemática, realizada en los diferentes sistemas de práctica, pasa por considerar los significados dados a tales objetos en dichos sistemas.

Con el fin de proporcionar operatividad al proceso de estudio planteado, tomando como base las aportaciones provenientes de las investigaciones en el ámbito de la educación matemática y las recomendaciones emanadas de los organismos de administración y producción curricular (NCTM, 1989; 2000), el EOS considera como actividad matemática fundamental, en el ámbito instruccional, la resolución de situaciones problema (ver Figura 1). En este orden de ideas, Godino y colaboradores, proponen herramientas con las que se busca llevar a cabo análisis didácticos para identificar objetos matemáticos puestos en juego y significados dados a los mismos en los procesos de formulación y resolución de problemas matemáticos específicos.

En este contexto tiene lugar la producción de la "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados" (GROS)[7], la cual consiste en una configuración tabular de dos columnas en la que se ponen en correspondencia los objetos identificados en una resolución de un problema con los significados a los que refieren. A partir de tal correspondencia se posibilita la determinación de conflictos potenciales de significados, que podrían llevar a identificar posibles errores, dificultades y concepciones erróneas (obstáculos epistemológicos), en la resolución del problema.

Como planteamiento hipotético inicial se considera

Figura 1: Configuración de objetos



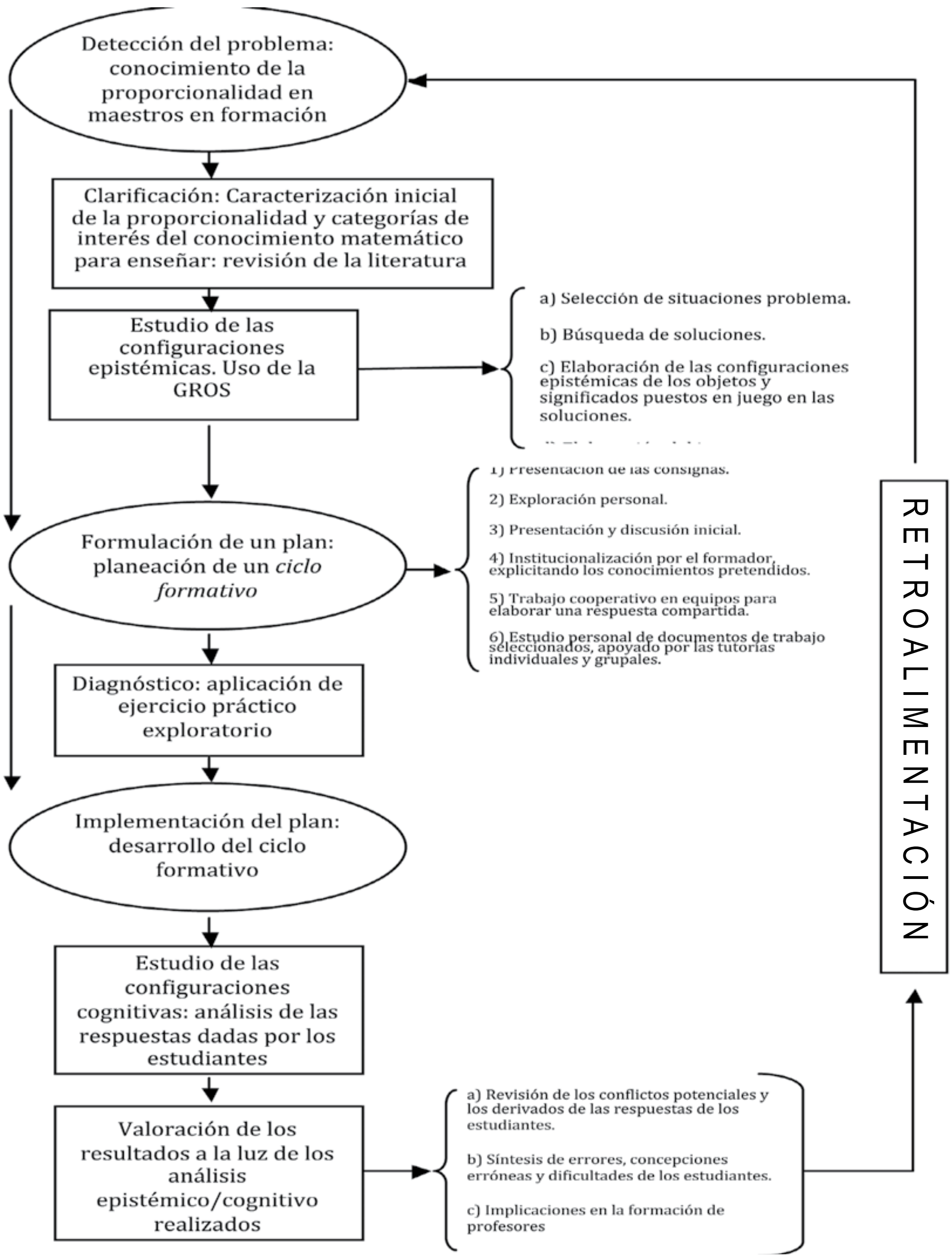
que el uso de la GROS dará lugar a análisis epistémicos/cognitivos de situaciones problema y su resolución, que permitirán identificar elementos matemáticos subyacentes en los mismos, promoviendo una comprensión profunda de la matemática, fomentado la reflexión didáctica, suscitando un efecto formativo-pedagógico (tanto matemático como didáctico) en quienes la utilizan. Esta investigación comprende un ejemplo de la puesta en práctica de tal herramienta con una muestra de futuros profesores.

2. METODOLOGÍA

1. Diseño de investigación

Esta investigación es de tipo *cualitativo*; el diseño desarrollado corresponde al tipo *investigación-acción* definida en los términos propuestos por Hernández, Fernández, y Baptista (2006) en la que se informa sobre los resultados obtenidos a partir de la ejecución de un primer ciclo. El proceso seguido se esquematiza en la Figura 2.

Figura 2: Desarrollo del diseño de investigación-acción: un plan de mejora



EDUCERE • Investigación arbitrada • ISSN: 1316 - 4910 • Año 14, Nº 48 • Enero - Junio 2010 • 189 - 205

El estudio empírico desarrollado se inscribe en un período de un *ciclo formativo*. Un ciclo formativo constituye un proceso de estudio, concebido con el objeto de dar lugar a una serie de situaciones en un contexto instruccional, sobre un contenido disciplinar específico. En este caso dicho contenido es relativo a la proporcionalidad en la formación de futuros profesores de primaria. Un ciclo formativo comprende los siguientes tipos de situaciones o fases:

- Resolución de problemas de acuerdo a un modelo didáctico socio-constructivo- instruccional.
- Reflexión epistémico-cognitiva sobre los objetos y significados puestos en juego en la resolución de problemas.
- Análisis de las interacciones en la clase de matemáticas.
- Reconocimiento del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.
- Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio matemático experimentado.

La investigación ejecutada se encuentra comprendida en las dos primeras fases de este ciclo formativo. En el desarrollo de estas dos fases se implementó una trayectoria didáctica que contempló los siguientes momentos:

- Presentación de las consignas.
- Exploración personal de posibles respuestas-soluciones.
- Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida.
- Presentación y discusión.
- Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos.

El presente informe corresponde con una experiencia, en la cual se indaga sobre la potencialidad de la reflexión epistémico/cognitiva para mejorar la tarea del formador.

2. Objetivos

- Valorar el uso de la herramienta “configuración de objetos y significados” aplicada al análisis a priori de una tarea sobre proporcionalidad.
- Estudiar la potencialidad del análisis a priori para desarrollar el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) del formador alrededor de una tarea de proporcionalidad.
- Estudiar la potencialidad del análisis a priori para desarrollar el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CKS) del formador alrededor de una tarea de proporcionalidad.
- Determinar a través del análisis cognitivo, y a la luz de la identificación de los conflictos potenciales del análisis a priori, una categorización de las respuestas dadas por una muestra de futuros maestros.
- Se busca producir una valoración del uso de herramientas de análisis epistémico/cognitivo, que permiten identificar objetos y significados involucrados en la resolución de un problema de comparación relativo a la proporcionalidad, como instrumentos potencialmente útiles para desarrollar el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CKS).

3. Participantes

El estudio se realizó considerando como sujetos participantes, los estudiantes inscritos-asistentes en una sección de la asignatura “Currículo de Matemáticas en Educación Primaria”, del segundo año, del periodo académico 2008-2009, que se dicta a los estudiantes de magisterio en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. El grupo de participantes estuvo conformado por un total de 50 estudiantes.

La muestra se conformó con la totalidad de los participantes, por tanto no se realizó un muestreo de tipo probabilístico (León y Montero, 2003). Tal escogencia fue de tipo *incidental*, por lo tanto no aleatoria, ya que los estudiantes fueron seleccionados de acuerdo al criterio ser estudiantes inscritos-asistentes en el curso respectivo.

4. Instrumento de recogida de datos

La recogida de los datos se llevó a efecto por medio de una adaptación realizada a un trabajo práctico denominado: “PRÁCTICA 1: LAS MATEMÁTICAS COMO ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS”, el cual forma parte de las actividades regulares y de evaluación de la asignatura mencionada. Se incluyó en tal trabajo la resolución de un problema de comparación de razones y la realización de un análisis epistémico de una resolución de ese problema. El trabajo práctico en cuestión se realizó primero de manera individual en el aula de clase, y luego en grupos de tres o cuatro estudiantes. Para la elaboración del trabajo de los grupos se les concedió una semana de plazo. En este informe solo se ha considerado el trabajo realizado por los grupos, los datos de interés provienen de la resolución del problema por parte de los grupos de futuros profesores. El problema en cuestión se presenta a continuación.

Situación problema:

Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de jugo de limón. Mientras María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de jugo de limón. ¿Cuál de las

Tabla 1:
Puesta en práctica de la GROS: Análisis epistémico.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (RELACIÓN DE REFERENCIA O DE USO)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)	
3 cucharadas azúcar	Cantidades de las magnitudes volumen de limón y de azúcar, medidas de las cantidades tomando una cucharada como unidad
12 cucharadas limón	
5 cucharadas azúcar	
20 cucharadas limón	Razón de cantidades de volumen de limón y de azúcar
¿Qué limonada es más dulce?	Comparación de razones, magnitudes intensivas (dulzura o acidez)
"grado de dulzura/acidez"	Medida del grado de dulzura
1 c. azúcar/ 4 c. limón	Medida del grado de acidez
4 c. limón/ 1 c. azúcar	
¼, 25%	Valor numérico (racional) de las medidas del grado de dulzura
Conflictos potenciales:	
a) Interpretar la cucharada como unidad imprecisa de medición de volumen. b) Interpretar las mezclas (de Juan y María) como resultados de procesos diferentes y por tanto no comparables.	
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Magnitudes (extensivas)	Magnitudes continuas (volumen) discretizadas (número de cucharadas)
Magnitudes (intensivas)	Grado de dulzura o acidez de la limonada
Cantidades	Valores particulares de las magnitudes
Medidas	Cantidades expresadas mediante la elección de una unidad de medida y el número de unidades correspondientes
Valores numéricos de las medidas de magnitudes: número natural, racional.	Indican el número de cucharadas, o la razón entre cantidades.
Razón; razón unitaria	Relación multiplicativa entre cantidades de magnitud (número de cucharadas de limón por cada cucharada de azúcar, …)
Fracción/ cociente	Cociente indicado entre dos números naturales
Conflictos potenciales:	
a) La magnitud intensiva (grado de dulzura o acidez) es medida por un cociente indicado, cuyas magnitudes extensivas (azúcar, concentrado de limón) forman parte de una razón. b) La razón unitaria como objeto que hace factible la comparación requerida. c) Cociente indicado como valor numérico que mide la cantidad de mezcla.	
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Comparación de fracciones	Dar respuesta al problema
División de dos números naturales	Hallar la razón unitaria
Conflictos potenciales: a) Contracción de las cantidades de magnitudes dadas, que lleva a considerar únicamente su valor numérico, dejando de lado la referencia a las condiciones contextuales que la mezcla involucra. b) Determinación de la equivalencia entre fracciones. c) Adjetivación de los números obtenidos, a partir de la simplificación (división), proporcionándoles características indicadas por la mezcla. d) Para saber el grado de dulzura o acidez será necesario hacer las mezclas y degustarlas.	
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)	
a) La covariación entre las mezclas es constante.	Permite comparar mezclas "diferentes"
b) P1: Las mezclas tienen el mismo sabor.	Es la respuesta al problema

dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María, o tienen el mismo gusto?

a) Resuelve el problema, explicitando todos los pasos.

b) Completar la tabla que se adjunta como anexo indicando los diversos objetos matemáticos que has puesto en juego en la resolución, así como el significado que se asigna a cada objeto. Se considera como objeto matemático los procedimientos específicos aplicados, las representaciones lingüísticas (símbolos, gráficos, etc.), los conceptos, propiedades y argumentaciones que intervienen en la resolución.

En el presente documento sólo se informa acerca de los resultados obtenidos a partir del estudio del apartado a) de la situación problema.

5. Análisis epistémico a priori

Con el fin de describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en el problema y su resolución, se llevó a efecto, por parte del formador, un análisis epistémico a priori de una resolución de la situación problema (entre otras posibles), en el que se identifican objetos y significados puestos en juego en las resoluciones de las tareas, lo cual condujo a la determinación anticipada de conflictos potenciales. El análisis epistémico respectivo se presenta en la Tabla 1. A continuación la resolución referida.

Resolución de la situación problema:

a) Resolución del problema:

En el caso de Juan, la razón entre el número de cucharadas de limón al de azúcar es, 12 c. de limón por cada 3 c. de azúcar, o sea, 4 c. de limón por cada c. de azúcar. Esta razón, 4c. limón/1 c. azúcar, es una medida del "grado de acidez" de la limonada preparada por Juan.

En el caso de María, por cada 20 c. de limón usa 5 c. de azúcar; luego la razón entre ambas cantidades es también de 4 c. de limón por cada cucharada de azúcar.

Ambas razones son iguales, luego tienen el mismo "grado de acidez" (tendrán el mismo gusto, suponiendo que los productos sean del mismo tipo).

Si la comparación multiplicativa se hace entre las cucharadas de azúcar respecto de las de concentrado de limón la razón entre las cantidades correspondientes será de 1 c. de azúcar por cada 4 c. de limón, razón que se puede considerar como la medida del "grado de dulzura" de la limonada. El valor numérico de la medida del "grado de dulzura" (1/4, o sea, 25%) es el mismo en ambas limonadas.

3. RESULTADOS

1. Algunos resultados del análisis a priori

Es menester enfatizar que los conflictos potenciales mencionados, han sido deducidos a partir de los objetos y significados identificados en la resolución presentada del problema. Tales conflictos se refieren a posibles errores, dificultades y obstáculos que hipotéticamente podrían manifestar los estudiantes al momento de resolver el problema.

Así mismo, es necesario destacar la relación entre dichos conflictos y los elementos caracterizadores del razonamiento proporcional inicialmente enunciados. Tal relación se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2:
Relación entre los conflictos potenciales identificados y los elementos caracterizadores del razonamiento proporcional

OBJETO	CONFLICTOS POTENCIALES	ELEMENTO CARACTERIZADOR
Elementos lingüísticos	Los dos identificados: a, b.	Influencia del contexto
Conceptos	a) La magnitud intensiva … b) La razón unitaria … c) Cociente indicado …	Razones intensivas-extensivas Razones unitarias Magnitudes intensivas y sus medidas
Procedimientos	Tres de los identificados: a, b, c.	Modelización: número-cualidad
Propiedades	a) Mezclas diferentes …	Equivalencia – no-equivalencia
	b) No encontrar P1	Razón-proporción-comparación
Argumentos	a) Razones unitarias iguales …	Razón-proporción-comparación

A partir de las relaciones identificadas en la Tabla 2, se deduce que buena parte de los conflictos potenciales se encuentran relacionados con algunos de los elementos caracterizadores señalados inicialmente. No obstante, lo específico del análisis permite identificar otros elementos caracterizadores. La mayoría de ellos (uso de razones unitarias, la medida de magnitudes intensivas, modelización número-cualidad[8]) han sido referidos en la literatura (Kilpatrick, Swafford y Findell 2001; Lamon, 2007).

El elemento caracterizador identificado como razón-proporción-comparación refiere a procesos generales que sustentan la obtención de la solución del problema. Estos procesos constituyen elementos de síntesis, de los otros objetos identificados (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos y proposiciones). El aporte que se obtiene a partir del análisis epistémico, la identificación de objetos, significados y conflictos potenciales alrededor de una situación problema específica, coloca ante una configuración sistémica de la práctica matemática que tiene lugar, provee de una perspectiva que permite una visión más profunda del conocimiento matemático que se moviliza, que potencia la identificación de posibles conflictos de aprendizaje. De manera que, por medio de esta actividad, se fomenta la puesta en juego del desarrollo del Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y el Conocimiento del Contenido y de los Estudiante (CKS), por parte del formador.

2. Análisis cognitivo

El proceso de estudio implementado comprende la realización de un análisis cognitivo, el cual se realiza con el objeto de observar los conocimientos matemáticos (objetos y significados) puestos en juego en la resolución del problema por parte de los estudiantes, tomando en cuenta los resultados obtenidos del análisis epistémico a priori realizado por el formador.

Una conclusión general respecto a las respuestas dadas por los 13 grupos de estudiantes es que todos obtienen una respuesta correcta para el problema. El análisis cognitivo se concibe como una herramienta cuyo uso permite ir más allá del simple estudio de la dualidad de respuestas correctas vs. respuestas incorrectas.

A partir del análisis cognitivo, fue identificada como categoría dominante de respuesta "la reducción a la unidad", la cual ha sido identificada como el objeto conceptual "razón unitaria". En buena parte de los casos (79,6%) se observa el uso consciente, por parte de los estudiantes, de esa "razón unitaria"; la obtención de la razón unitaria para ambas mezclas constituye un proceso requerido para realizar la comparación pertinente.

Dentro de la categoría reducción a la unidad se ha identificado la manifestación de dos categorías: "uso de la regla de tres" y "uso sólo de la división". A la vez, dentro de estas categorías, se ha reconocido la puesta en juego de cuatro subcategorías que caracterizan las respuestas respectivas. El resumen de las categorías y subcategorías se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3:
Categorías y subcategorías de las respuestas identificadas en el análisis cognitivo

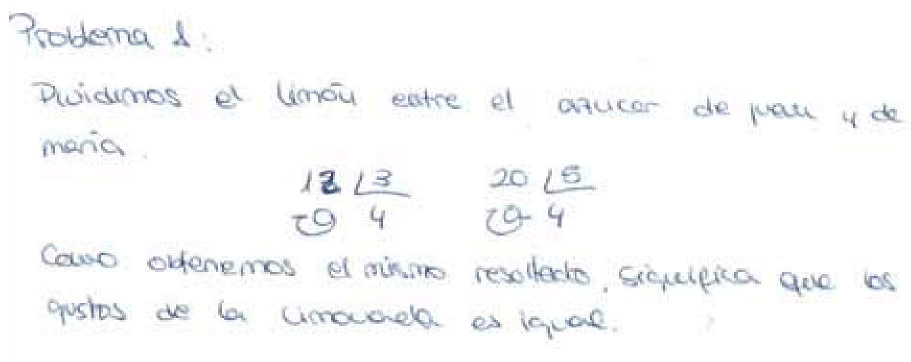
CATEGORÍA		SUBCATEGORÍA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Uso de la reducción a la unidad	Uso de la regla de tres	Uso de cantidades intensivas	2	15,4
		No uso de cantidades intensivas	-	-
		Uso de recursos gráficos	-	-
		No uso de recursos gráficos	2	15,4
	Uso sólo de la división	Uso de cantidades intensivas	6	46,2
		No uso de cantidades intensivas	4	30,8
		Uso de recursos gráficos	3	23,1
		No uso de recursos gráficos	7	53,9
Total			12	92,3
No-uso de la reducción a la unidad	Igualación de denominadores	Uso de cantidades intensivas	1	7,7
		No uso de cantidades intensivas	-	-
		Uso de recursos gráficos	-	-
		No uso de recursos gráficos	1	7,7
Total			1	7,7
Total			13	100

Tipos de resoluciones y su relación con los conflictos potenciales identificados a priori

El análisis epistémico previo ha permitido identificar el uso de cantidades intensivas como un indicador substancial de la puesta en juego de un razonamiento proporcional; se refiere más específicamente al uso de la razón (cucharadas de azúcar por cucharadas de limón), que conduce a considerar las razones unitarias de ambas mezclas y su comparación. De acuerdo con este criterio, 10 de los 13 grupos (76,9%) hacen uso de cantidades intensivas y por tanto razonan proporcionalmente. Mientras, para los otros 3 grupos restantes (23,1%), se manifiestan los conflictos potenciales a) y b), previamente identificados para el objeto conceptos, al hacer un uso inadecuado de las magnitudes intensivas y las razones unitarias.

En la Figura 3 se presenta la manifestación de los conflictos potenciales identificados para el objeto procedimientos, que involucra un proceso de modelización que se ha denominado "modelización número-cualidad". En el ejemplo exhibido, la resolución dada por el grupo de estudiantes, muestra una gran pobreza en la que tal proceso de modelización no se realiza de manera pertinente.

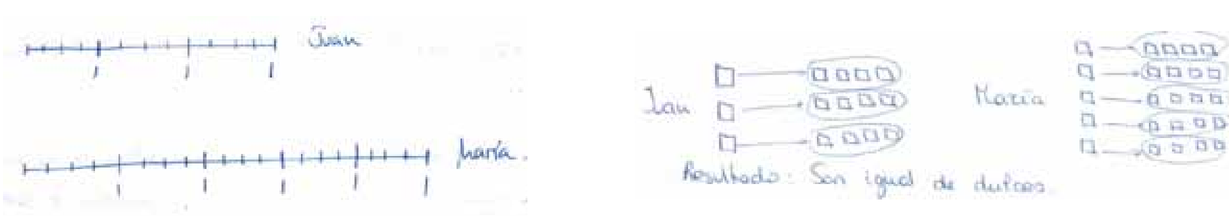
Figura 3: Ejemplo de la respuesta dada por un grupo



Se observa también en la Figura 3 un ejemplo en el que se manifiesta el conflicto potencial identificado para el objeto argumentos. La conclusión "…los gustos de la limonada es igual.", expresada por los estudiantes, proviene de haber obtenido un mismo número en las divisiones de los números involucrados en las cantidades de azúcar y limón de las dos mezclas, pero que no explican la dulzura o acidez de las mismas como el resultado de un razonamiento proporcional. Esta forma de respuesta se presenta en los 3 grupos en los que se observó un uso inadecuado de las cantidades intensivas (razón unitaria limón/azúcar).

Un último aspecto de interés, cuya identificación previa, a través del análisis epistémico correspondiente no fue realizada, es el uso de representaciones gráficas. Tres grupos muestran una representación gráfica con el objeto de dar una explicación más completa de la resolución del problema. Dos de las representaciones gráficas exhibidas, indican comprensión del razonamiento proporcional involucrado en tal resolución. En la Figura 4 se muestran las representaciones en cuestión.

Figura 4: Representaciones gráficas mostradas por dos de los grupos



3. Discusión de los resultados

El análisis a priori, realizado por el formador, ha permitido tener una información bastante próxima a una caracterización global de todos los posibles conflictos de desempeño matemático que han tenido lugar en las resoluciones exhibidas por los estudiantes. La percepción del manejo inadecuado de las cantidades intensivas, aun cuando las respuestas dadas coinciden con la respuesta correcta, muestra un conocimiento insuficiente de los estudiantes para un desarrollo pertinente de las explicaciones relativas a la resolución del problema. Dado que esta percepción es fomentada por el análisis epistémico a priori, se considera la realización de ese análisis como una acción apropiada para facultar al formador y hacerlo sensible a esa percepción. En términos de lo señalado por Mason y Spence (1999), el formador se hace consciente, previamente, de los posibles conflictos involucrados en el desarrollo de las acciones, lo cual potencia su competencia para saber cómo actuar en el momento en que los mismos se manifiestan.

Un alto porcentaje de los grupos (76,9%) se refiere expresamente al uso de cantidades intensivas (1c. de azúcar/ 4c. de limón; 1c. de azúcar/ 4c. de limón). Este uso se interpreta como un reconocimiento consciente o inconsciente de la noción de razón, requerida para realizar la comparación. Mientras, sólo 3 de los 13 grupos (23,1%) reconocen la división como la operación requerida para obtener un resultado que les permite hacer una comparación numérica, que luego puede ser adjetivada con algunas de las frases: "tienen igual gusto", "el mismo sabor", "igual acidez o dulzura", pero sin mostrar un uso adecuado de las cantidades intensivas referidas y, por tanto, la ausencia de la puesta en juego de un razonamiento proporcional. La manifestación de este hecho, prevista en los conflictos potenciales del objeto procedimientos, es considerada como uno de los aspectos identificados de mayor relevancia, pues permite distinguir entre cuáles acciones determinaron la puesta en juego de un razonamiento proporcional, de aquellas que lo omitieron, aun cuando las respuestas dadas parecieran ser correctas.

La identificación de conflictos potenciales puede hacerse más rica a partir del análisis epistémico de diferentes resoluciones del problema. Además podría mejorar lo exhaustivo del estudio, al proporcionar una visión más completa de las posibles situaciones que tendrían lugar, mejorando la potencialidad predictiva de la herramienta.

El no haber empleado recursos gráficos en la solución experta, ha traído como consecuencia el no reconocimiento de la necesidad de utilizarlos para explicar, de manera más completa, la relación de la proporcionalidad existente entre las razones comparadas. Este aspecto, valoriza la realización del análisis cognitivo como herramienta que complementa la identificación de los aspectos relacionados con el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CKS), al informar sobre estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver situaciones matemáticas en un contexto instruccional, no previstas por el análisis epistémico previamente efectuado.

Los resultados obtenidos conducen a reconocer cualidades relevantes del análisis epistémico/cognitivo, a saber: a) posibilidades predictivas, b) exploración detallada y profunda de los prerrequisitos matemáticos exigidos por la resolución de la situación problema considerada, c) previsión de posibles conflictos de aprendizaje, d) explicación de las representaciones y los niveles de comprensión exhibidos por los estudiantes acerca de un contenido disciplinar específico, y e) potencialidad para el desarrollo del conocimiento didáctico y matemático que se integran para dar lugar a facetas del Conocimiento Matemático para Enseñar.

4. IMPLICACIONES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Los avances teóricos de los estudios dirigidos a la caracterización del conocimiento del profesor, más específicamente, la delimitación alrededor del constructo Conocimiento Matemático para Enseñar, convoca a la producción de herramientas dirigidas al desarrollo de las facetas de esta forma de conocimiento. Las herramientas de estudio de las configuraciones de objetos y significados, puestos en juego en una práctica matemática, en el contexto de la instrucción, propuestas por el EOS, representan una posibilidad para desarrollar procesos formativos encaminados a la adquisición del Conocimiento Especializado del Contenido y del Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes.

En este estudio se ha informado sobre la potencialidad de las herramientas de análisis epistémico/cognitivo, inscritas en el estudio de las configuraciones de objetos y significados para el desarrollo de las facetas Conocimiento Matemático para Enseñar, antes referidas. Los resultados de este estudio evidencian, mediante el uso de estas herramientas de análisis, la puesta en escena de una actividad en la que se interroga sobre la relación profesor/conocimiento disciplinar, donde se persigue el desarrollo de ese conocimiento con fines didácticos.

En esta primera experiencia se ha valorado la potencialidad de estas herramientas a nivel del formador. La puesta en práctica de manera integrada de ambos análisis: epistémico y cognitivo, ha permitido al formador colocarse en una perspectiva global sobre los potenciales sucesos de la práctica instruccional, desarrollada alrededor de la resolución de un problema de proporcionalidad, observándose evidencia de la pertinencia del uso de las herramientas en cuestión.

Siendo conscientes de la complejidad que involucra la realización del análisis epistémico a priori, pues concierne a una tarea de reflexión de índole meta-cognitiva, consideramos valiosa la posibilidad de su uso por parte de los futuros profesores. Tal y como puede verse en el apartado b) del enunciado de la situación problema, que ha sido objeto de análisis, se ha dado inicio a la exploración del uso de la herramienta de análisis epistémico por parte de los estudiantes de magisterio. Es parte del desarrollo del proceso de estudio, del cual este documento representa un informe parcial, la valoración de ese uso. Consideramos la posibilidad de llevar a efecto procesos de formación, dirigidos a fomentar el uso de las herramientas de análisis epistémico/cognitivo por parte de futuros profesores, como la oportunidad de colocar en manos del futuro profesor una potente herramienta que le permitirá acceder al desarrollo de las facetas del Conocimiento Matemático para Enseñar antes referidas. ®

*** Mauro Rivas Olivo**
Magister en Matemáticas, profesor asistente de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. Estudiante de doctorado de la Universidad de Granada, Granada, España.

**** Juan D. Godino**
Doctor en Didáctica de la Matemática, profesor catedrático de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, Granada, España.

NOTAS

1 El término *configuración epistémica* se utilizará aquí para referirse a los conocimientos matemáticos puestos en juego en la solución esperada de una situación problema, realizada por el formador, mientras que *cognitiva,* a los conocimientos efectivamente desplegados por los estudiantes.

2 Documentación al respecto puede verse en http://www.ugr.es/local/jgodino

3 Una *razón* es una relación multiplicativa entre dos cantidades de magnitud, generalmente expresada por la forma *a/b*, siendo *a* y *b* números enteros cualesquiera, que representan los valores numéricos de las cantidades de magnitud correspondientes. Por ejemplo, en una limonada su preparación puede venir dada por la razón 4 cucharadas de azúcar por 1 cucharada de concentrado de limón, lo cual puede expresarse como 4c. de azúcar/1c. de concentrado de limón.
Una *proporción* es una relación de igualdad entre dos razones, esto es *a/b = c/d*, con *a*, *b*, *c* y *d* números enteros cualesquiera.

4 Una cantidad se dice *extensiva* si se refiere a una cantidad de magnitud en un único espacio de medida, cuyas combinaciones se comportan aditivamente. Por ejemplo: 20 kilómetros, 4 cucharadas de azúcar, 1 cucharada de concentrado de limón… Mientras, una cantidad se dice *intensiva* si se refiere a una relación multiplicativa entre cantidades de magnitud, por ejemplo: 20 kilómetros por hora (velocidad), 1c. de concentrado de limón por 4c. de azúcar (dulzura)…

5 Concepto más ampliamente conocido en la comunidad de investigadores por sus siglas en inglés: Pedagogical Content Knowledge (PCK).

6 Se estila en este ámbito conservar las siglas del nombre originario del concepto para representarlo. Así, Conocimiento Común del Contenido queda representado por sus siglas en inglés CCK (Common Content Knowledge), de igual manera para las demás categorías del conocimiento matemático para enseñar.

7 Un ejemplo del uso de esta herramienta puede verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008).

8 Se refiere a considerar sólo el valor numérico de la cantidad intensiva, dejando de lado las magnitudes, para realizar cálculos requeridos, y luego devolver al número obtenido la cualidad correspondiente.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, Deborah Loewenberg (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*, 449-466.

Ball, Deborah Loewenberg y Bass, Hyman (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives of mathematics teaching y learning* (pp. 83-104). Westport, CT: Greenwood Publishing Group Incorporated.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, Deborah Loewenberg; Hill, Heather y Bass, Hyman (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*, 14-22.

Ball, Deborah Loewenberg; Lubienski, Sarah Theule y Mewborn, Denise Spangler (2001). Research on teaching mathematics: The insolved problem of teachers, mathematical knowledge. En V. Richarson (Ed.). *Handbook of research on teaching.* (pp. 433 – 456). New York: Macmillan.

Behr, Merlyn; Harel, Guershon; Post, Thomas y Lesh, Richard (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Ben-Chaim, David; Fay, James; Fitzgerald, William; Benedetto, Catherine y Miller, Jane (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 247–273.

Ben-Chaim, David; Keret, Yaffa e Ilany Bat-Sheva (2007) Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 333–340.

Confrey, Jere y Smith, Erick (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86.

Dole, Shelly y Shield, Mal (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 19-35.

Even, Ruhama (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 94-116.

Even, Ruhama y Tirosh, Dina (2002). Teachers' knowledge and understanding of students' mathematical learning. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education,* (pp. 219-240). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fennema, Elizabeth y Franke, Megan Loef (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: Macmillam.

Godino, Juan Díaz; Batanero, Carmen y Font, Vincenç (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. Díaz; Rivas, Mauro, Castro, Walter Fernando y Konic, Patricia. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic – algebraic problem solution. ICME 11, TSG 27: *Mathematical knowledge for teaching*. Recuperado el 12 de enero de 2009 en: http://tsg.icme11.org/document/get/391

Hernández Sampieri, Roberto; Fernández Collado, Carlos y Baptista Lucio, Pilar (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). México: McGraw-Hill.

Hill, Heather y Ball, Deborah Loewenberg (2004). Learning mathematics for teaching: Results fom California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Hill, Heather; Ball, Deborah Loewenberg y Schilling, Stephen (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Hill, Heather; Rowan, Brian y Ball, Deborah Loewenberg (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 317-406.

Hill, Heather; Sleep, Laurie; Lewis, Jennifer y Ball, Deborah Loewenberg (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

BIBLIOGRAFÍA

Ilany, Bat-Sheva; Keret, Yaffa y Ben-Chaim, David (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary teacher education. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). Bergen, Norway: PME.

Kahan, Jeremy; Cooper, Duane y Bethea, Kimberly (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 223-252.

Kilpatrick, Jeremy; Swafford, Jane y Findell, Bradford (2001). Developing proficiency in teaching mathematics. En J. Kilpatrick, J. Swafford, y B. Findell (Eds.), *Adding it up: Helping children learn mathematics* (pp. 369-406). Washington, DC: National Academy Press.

Lamon, Susan (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61.

Lamon, Susan (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

León, Orfelio y Montero, Ignacio (2003). *Diseño de Investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Lesh, Richard, Post, Thomas y Behr, Merlyn (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lin, Pi-Jen. (2002). On enhancing teachers' knowledge by constructing cases in classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 317–349.

Lo, Jane-Jane y Watanabe, Tad (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 216-236.

Ma, Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, John y Spence, Mary (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 135–161.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Person, Axelle; Berenson, Sarah y Greenspon, Paula (2004). The role of number in proportional reasoning: a prospective teacher's understanding. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Bergen, Norway: PME

Ponte, Joao Pedro y Chapman, Olive (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of research of the psychology of mathematics education: Past, present and future*. (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishing.

Sanz, Angeles; Pozo, Juan Ignacio; Pérez Echeverría, María del Puy y Gómez Crespo, Miguel Ángel (1996). El razonamiento proporcional en expertos y novatos: El efecto del contenido. *Revista de Psicología General y Aplicada, 49*(2), 337-352.

Shulman, Lee (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 2-14.

Shulman, Lee (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Singer, J., Kohn, S. y Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.

Smith, J. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. En B. Litwiller y G. Bright.

BIBLIOGRAFÍA

(Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions.* (pp. 87-99). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. y Tompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 127–155.

Steele, M. D. (2005). Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 291-328.

Thompson, A. G., y Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 2-24.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speedy and its relationship to concept of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.). *The Development of Mutltiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Tirosh, Dina; Even, Ruhama y Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 51-64.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pensamiento global

educere
En Homenaje a
Pablo Neruda
en el centenario de su nacimiento
1910 - 2010

viene de la página 188

Alguien quiere olvidar que tú eres el primero?
Déjalo que navegue y e ncontrará tu rostro.
Alguien quiere enterrarnos precipitadamente?
Está bien, pero tiene la obligación del vuelo.

Vendrán, pero quién puede sacudir la cosecha
que con la mano del otoño fue elevada
hasta teñir el mundo con el temblor del vino?

Dame esa copa, hermano, y escucha: estoy rodeado
de mi América húmeda y torrencial, a veces
pierdo el silencio, pierdo la corola nocturna,
y me rodea el odio, tal vez nada, el vacío
de un vacío, el crepúsculo
de un perro, de una rana,
y entonces siento que tanta tierra mía nos separe,
y quiero irme a tu casa en que, yo sé, me esperas,
sólo para ser buenos como sólo nosotros
podemos serlo. No debemos nada.

Y a ti sí que te deben, y es una patria: espera.

Continúa en la página siguiente