

PROBABILIDAD TEORÍA Y PRÁCTICA



Profesores:
Sergio Alejandro Arias Lara
Milvia Lissette Peñaloza de Arias

Depósito Legal N° If07620153703588

Octubre 2015

M
ó
d
u
l
o

I
n
s
t
r
u
c
c
i
o
n
a
l

SERGIO ALEJANDRO ARIAS LARA

Profesor adscrito al Departamento de Pedagogía

Universidad de Los Andes

Núcleo Universitario "Dr. Pedro Rincón Gutiérrez"-Táchira-Venezuela

MILVIA LISSETTE PEÑALOZA DE ARIAS

Profesora adscrita al Departamento de Pedagogía

Universidad de Los Andes

Núcleo Universitario "Dr. Pedro Rincón Gutiérrez"-Táchira-Venezuela

PROBABILIDAD

TEORÍA Y PRÁCTICA

Módulo Instruccional



PROBABILIDAD TEORÍA Y PRÁCTICA. Módulo Instruccional

© Sergio Alejandro Arias Lara / Milvia Lissette Peñaloza de Arias, 2015

alsaal@yahoo.es

milvialpa@yahoo.es

© Grupo de Investigación en Evaluación y Mercadeo (EVMERGI), 2015

Grupo de Investigación EVMERGI:

Código: ZG-EVM-NUTA-01-10-09

Coordinador: Sergio Alejandro Arias Lara

Depósito Legal N° If07620153703588

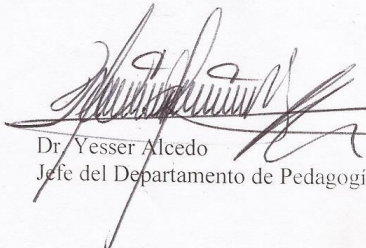


Universidad de Los Andes Táchira
Dr. Pedro Rincón Gutiérrez
Departamento de Pedagogía

CONSTANCIA

Quien suscribe, Doctor Yesser Alcedo portador de la cédula de identidad V- 3430098, en su condición de jefe del Departamento de Pedagogía de la Universidad de Los Andes Núcleo Universitario “Dr. Pedro Rincón Gutiérrez”, por medio de la presente certifica que el Materia Instruccional **PROBABILIDAD TEORÍA Y PRÁCTICA** es autoría del Profesor Sergio Alejandro Arias Lara y la Profesora Milvia Lissette Peñaloza de Arias, titulares de las cédula de Identidad N° V-5028064 y 11499615, respectivamente. El cual fue evaluado por esta unidad académica y además es utilizado como material instruccional en el desarrollo de las asignaturas de Investigación y Estadística I e Investigación y Estadística II,

Certificación que se expide a petición de la parte interesada a los once días del mes de marzo dos mil dieciséis.


Dr. Yesser Alcedo
Jefe del Departamento de Pedagogía



Memoria Descriptiva	
Nombre (Título)	PROBABILIDAD TEORÍA Y PRÁCTICA. Módulo Instruccional
Justificación	La Estadística como área del saber amerita de otras disciplinas que complementen las realidades y conocimientos que trata. Es así como la Probabilidad como rama de la matemática aporta variedad de métodos, técnicas y discernimientos que clarifican su estudio. En la visión de los autores del presente trabajo surge la necesidad de diseñar y elaborar este módulo instruccional adaptado a los programas y contextos de la realidad en la cual se desenvuelve el estudiantado. Se aclara que este material académico se reelaboró a partir de una ya existente de los mismos autores en función de actualizar y otorgarle mayor significación correlacionada con el perfil de nuestros estudiantes.
Usuarios	Estudiantado y Profesorado de las asignaturas de Estadística de los pensum de las diferentes carreras ofertadas por el Núcleo Universitario Pedro Rincón Gutiérrez-Táchira de la Universidad de Los Andes u otras instituciones educativas y público en general.
Objetivos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Contextualizar al estudiantado en los tópicos de la Teoría de Probabilidad y su práctica. 2. Orientar los procesos de aplicación de la Teoría de Probabilidad a situaciones reales desde la significación para el estudiantado. 3. Garantizar el adiestramiento de los preceptos de probabilidad en el desarrollo y aplicación de la Estadística.
Estrategias y Actividades	<p>Incorporar secuencialmente al estudiantado en los procesos inherentes a la Teoría de Probabilidad.</p> <p>Diseño de estrategias para ejercitar al estudiantado en los tópicos anteriormente referenciados.</p> <p>Aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones concretas en relación con la Estadística.</p>
Importancia de Ejercicios Resueltos y Propuestos	<p>Permite introducir al estudiantado en este tema de manera secuencial.</p> <p>Facilita la comprensión de los aspectos teóricos del tema</p> <p>Orienta la transdisciplinariedad con otras áreas del saber</p>
Criterios de Evaluación	<p>Permite la autoevaluación de los participantes</p> <p>Aplicabilidad de los elementos teóricos</p> <p>Relación teoría y práctica</p>

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
1. TEORÍA ELEMENTAL DE PROBABILIDAD.....	2
1.1. Reseña Histórica.....	2
1.2. Probabilidad.....	3
1.3. Técnicas de Conteo.....	4
1.3.1 Principio Multiplicativo.....	5
1.3.2 Principio Aditivo:.....	7
1.3.3 Variación:.....	8
1.3.4 Permutación:.....	9
1.3.5 Combinación:.....	10
2. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD.....	11
2.1 Probabilidad:.....	11
2.2 Experimento Aleatorio:.....	11
2.3 Ensayo:.....	11
2.4 Espacio Muestral:.....	11
2.5 Evento o Suceso:.....	12
2.1.1 Representación de Eventos o Sucesos.....	13
3. CONCEPCIONES DE PROBABILIDAD.....	13
3.1. Probabilidad Clásica o Apriori.....	14
3.2. Probabilidad como frecuencia relativa o a posteriori.....	15
3.3. Definición matemática de probabilidad.....	16
3.4. Definición Axiomática de probabilidad.....	17
4. AXIOMAS Y TEOREMAS DE PROBABILIDAD.....	17
4.1. Axiomas de Probabilidad.....	17
4.1.1 Axioma 1:.....	18
4.1.2 Axioma 2:.....	18
4.1.3 Axioma 3:.....	18
4.1.4 Axioma 4:.....	19
4.1.5 Axioma 5:.....	19
4.2. Teoremas de Probabilidad.....	19
4.2.1 Teorema 1:.....	19
4.2.1.1 Eventos mutuamente excluyentes:.....	20
4.2.1.2 Eventos No Mutuamente Excluyentes:.....	22
4.2.2 Teorema 2:.....	24
4.2.2.1 Eventos Independientes:.....	24
4.2.2.2 Eventos Dependientes.....	27
5. PROBABILIDAD CONDICIONAL.....	29
5.1. Definición de Probabilidad Condicional.....	31
5.2. Probabilidad Condicional y Tablas de Contingencia.....	32
6. PROBABILIDAD TOTAL.....	35
6.1. Definición de Probabilidad Total.....	36
6.2. Probabilidad Total y Árboles de Decisión.....	38
7. TEOREMA de BAYES.....	39
8. EJERCICIOS RESUELTOS.....	42
9. REFLEXIONES.....	63
10. EJERCICIOS PROPUESTOS.....	65
REFERENCIAS.....	68

INTRODUCCIÓN

Para la mayoría de fenómenos o hechos de nuestro entorno, lo que pueda acontecer un instante después de este momento, se encuentra signado de incertidumbre asociada a lo fortuito o a algo determinado regido por prescripciones. Pues si se trata de un hecho donde no se puede tener certeza absoluta sobre lo que pueda resultar, se entiende que es aleatorio o está subyugado por el azar; en cambio, si lo que resulte o suceda viene establecido o decretado por ciertas reglas comprobadas o leyes, lo resultante viene previamente instituido. Al primer caso se le llama hechos estocásticos y a los segundos hechos deterministas.

En la primera situación pueden ser sucesos como: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja o un mazo de cartas, lanzar dados, escoger al azar fichas de dominó; y en la segunda situación pueden ser eventos como: determinar la fuerza con la que se desplaza un móvil, determinar el volumen de un cuerpo, establecer la concentración de acidez de una solución, entre otras. En sí el interés que se presenten ciertas situaciones en particular al ocurrir cualquiera de los hechos anteriores origina estados de posibilidad o no de su ocurrencia, que es precisamente lo que aborda el estudio de la probabilidad.

El quehacer diario y cotidiano de la humanidad se encuentra impregnado de incertidumbres, pues la generalidad de los fenómenos explícita o implícitamente cargan consigo algo de aleatoriedad, por ejemplo, al salir de clases los estudiantes que toman una de las rutas universitarias dicen que tardarán alrededor de 15 minutos en llegar a la primera parada, pero ¿se podrá afirmar con total certeza que será así?, la respuesta es que esta situación se enmarca en la eventualidad o azar de su ocurrencia, es decir, en lo posible del hecho; en consecuencia su análisis es tarea de la teoría de probabilidad.

1. TEORÍA ELEMENTAL DE PROBABILIDAD

1.1. Reseña Histórica

Establecer el nacimiento u origen de la probabilidad resulta demasiado confuso, pues no se sabe con precisión y exactitud sobre sus inicios; lo que se ha transmitido de generación en generación, por parte de los historiadores se hace desde diversas ópticas, pues cada quien le asigna relevancia e importancia a determinados aspectos. Para Sotomayor y Wisniewski (2001). El origen de la teoría de probabilidades es oscuro, no existe consenso en cuanto a la fecha que pueda situarse. Los autores expresan que hacia el año 1494 el Italiano Pacioli sugiere algunas interrogantes concretas sobre la probabilidad, pero nunca abordó la temática en forma científica. 56 años después el matemático Girolamo Cardano (1501 – 1576) realiza estudios más profundos y luego de su muerte se publican escritos con el título “Libro sobre los juegos del azar”. Se especula que Cardano, adicto a los juegos de azar y las apuestas desarrolló por su cuenta la teoría de probabilidades con el fin de obtener ventaja en el juego, sin embargo, sus descubrimientos y teoremas más importantes nunca fueron publicados por temor a que fueran conocidos por sus oponentes.

En 1654 y sin conocimiento de lo hecho por Cardano más de 100 años atrás, el matemático francés Blaise Pascal redescubrió las bases de las teorías de las probabilidades desde una perspectiva más universal. Posteriormente Pierre Simón Laplace (1749 – 1827) realiza importantes aportes al desarrollo de esta ciencia mediante su publicación más importante en el año 1812 con el título de ***Théorie analytique des probabilités***, en la cual se discuten aplicaciones prácticas de la teoría (errores en observaciones; la determinación de las masas de Júpiter, Saturno y Urano; métodos de triangulación para supervivencia y problemas de geodésicas, en particular la determinación del meridiano de Francia) y desarrolla el concepto de distribución normal, descubierta en primera instancia por Abraham de Moivre. Además, complementó el trabajo comenzado por Gauss sobre teoría de errores.

En la historia de la humanidad el estudio formal de las leyes de la probabilidad y del azar se ha utilizado en función del juego. Nadie sabe cómo se

inventó éste, algunos afirman que se remonta a tiempos tan ancestrales como el antiguo Egipto cuando se jugaba con astrágalos hechos con las tabas de animales; se dice que el emperador romano Claudio (10 AC - 54 DC) escribió el primer tratado sobre el juego bajo el título Como ganar a los dados, pero por desgracia este no se conservó. Los dados, tal y como se conocen en la actualidad, se hicieron muy populares en la edad media a tal punto que un personaje como Chevalier de Mere propuso un enigma matemático ¿Qué es más probable: sacar al menos un seis en cuatro tiradas con un solo dado, o sacar al menos un doble seis en 24 tiradas con dos dados? Esto fue resuelto por sus amigos matemáticos Pascal y Fermat quienes a partir de esta inquietud desarrollan la teoría de la probabilidad la cual se considera como el origen de esta ciencia.

1.2. Probabilidad

En el quehacer diario de la humanidad se presentan situaciones o fenómenos que ocurren de manera determinística o de manera fortuita. Por ejemplo, si se consideran las leyes físicas se afirma que el peso de los cuerpos está determinado por el modelo matemático $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, es decir, el peso es la resultante del producto de la masa por la aceleración de la gravedad; de igual modo, en el mundo de la química, la densidad está determinada por el cociente entre el peso y el volumen; en el área de la matemática, la relación entre la estatura y el peso de las personas puede asociarse a un modelo matemático como una función lineal $Y = mx + b$. Estos prototipos se enmarcan dentro de los modelos determinísticos.

No obstante, es más frecuente encontrarse en la práctica con situaciones como lanzar un dado, lanzar una moneda, extraer cartas de una baraja, seleccionar individuos u objetos, encontrarse con artículos defectuosos y no defectuosos, entre otros; los cuales suceden regidos por el azar o a la aleatoriedad, y como consecuencia no están regidos por reglas preestablecidas. Por lo tanto, los primeros fenómenos que siguen una ley reciben el nombre de

modelos determinísticos, y los segundos regidos por la casualidad y el azar se les denominan **modelos estocásticos o no determinísticos**.

1.3. Técnicas de Conteo

Contar en el sentido matemático incluye prácticas específicas determinadas por el cómo se quiere contar y la clase de elementos que se quiere contar. Este es un tema más de álgebra que de estadística, sin embargo, al analizar probabilidades se necesitará enumerar los posibles resultados de un hecho en particular, sin tener que anotar a cada uno de los elementos, para lo cual se hace imprescindible abordar aunque no de manera profunda y compleja este tema.

Cuando se da un fenómeno aleatorio puede ser que el total de sus posibles resultados y los casos favorables a un evento en particular se puedan establecer con relativa facilidad, pero en muchos casos estas operaciones constituyen una labor bastante ardua. Al abordar ésta técnica se debe tener presente la teoría combinatoria (combinaciones, variaciones y permutaciones) sobre todo sus normas en cuanto al orden en el cual suceden las observaciones, pues este incide en los posibles arreglos.

Otro concepto muy útil y relevante para entender las técnicas de conteo es el de *producto cartesiano*, el cual se puede definir de la siguiente manera:

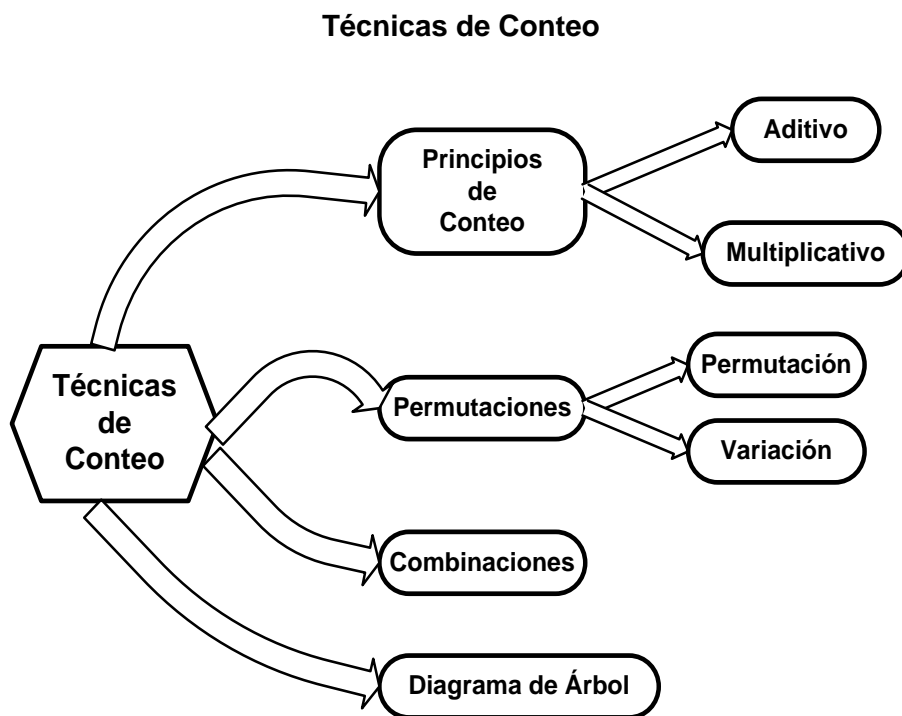
Sea un conjunto finito A que contiene “ n ” elementos, y sea otro conjunto finito B con “ m ” elementos. Por lo tanto, se pueden formar parejas ordenadas (a, b) donde $a \in A$, y $b \in B$. Donde el resultado del producto $A \times B$, contiene “ nm ” elementos



Este producto cartesiano puede extenderse a cualquier cantidad de conjuntos, es decir, para más de dos conjuntos tal y como ocurre en la teoría de conjuntos, para aplicarse en

diversas situaciones de conteo. Entre las técnicas de conteo, básicamente se puede hablar de: dos principios de conteo el aditivo y el multiplicativo, las permutaciones y combinaciones dentro del análisis combinatorio y de los diagramas de árbol o arboles de decisión, donde cualquiera de estas herramientas aportan vías que de alguna manera facilitan la obtención de los posibles arreglos de elementos.

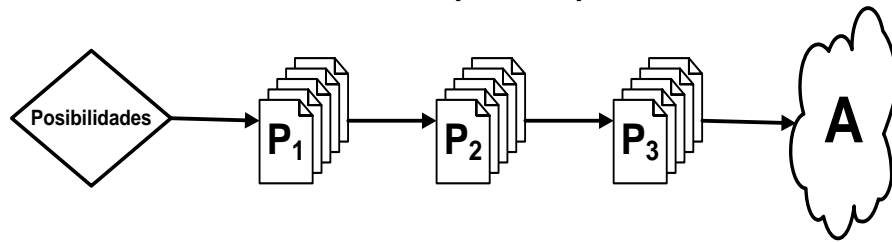
El siguiente diagrama ilustra la clasificación:



Elaboración propia

1.3.1 Principio Multiplicativo: Si un suceso o evento puede efectuarse de “n” veces diferentes y sucesivas: $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$; donde cada P puede realizarse a su vez de otras formas diferentes, entonces, el total de formas posibles en que se puede realizar el evento viene dado por el producto de estas. Gráficamente sería:

Técnica de Conteo. Principio Multiplicativo



Elaboración propia

En el diagrama se puede observar que P_1 , P_2 y P_3 son vías o caminos sucesivos para llegar al valor “A”, es decir, pasos obligatorios de desplazamiento hasta la figura A, por lo tanto, el total de posibilidades viene dado por la siguiente expresión:

$$n(\text{arreglos}) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n$$

Ejemplo: Esta semana el comedor de la Universidad de Los Andes Pedro Rincón Gutiérrez, para el almuerzo ofrece a su estudiantado tres tipos de platos principales, cuatro clases de contornos, dos sopas diferentes y jugos de tres frutas distintas, permitiéndole tomar sólo una de las opciones en cada renglón. ¿De cuantas maneras puede un alumno elegir su almuerzo?

Solución: Como se trata de hechos o eventos continuos, es decir, que se deben realizar sucesivamente, el número total de formas en que un estudiante puede escoger su almuerzo, viene dado por el principio multiplicativo de las reglas del conteo.

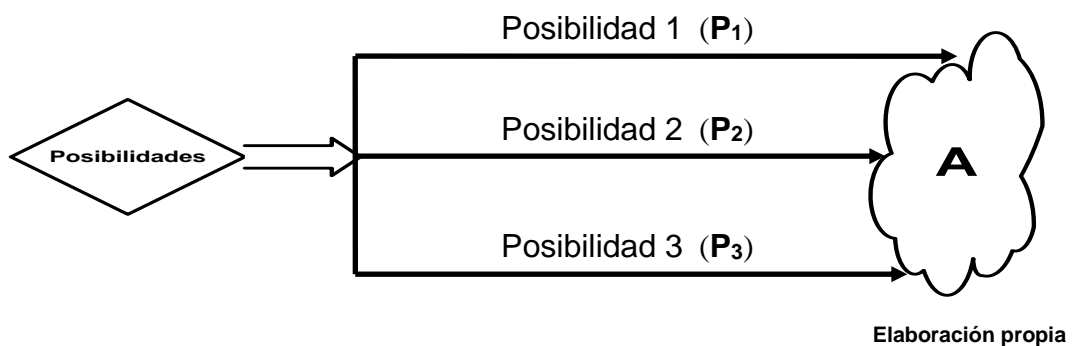
$$n(\text{arreglos}) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n$$

$$n(\text{arreglos}) = 3 \times 4 \times 2 \times 3$$

$$n(\text{arreglos}) = 72 \text{ almuerzos diferentes}$$

1.3.2 Principio Aditivo: Si se tiene un evento o suceso cualquiera **A**, y éste se puede realizar u obtener de dos o más maneras diferentes y excluyentes “**n**” (o de una forma o de otra) y además no se pueden ejecutar en sucesión, el total de modos diferentes en que se puede efectuar dicho evento es igual a la suma de todas esas posibilidades. Gráficamente sería:

Técnica de conteo. Principio Aditivo

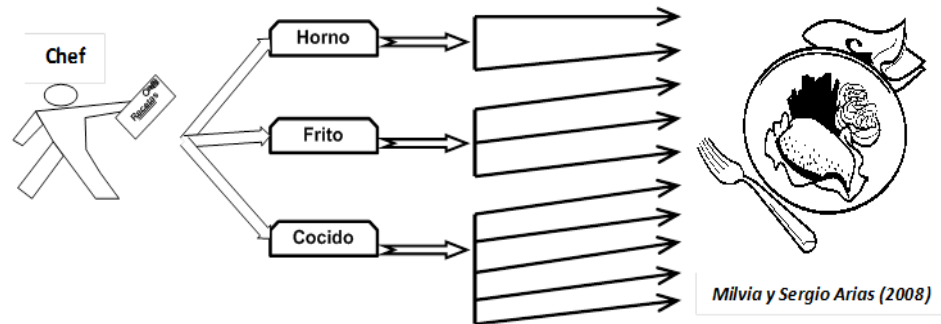


En el diagrama se puede observar que P_1 , P_2 y P_3 son vías o caminos para llegar a **A**, es decir, alternativas posibles de desplazarse hasta la figura A, por lo tanto, el total de posibilidades viene dado por la siguiente expresión:

$$n(\text{arreglos}) = P_1 + P_2 + P_3$$

Ejemplo: Esta semana el comedor de la Universidad de Los Andes Pedro Rincón Gutiérrez, para el almuerzo ofrece a su estudiantado tres tipos de platos principales, uno de ellos es carne de ovejo. El chef del comedor en su recetario dispone de dos sistemas para hacerlo al horno, tres recetas para prepararlo frito y cinco métodos para arreglarlo cocido. ¿De cuantas maneras diferentes puede el chef preparar la carne de ovejo para ofrecerla como plato principal en el almuerzo?

Solución: En este caso los métodos para preparar la carne de ovejo son mutuamente excluyentes, un mismo trozo de ovejo no debe cocinarse por más de un procedimiento. Por lo tanto, se recurre al principio aditivo de las reglas del conteo.



$$n(\text{arreglos}) = P_1 + P_2 + P_3$$

$$n(\text{arreglos}) = 2 + 3 + 5$$

$$n(\text{arreglos}) = 10 \text{ posibles formas de preparación}$$

1.3.3 Variación: Es la cantidad total de resultados (arreglos) distintos posibles que se pueden obtener considerando el orden en que ocurren cuando se tienen “n” elementos de una muestra y se forman grupos de “r” elementos. La relación matemática para su cálculo viene dada por la ecuación:

$${}_nVr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo: Un grupo de siete amigos se postulan para las elecciones de donde saldrán los próximos representantes estudiantiles de la Universidad de Los Andes Pedro Rincón

Gutiérrez. Son cinco cargos a los que se pueden optar, ¿de cuántas maneras pudiera quedar integrada la estructura estudiantil, si cinco de los amigos logran los primeros lugares?

Solución: En este caso se dispone de siete (7) elementos para tomarlos de a cinco (5). Por lo tanto, se recurre a una variación de elementos, puesto que el orden influye ya que no es igual quedar de primero que de quinto, no es igual ser presidente que vocal en cualquier organización.

$$nVr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_7V_5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2.520$$

$$\boxed{n(\text{arreglos}) = 2.520 \text{ maneras}}$$

1.3.4 Permutación: Permite determinar la cantidad de maneras en las que pueden arreglarse un grupo de “n” elementos donde influye el orden. La relación matemática para su cálculo viene dada por:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo: Prudencia Callethre tiene cinco textos de estadísticas en una repisa sobre su cama, ¿de cuántas maneras distintas puede ordenarlos?

Solución: En este caso se dispone de cinco (5) elementos para tomar los cinco (5). Por lo tanto, se recurre a una variación de todos los elementos, y puesto que el orden influye, se trata de una permutación

$$P_n = n!$$

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! = 120$$

$$\boxed{n(\text{arreglos}) = 120 \text{ maneras posibles}}$$

1.3.5 Combinación: Permite precisar la cantidad de arreglos distintos posibles de “r” elementos que se pueden formar cuando se dispone de una totalidad de “n” elementos de un conjunto; esto sin ser relevante el orden en el cual se dan los resultados. Aquí lo que importa en sí es cuales son los resultados. La relación matemática para su cálculo viene dada por la siguiente ecuación:

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!} \quad \text{ó} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

Ejemplo: El administrador del comedor de la Universidad de Los Andes Pedro Rincón Gutiérrez contratará los servicios de tres mujeres y dos hombres para mesoneros; si se presentan 10 hombres y 12 mujeres a la entrevista, ¿de cuántas maneras distintas puede el administrador realizar la selección de este personal?

Solución: En este caso se dispone de diez (10) hombres y doce (12) mujeres para seleccionar tres y dos respectivamente, además el orden de selección no influye. Por lo tanto, se recurre a una combinación de los elementos hombres y otra combinación de los elementos mujeres, para finalmente multiplicar ambas combinaciones.

$$n(\text{arreglos}) = ({}_{10} C_2) ({}_{12} C_3)$$

$$n(\text{arreglos}) = \binom{10}{2} \binom{12}{3} \left(\frac{10!}{(10-2)! 2!} \right) \left(\frac{12!}{(12-3)! 3!} \right)$$

$$n(\text{arreglos}) = (45)(220) = 9.900 \text{ maneras de selección}$$

2. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

2.1 Probabilidad: De manera intuitiva se puede conceptualizar como el grado de incertidumbre que se presenta sobre la ocurrencia de algún suceso o fenómeno. Comúnmente se asocia a porcentajes; de hecho, cuando se formula alguna interrogante sobre lo acaecido de algún evento, las respuestas que se obtienen vienen expresadas en porcentajes.

2.2 Experimento Aleatorio: Es todo hecho, prueba o proceso que puede producir resultados diferentes así se repita siempre del mismo modo, se caracteriza y cumple con las siguientes propiedades:

- Es de tal naturaleza, que puede repetirse “n” cantidad de veces en condiciones análogas o similares.
- Los resultados dependen de la eventualidad o casualidad, es decir, no puede predecirse con exactitud un resultado en particular ya que intervienen aspectos que no pueden controlarse, sin embargo, si se pueden determinar todos los resultados posibles.
- El hecho ocurre en concordancia con un conjunto de reglas bien definidas que le otorgan carácter formal.
- Presenta regularidad estadística, es decir, está directamente relacionado al número de veces que se repite, puesto que a mayor número de repeticiones los resultados tienden a regularizarse.

2.3 Ensayo: Es el resultado de una sola ejecución de un experimento aleatorio.

2.4 Espacio Muestral: Es el conjunto formado por todos los factibles resultados de un experimento aleatorio, es decir, lo determinan la totalidad de las posibles ocurrencias de un hecho o suceso. Se denota por S ó Ω . En algunos casos por E .

Ejemplos:

- ✓ **Experimento aleatorio:** lanzar una moneda

$$S \text{ (Espacio muestral): } \{C, S \quad S = 2\}$$

- ✓ **Experimento aleatorio :** Lanzar un dado

$$S \text{ (Espacio muestral): } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} \Rightarrow S = 6$$

- ✓ **Experimento aleatorio :** Sexo de dos hijos en una familia

$$S \text{ (Espacio muestral): } \{HH, HV, VH, VV\} \Rightarrow S = 4$$

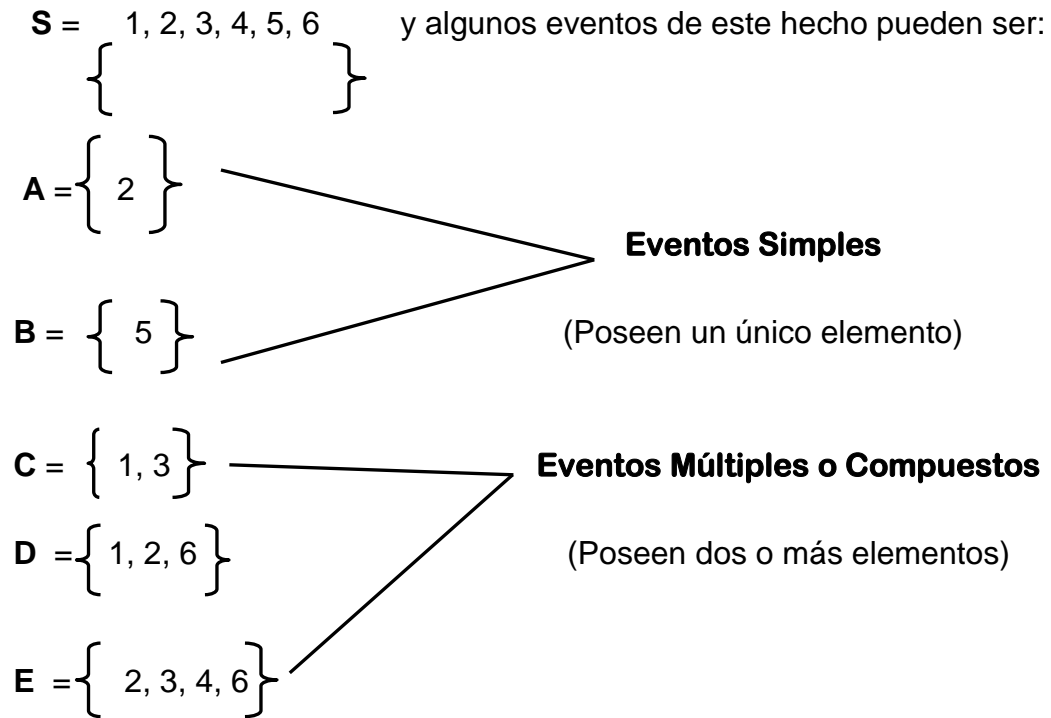
- ✓ **Experimento aleatorio:** Seleccionar cartas de una Baraja Española

$$S = \{10 \text{ basto, } 10 \text{ oro, } 10 \text{ espada, } 10 \text{ copas}\} \Rightarrow S = 40$$

2.5 Evento o Suceso: Es todo subconjunto o parte de un espacio muestral. Pueden ser simples o múltiples. Se denotan por medio de letras mayúsculas.

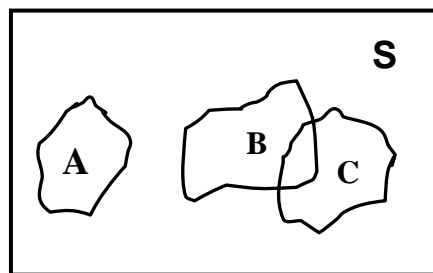
Ejemplo:

Si el experimento consiste en lanzar un dado, el espacio muestral sería



2.1.1. Representación de Eventos o Sucesos

Por lo general, se acostumbra a representar los sucesos mediante diagramas de VENN. El conjunto universal viene a ser el espacio muestral, y los conjuntos dentro de éste son los eventos, de tal manera:



3. CONCEPCIONES DE PROBABILIDAD

Se puede hablar de un enfoque personal o subjetivo cuando alguien le asigna valor a la posibilidad que ocurra un hecho en particular, es decir, mediante evaluaciones personales, y otro enfoque empírico y objetivo cuando se asignan valores de probabilidad basados en postulados y reglas.

3.1. Probabilidad Clásica o Apriori

Es un concepto intuitivo de probabilidad, se dice que tiene su origen en los juegos al azar (fortuitos), y es el más antiguo; se basa en el hecho de considerar resultados equiprobables (todos tienen la misma posibilidad de ocurrir), en función del principio matemático de la razón, donde se puede saber de antemano los posibles resultados (Espacio muestral). Se afirma que quien lo divulgó fue el físico – Matemático Laplace, al establecer que la probabilidad de que ocurra un evento cualquiera si se conoce la totalidad de ocurrencias, es la razón entre el total de casos a favor de dicho evento y el conjunto total de resultados posibles. Su ecuación se muestra a continuación:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{casos a favor del evento}}{\text{total de casos } (S)}$$

Por largo tiempo esta conceptualización se consideró satisfactoria, pero resulta imprecisa al presentar graves defectos como: a) Presuponer que la probabilidad de un hecho será siempre el cociente de dos números enteros (un número racional), lo cual es falso. b) al establecer que todos los casos sean igualmente posibles, realmente dice igualmente probables; cuando lo posible no es algo que se pueda regular, en cambio lo probable sí. Un evento puede ser posible o no posible, pero no un poco posible o un poco más posible.

Ejemplo:

Se lanza un dado legal (no cargado eléctricamente). Determine la probabilidad de que la cara que cae hacia arriba sea un múltiplo de tres ($\dot{3}$)

- Experimento aleatorio : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$
- Evento : múltiplo de tres ($\dot{3}$)

$$\text{Casos a favor de } (\dot{3}) = \{3, 6\}$$

$$P(\dot{3}) = \frac{\text{casos a favor del evento } 3}{\text{total de casos } (S)}$$



$$P(\dot{3}) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(\dot{3}) = 0,3333$$

3.2. Probabilidad como frecuencia relativa o a posteriori

Cuando un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, una parte de éste origina un evento o suceso (A, B,...). Esto es, al repetirse “n” cantidad de veces un experimento y al observarse “h” cantidad de veces un suceso cualquiera dentro de esas “n” veces; entonces, la probabilidad de dicho evento es igual a la proporción h/n.

$$P(\text{evento}) = \frac{h}{n}$$

Por lo tanto, la definición de probabilidad como frecuencia relativa, se entiende como la proporción de veces en que sucederían a los largos eventos de igual tipo. Si se lanza una moneda por ejemplo, 100 veces y se toma nota de las veces en que aparecen sellos de esos 100 lanzamientos, se puede establecer dicha relación que no es otra cosa que una proporción, además, al ser parte de un todo, igualmente se está ante una frecuencia relativa.

Derivado de la experiencia, se sabe que a medida que “n” aumenta, la frecuencia relativa se acerca más a la probabilidad matemática. En este caso no existe garantía sobre lo que pueda ocurrir en cualquier oportunidad en particular; pero, si se registran las experiencias en muchas ocasiones existirá una aproximación muy cierta al valor de la probabilidad.

3.3. Definición matemática de probabilidad

Considérese la experiencia de lanzar una moneda diversa cantidad de veces y registrar (anotar) el número de casos en que aparece sello. En la práctica se realizó la experiencia y produjo los siguientes resultados mostrados en la tabla a continuación:

Experimento Aleatorio: Lanzar “n” veces una moneda

Evento: Número de sellos que se obtienen

Tabla de Resultados

Lanzamientos “n”	Número de sellos f_i	Frecuencia Relativa $h_i = f_i / n$
5	2	$2/5 = 0.40$
10	6	$6/10 = 0.60$
20	11	$11/20 = 0.55$
50	27	$27/50 = 0.54$
100	49	$49/100 = 0.49$
.	.	.
∞	f_i	$f_i/n = 0.5$

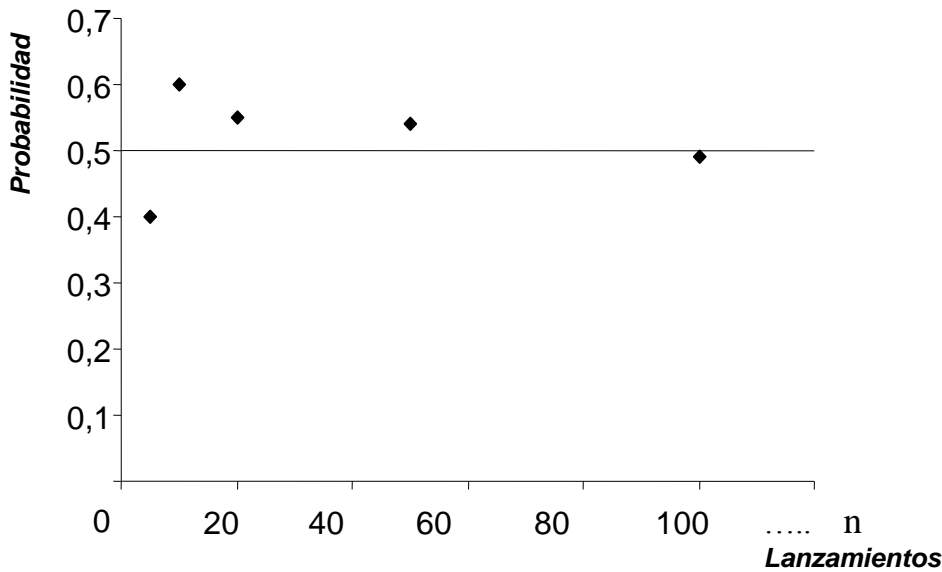
La definición matemática de probabilidad establece que es el límite de la frecuencia relativa (h_i) de un evento cualquiera, cuando el número de veces que se repite el experimento “N” del cual se obtiene, tiende o se aproxima a ∞ .

$$P(\text{evento}) = \lim_{N \rightarrow \infty} h_i$$

En la tabla anterior se puede observar que los valores de la frecuencia relativa (h_i) tienden hacia 0.5 tanto por defecto como por exceso a medida que “n” se hace grande. Por lo tanto la probabilidad de obtener la cara sello es igual a 0.5.

$$P(\text{sello}) = \lim_{N \rightarrow \infty} h_i = 0,5$$

Gráficamente se tiene:



La gráfica muestra la existencia de una vecindad de puntos alrededor del valor de $p = 0.5$. Observe que se dan aproximaciones o tendencias tanto por la parte inferior como la superior de 0,5; lo cual coincide con la definición de “Límite”.

3.4. Definición Axiomática de probabilidad

Esta definición orienta la probabilidad como el conjunto de conceptos matemáticos que operan bajo postulados y reglas bien definidas. Se fundamenta en supuestos o axiomas y teoremas, es decir, suposiciones básicas construidas y debidamente comprobadas; tomadas en relación directa con la teoría de conjuntos, lo cual le da cuerpo a la teoría de probabilidad. Bajo esta concepción, no se define explícitamente el concepto de probabilidad, se define indirectamente bajo las reglas, axiomas y teoremas que se desarrollan en el siguiente apartado.

4. AXIOMAS Y TEOREMAS DE PROBABILIDAD

4.1. Axiomas de Probabilidad

Si E es un experimento aleatorio cualquiera y S su espacio muestral correspondiente, donde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son sucesos o eventos asociados a S , es decir, donde se tiene que: $A_1 \subset S, A_2 \subset S, A_3 \subset S, \dots, A_n \subset S$

4.1.1 Axioma 1: Si “A” es un evento cualquiera asociado

A un espacio muestral S, entonces:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Esto es, la probabilidad de un evento cualquiera está definida en el intervalo cerrado de 0 a 1.

$$P(A) \rightarrow [0, 1]$$

4.1.2 Axioma 2: La probabilidad del suceso “espacio muestral” es igual a la unidad. Si S es el espacio muestral de un experimento, entonces:

$$P(S) = 1$$

Evento seguro: Es todo suceso donde se tiene la certeza total de que éste ocurre, por lo tanto, su probabilidad es igual a 1. Si el evento “A” es que un ser humano muera su probabilidad será: $P(A) = 1$

Evento imposible: Es todo evento del cual se tiene la certeza absoluta de que no ocurre, por lo tanto, su probabilidad es cero (nula). Si el evento “A” consiste en obtener un estudiante con una medida de 5 metros de estatura al seleccionarlo de un grupo, su probabilidad será: $P(A) = 0$

4.1.3 Axioma 3: Si “A” y “B” son dos eventos ajenos, la probabilidad de que ambos ocurran es la suma de sus respectivas probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Los axiomas se consideran como afirmaciones admitidas como válidas sin recurrir a la demostración, es decir, postulados que se aceptan como verdades. Si se combinan adecuadamente axiomas con razonamientos lógicos surgen nuevas verdades demostrables llamadas Teoremas.

4.1.4 Axioma 4: El conjunto que no posee elementos (vacío \emptyset), es un evento imposible, su probabilidad es cero.

$$P(\emptyset) = 0$$

4.1.5 Axioma 5: *Llamado regla de la complementación.* Si "A" es un evento cualquiera y A^c es el complemento de "A" en un espacio muestral "S", la suma de sus respectivas probabilidades es igual a

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\text{Donde } \begin{cases} P(A) = 1 - P(A^c) \\ P(A^c) = 1 - P(A) \end{cases}$$

Ejemplo: Se lanza un dado legal, calcular la probabilidad de que la cara que cae hacia arriba sea la cara dos. (Aplique el Teorema del complemento.

A: Evento de obtener la cara 2 (1 caso de seis)

A^c : Evento de no obtener la cara 2 (5 casos de seis)

1: Universo o máximo valor que puede asumir una probabilidad

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$P(A) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

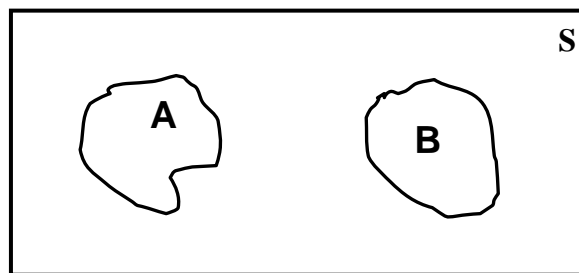
4.2. Teoremas de Probabilidad

4.2.1. Teorema 1:

Teorema de la suma o regla aditiva; este teorema se apoya en la operación aritmética de la suma, o en la unión de la teoría de conjuntos, o en la disyunción de la lógica matemática ($A+B$; $A \cup B$; $A \vee B$). Se subdivide en dos partes:

4.2.1.1. Eventos mutuamente excluyentes:

Está relacionado con el axioma 3. Llamados también eventos disjuntos. Se consideran eventos mutuamente excluyentes a dos o más eventos que no puedan ocurrir conjuntamente, es decir, la ocurrencia de uno de ellos, excluyen a los otros y viceversa. Además la intersección entre estos es el conjunto vacío, tal como se muestra en el siguiente Diagrama de Venn.



S: Espacio muestral
A: Evento "A"
B: Evento "B"

La **Regla Aditiva:** Si A, B, C, ..., n son eventos mutuamente excluyentes; entonces sus probabilidades aditivas están dadas por:

$$P(A \cup B \cup C \cup \dots \cup n) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(n)$$

Por lo tanto, la probabilidad de dos eventos A y B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eventos Mutuamente Excluyentes pueden ser:

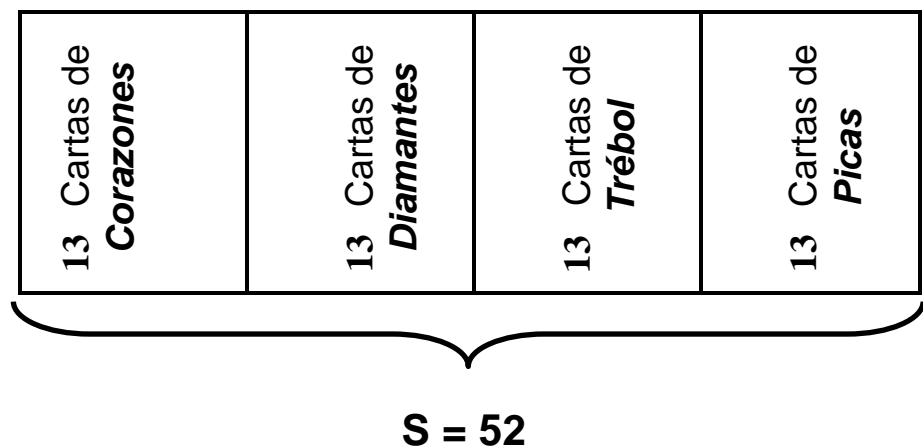
- i) El sexo de un niño (hembra – varón)
- ii) Las caras par e impar al lanzar un dado
- iii) Cartas negras y cartas rojas de una baraja de póker

Ejemplo: Un jugador selecciona una carta de una baraja de póker. Calcule la probabilidad de que dicha carta sea de corazón o de diamante.

Resolución:

La baraja de póker la conforman 52 cartas distribuidas en cuanto al color en dos grandes grupos (negras y rojas), y en cuanto a las figuras en cuatro grupos de 13 cartas cada uno (Corazón, diamante, trébol y pica).

Por consiguiente, si una carta es de corazón excluye que sea de diamante al mismo tiempo y viceversa. Por lo tanto, estos dos eventos son mutuamente excluyentes.



Evento "A": Obtener carta corazón } Eventos mutuamente excluyentes
 Evento "B": Obtener carta diamante } **$A \cap B = \emptyset$**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

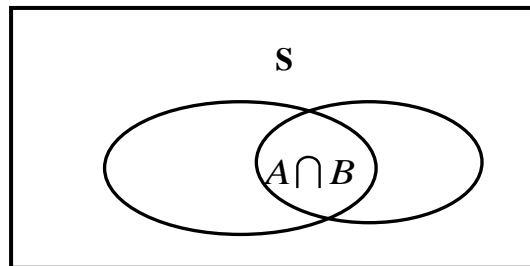
$$P(A) = \frac{13}{52}, \quad P(B) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52}$$

$P(A \cup B) = 0,5$

4.2.1.2. **Eventos No Mutuamente Excluyentes:**

Es una generalización del axioma tres (3) .Y se definen como los sucesos en un mismo experimento aleatorio, en el cual, la probabilidad de que ocurra alguno de ellos no imposibilita la ocurrencia del otro(s) suceso(s), por lo tanto, los eventos pueden ocurrir simultáneamente. También se afirma que los sucesos se traslapan (intersectan) parcialmente, si parte de un evento y parte de otro ocurren conjuntamente. Como se aprecia en el siguiente Diagrama de Venn.



S: Espacio Muestral

A: Evento "A"

B: Evento "B"

$A \cap B$: Lo que ocurre o sucede simultáneamente

En el diagrama se observa que los eventos "A" y "B" se cruzan parcialmente, la zona rayada es la parte del evento "A" que también es parte del evento "B" y viceversa. En consecuencia se afirma que la ocurrencia de uno de ellos no excluye la ocurrencia del otro.

La **Regla Aditiva para eventos no mutuamente excluyentes:** Si A y B son eventos no mutuamente excluyentes; entonces, sus probabilidades aditivas están dadas por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Nótese que a pesar de ser el mismo teorema de la Suma, en este caso se resta la intersección de los eventos A y B, puesto que al tomar la totalidad del evento “A” y sumarle la totalidad del evento “B”, la zona rayada ($A \cap B$) se toma dos veces; por lo tanto, se debe restar esta zona para obtener la adición deseada.

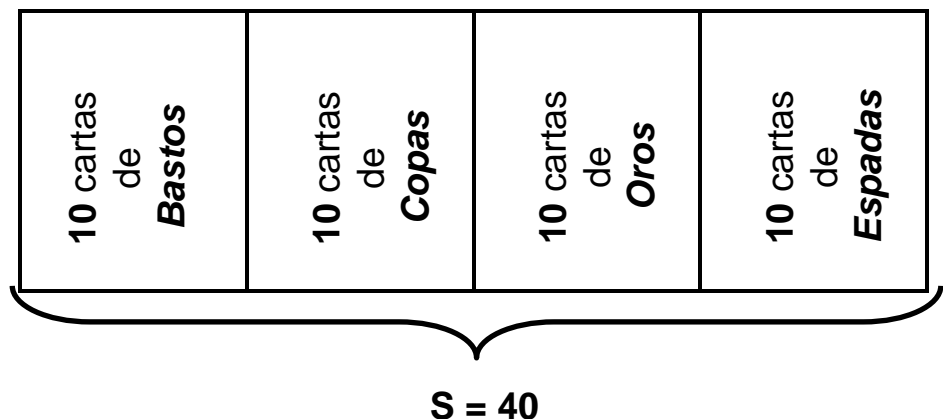
Eventos no mutuamente excluyentes pueden ser:

- i) Obtener múltiplos de dos (2) y múltiplos de (3) al lanzar un dado legal.
- ii) Personas que sean estudiantes y no fumadores
- iii) Cartas que sean corazón y as (número uno)

Ejemplo:

Se extrae una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que la carta seleccionada sea un siete o una copa.

Resolución: La baraja española está conformada por cuarenta (40) cartas repartidas en cuatro grupos de 10 cartas cada uno. Dichos grupos son: Bastos, copas, oros y espadas. La numeración de cada grupo es del 1 (As) hasta el siete (7) consecutivamente, luego salta al 10 (Sota), 11 (Caballo) y el 12 (Rey). Con estas características, se puede plantear la interrogante: ¿Pueden ocurrir al mismo tiempo los eventos siete y copa? La respuesta es afirmativa, puesto que con existir al menos una carta con las dos características, esto se da por hecho.



Evento **A**: Obtener una carta con el número siete
 Evento **B**: Obtener una carta que sea copa

} Eventos no mutuamente excluyentes
 $A \cap B \neq \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{4}{40} \quad P(B) = \frac{10}{40} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{40} \text{ ó } \frac{4}{40} \cdot \frac{10}{40}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = 0,325}$$

4.2.2. Teorema 2:

Teorema del producto o regla de la multiplicación. La probabilidad de que ocurra de manera simultánea dos eventos “A” y “B” está dada por el producto de sus probabilidades.

Este teorema tiene su basamento en la operatividad aritmética del producto, o en la teoría de conjuntos con la operación de la intersección, o en la conjunción de la lógica matemática ($A \cdot B$; $A \cap B$; $A \wedge B$). Se subdivide en dos partes:

4.2.2.1. *Eventos Independientes:*

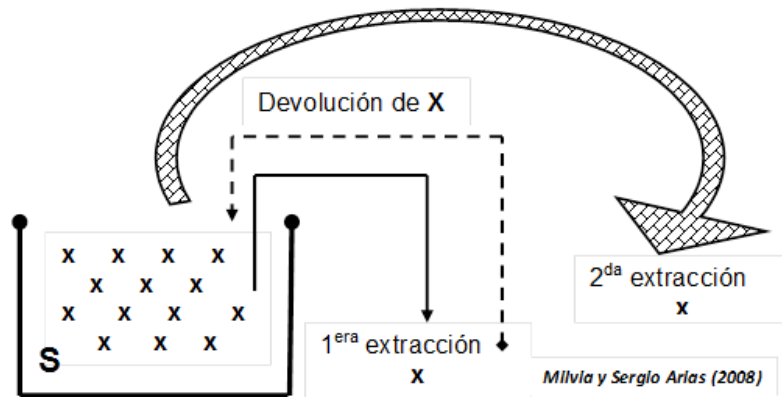
Dos o más eventos no vacíos son independientes, si los eventos de ningún modo se afectan uno al otro en cuanto a sus posibilidades de ocurrir. O aquellos en los que la ocurrencia de uno, no afecta la probabilidad de que ocurra el otro. De este modo “A” y “B” son dos sucesos independientes cuando la ocurrencia del evento “A” no tiene efecto sobre la ocurrencia del evento “B” y viceversa. Y la probabilidad de que ambos ocurran es:

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) \cdot P(B) \\
 P(A \cdot B) &= P(A) \cdot P(B) \\
 P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B)
 \end{aligned}$$

Se puede utilizar cualquiera de estas notaciones.

Dentro de este teorema se puede hablar de reemplazamiento o reposición de los elementos del espacio muestral.

Véase el siguiente esquema:



Por ejemplo, se tiene un recipiente (caja) que contiene cualquier cantidad de objetos (x). Si se realizan extracciones sucesivas, donde inmediatamente después de cada extracción de un elemento x , éste sea devuelto a la caja, las probabilidades originales de selección para todos los elementos del recipiente permanecerán invariables durante este experimento, es decir, ninguna extracción afecta a las demás y viceversa. Ante esta situación, se dice que los sucesos de tomar objetos de esta forma son eventos independientes.

La **Regla General de Eventos Independientes** viene dada por:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap n) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \dots \cdot P(n)$$

Son eventos independientes:

- i) Lanzar varias monedas. Los resultados de cualquier moneda en particular, no afecta las otras y viceversa.

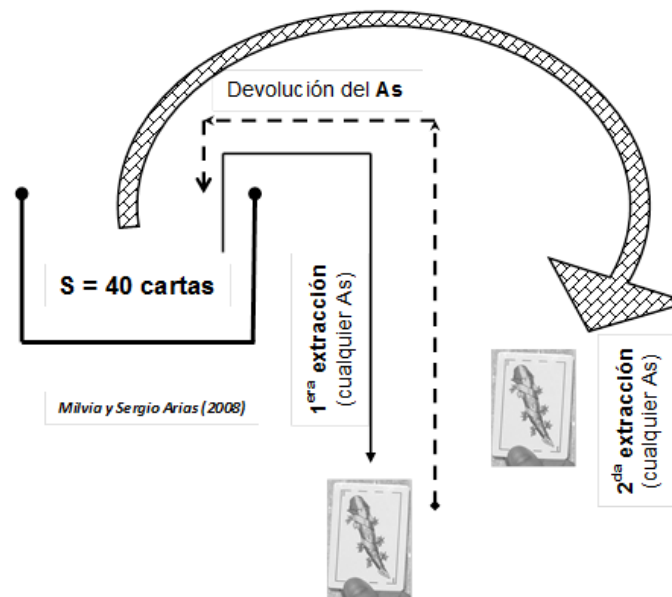
- ii) Las ruedas giratorias de una máquina tragamonedas de un casino, en cada caso se pueden obtener resultados sin afectarse, puesto que las ruedas son independientes.
- iii) El sistema utilizado por las loterías para sus sorteos.

Ejemplo:

Un jugador selecciona al azar y de manera sucesiva dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de tomar dos ases?, si la primera carta es devuelta a la baraja, es decir, se reemplaza la primera carta y luego se toma la segunda carta.

Solución:

El esquema de la situación es el siguiente:



Evento "A": Obtener As en la primera extracción.

Evento "B": Obtener As en la segunda extracción.

Se plantea la interrogante: **¿Se afectan entre si las probabilidades de las extracciones?**

La respuesta: **no se afectan**, lo que implica que dichos sucesos son independientes. Por lo tanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A) = \frac{4}{40} \qquad P(B) = \frac{4}{40}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{16}{1600}$$

$$P(A \cap B) = 0,01$$

4.2.2.2. **Eventos Dependientes**

Dos o más eventos no vacíos con probabilidades mayores que cero son dependientes si la ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de que ocurra el otro y viceversa.

Para este caso, en la relación $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ debe tenerse presente que la $P(B)$ resulta afectada o dependiendo de la ocurrencia del evento "A", de allí el nombre de sucesos dependientes. Entonces, si "A" y "B" son eventos contenidos en el espacio muestral S, donde $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$; implica la siguiente igualdad

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Donde: $P(B/A)$ se lee como la probabilidad de que ocurra el evento "B" si se sabe o está sujeto a que el evento "A" haya ocurrido.

Igual que en el caso 4.1, se puede hablar de no reemplazamiento (reposición) de los elementos del espacio muestral.

Según el esquema anterior, inicialmente todos los elementos del espacio muestral S tienen la misma posibilidad de ser tomados en la primera extracción,

pero al concretarse, ésta altera dicha posibilidad inicial; es decir, a partir de la segunda extracción todas las siguientes se afectan por la ocurrencia de los eventos previos. Así, la probabilidad de la segunda extracción depende del resultado de la primera; la posibilidad de lo que ocurra en la tercera extracción depende de los resultados de la primera y segunda extracción y así sucesivamente.

La **Regla General para Eventos Dependientes** viene dada por:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap n) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot \dots \cdot P(n/ABC\dots)$$

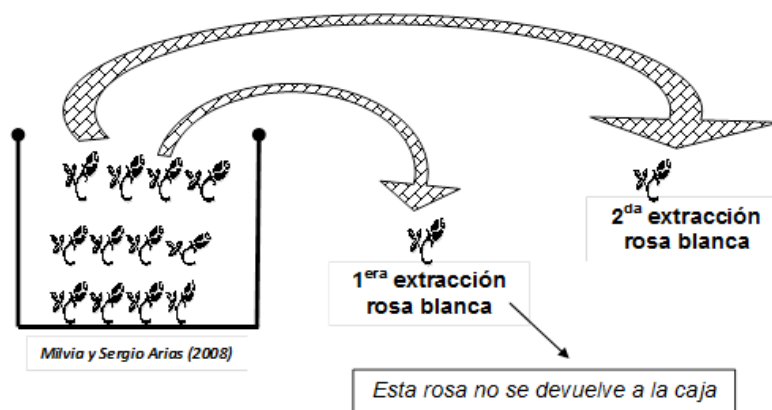
Son ejemplos de eventos dependientes:

- i) Selección de personas para formar una comisión
- ii) Extraer sin reposición cartas de una baraja
- iii) Los resultados de la suma de las caras de dos dados lanzados sujetos a un resultado en particular en una de las caras de los dados.

Ejemplo:

Una caja contiene una docena de rosas de las cuales 7 son blancas y 5 son amarillas .Se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento dos rosas. Calcular la probabilidad de que en ambas extracciones se obtengan rosas de color blanco.

Solución:



En el diagrama anterior, se puede apreciar que la primera rosa no es devuelta a la caja, por consiguiente, afecta o altera la probabilidad inicial de ocurrencia de la segunda rosa; por tal motivo, **los eventos son dependientes**.

Evento "A": Obtener rosa blanca en la primera extracción

Evento "B": Obtener rosa blanca en la segunda extracción

Los eventos "A" y "B" son dependientes

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A) = \frac{7}{12}, \quad P(B/A) = \frac{6}{11}$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \implies P(A \cap B) = \frac{42}{132}$$

$$P(A \cap B) = 0,3182$$

5. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Hasta ahora, los planteamientos y cálculos de probabilidad realizados han sido directos y sencillos; pero en ocasiones se presentan situaciones e interrogantes como: en lanzamiento de un par de dados, ¿cuál sería la probabilidad de que la sumas de las caras de los dados sea igual a 11, si en el primer dado aparece la cara número cinco (5)?



Tomado de Gonick y Smith (2002)

Observe que la probabilidad pedida en la interrogante está sujeta a la ocurrencia previa de un evento. En este caso, el segundo evento que pide que la suma de las dos caras sea igual a once (11), depende de que en el primer dado resulte la cara cinco (5); es decir, que depende o se condiciona a la probabilidad del primer evento. A este tipo de probabilidad se le conoce con el nombre de **probabilidad condicional**. Su notación es $P(2^{\circ} \text{ evento} / 1^{\circ} \text{ evento})$, y se lee: probabilidad de que ocurra el segundo evento, si se sabe (con la condición, sujeto a) que el primer evento ya ha acontecido.

Su ecuación para el cálculo, viene dada por:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

\downarrow (from $P(B/A)$)
Probabilidad Condicional del evento B con la previa ocurrencia del evento A. O probabilidad dependiente de B con A

\rightarrow (from $P(B \cap A)$)
Probabilidad Conjunta de los eventos A y B

\rightarrow (from $P(A)$)
Probabilidad Marginal del evento A

Con $P(A) \neq 0$

Ejemplo: Solución al caso planteado de los dados

Se pide calcular la probabilidad de obtener una suma igual a 11 en las caras de dos dados lanzados, con la condición de que la cara del primer dado lanzado haya sido la que tiene el número cinco. Los sucesos o eventos son:

$$P(\text{suma} = 11 / \text{cara } 5 \text{ en } 1^{\circ} \text{ dado}) = ?$$

evento A: cara 5 en primer dado

evento B: suma de las caras = 11

La **Ecuación** es:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

El **Espacio Muestral** es el siguiente:

Posibles sumas de las caras	Suman 2:	(1,1)	
	Suman 3:	(1,2), (2,1)	
	Suman 4:	(1,3), (3,1), (2,2)	
	Suman 5:	(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)	
	Suman 6:	(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)	
	Suman 7:	(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)	
	Suman 8:	(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)	
	Suman 9:	(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)	
	Suman 10:	(4,6), (6,4), (5,5)	
	Suman 11:	(5,6), (6,5)	<p>La suma de sus caras es 11 (2 casos de 36)</p>
	Suman 12:	(6,6)	

Evento A primera cara es 5 (6 casos de 36)

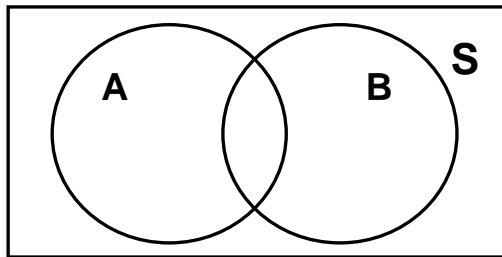
$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

$$P(B/A) = 0,1667$$

5.1. Definición de Probabilidad Condicional

Es la probabilidad de ocurrencia de un evento o suceso cualquiera, que depende completamente de otro acontecimiento que haya sucedido previamente y que se encuentre dentro del mismo espacio muestral.

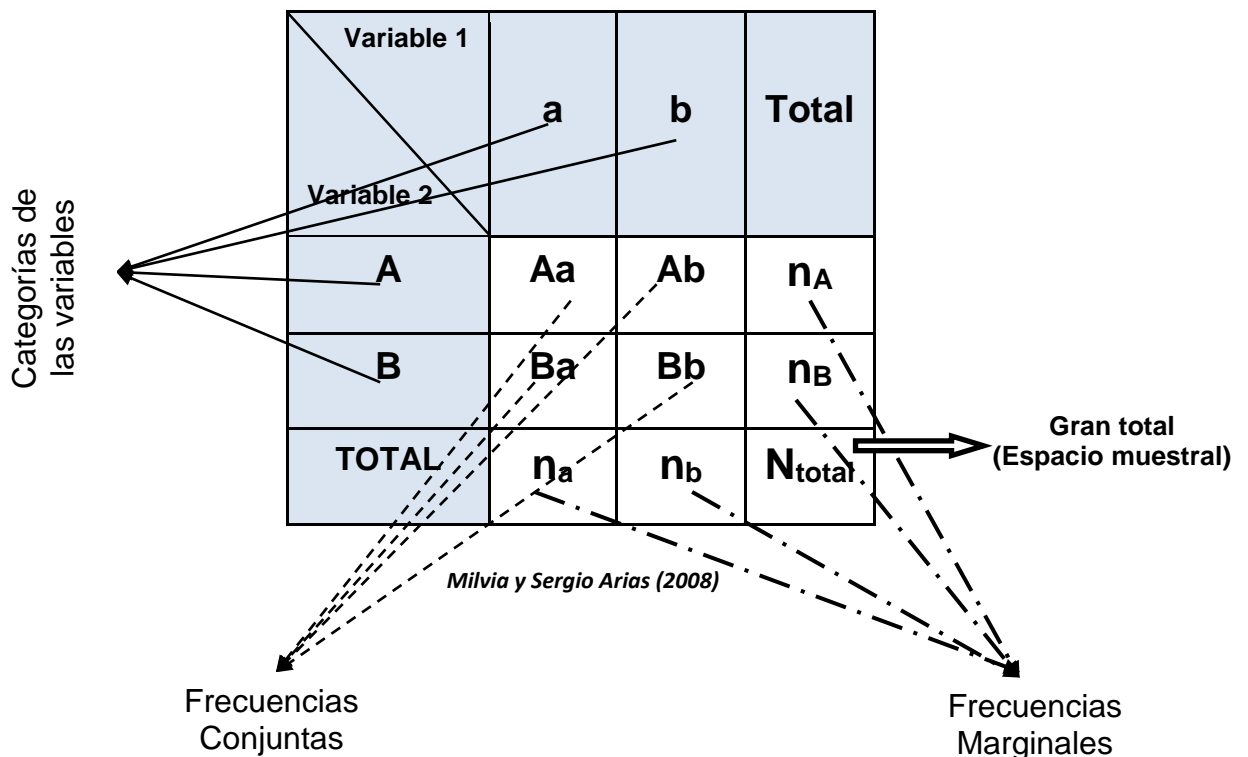
La probabilidad condicional puede ilustrarse mediante un Diagrama de Venn como se muestra en la figura a continuación:



5.2. Probabilidad Condicional y Tablas de Contingencia

Se consideran tablas de contingencia, a aquellas tablas cruzadas o de doble entrada que muestran las frecuencias observadas de una muestra. Cuando la tabla tiene “h” filas y “k” columnas, se llama tabla de contingencia de $h \times k$.

Las frecuencias en cada casilla son llamadas frecuencias bidimensionales o conjuntas y el total de frecuencias en cada fila o columna es llamada frecuencia marginal. A continuación se muestra una tabla de contingencia con sus respectivos componentes y detalles.



De este modo, la probabilidad condicional viene dada por la siguiente relación

$$\frac{\text{frecuencias conjuntas}}{\text{frecuencias marginales}} = \text{Probabilidad Condicional}$$

En la tabla anterior, las **frecuencias conjuntas**, se les llama de esta manera porque presentan las características de las dos variables en estudio, es decir, poseen caracteres tanto de la variable 1 como de la variable 2. En cambio, las **frecuencias marginales**, son subtotales de las categorías de las variables; por eso, se ubican al margen de la tabla y operan como espacios muestrales reducidos. En sí, son el total de elementos de cualquier categoría de cualquiera de las variables.

Las tablas de contingencia facilitan el cálculo de probabilidades condicionales, ya que con simple inspección, se pueden determinar probabilidades mediante la aplicación de la definición clásica de probabilidad de Laplace.

Ejemplo:

Cierta investigación realizada en la Universidad de Los Andes Táchira sobre la relación existente entre las variables vivir en pareja y publicar artículos en revistas o publicar textos por parte del cuerpo docente, arrojó los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

	Pareja	SI	NO	TOTAL
Publica				
Revistas		15	7	22
Textos		5	3	8
TOTAL		20	10	30

Viven en pareja y Publican textos ←

→ Viven en pareja

Si se selecciona aleatoriamente un docente, determine: a) ¿Cuál es la probabilidad de que publique textos dado que vive en pareja? b) ¿Cuál es la probabilidad de que no viva en pareja, si publica revistas? c) ¿Cuál es la probabilidad de que un docente no viva en pareja?

Parte a) Se debe calcular una probabilidad condicional:

$$P(\text{textos} / \text{si pareja}) = ?$$

$$P(\text{textos} / \text{si pareja}) = \frac{\text{si pareja} \cap \text{textos}}{\text{si pareja}}$$

En la ecuación anterior, se sustituyen las frecuencias de la tabla de contingencia que correspondan: 5 viven en pareja y publican textos, 20 viven en pareja.

$$P(\text{textos} / \text{si pareja}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{textos} / \text{si pareja}) = 0,25$$

De igual manera, se puede resolver si se utilizan directamente los espacios muestrales reducidos

$$P(\text{textos} / \text{si pareja}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Así mismo, se le puede asignar letras a los eventos (A, B,....) para reemplazarlas en la ecuación:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Parte b) $P(\text{no pareja} / \text{revistas}) = ?$

$$P(\text{no pareja} / \text{revistas}) = \frac{\text{revistas} \cap \text{no pareja}}{\text{revistas}}$$

$$P(\text{no pareja} / \text{revistas}) = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{22}{30}} = \frac{7}{22}$$

$$P(\text{no pareja} / \text{revistas}) = 0,3182$$

Parte c) En este caso no se pide una probabilidad condicional, sólo se solicita calcular una probabilidad sencilla.

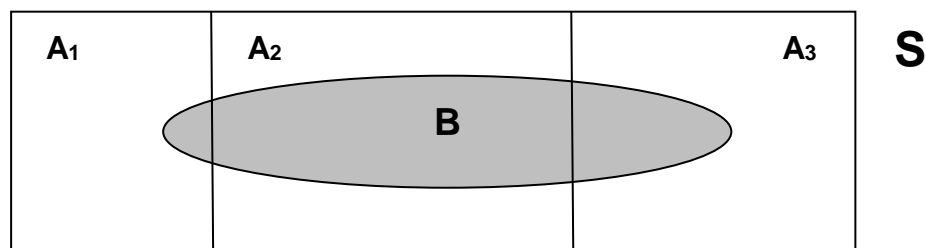
$$P(\text{no viva en pareja}) = ?$$

En esta parte el numerador será la frecuencia marginal de no vivir en pareja, y el denominador será el gran total:

$$P(\text{no viva en pareja}) = \frac{10}{30} = 0,3333$$

6. PROBABILIDAD TOTAL

Considérese un conjunto “S” que representa un espacio muestral de un hecho o fenómeno cualquiera. Donde dicho espacio muestral está dividido en A_n particiones o subconjuntos mutuamente excluyentes. Suponga que existe un evento “B” que también es subconjunto del espacio muestral “S”, y que posee elementos que son comunes para al menos uno (1) de los subconjuntos A_n . Como se ilustra a continuación.



En este Diagrama de Venn que ilustra la situación, se observa que el espacio muestral “**S**” está constituido por la unión de tres subconjuntos que son: A_1 , A_2 y A_3 , donde además, estos son mutuamente excluyentes, es decir:

$$A_1 \subset S \wedge A_2 \subset S \wedge A_3 \subset S$$

Por lo tanto: $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Por teoría de conjuntos se tiene: $B = B \cap S \Rightarrow B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Por propiedad distributiva queda: $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$

Como los eventos A_i son mutuamente excluyentes, la probabilidad de **B** queda:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

Por el teorema del producto para la probabilidad condicional:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

La **probabilidad total** del evento **B** queda definida por:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

6.1. Definición de Probabilidad Total

Si un evento **B** del espacio muestral **S**, se encuentra contenido o no en subconjuntos disjuntos (mutuamente excluyentes) cuya unión conforman el espacio muestral **S**; se conoce como probabilidad total del evento **B**, a la suma de todas probabilidades condicionales que involucran a dicho suceso **B**.

Milvia y Sergio Arias (2008)

Ejemplo:

Se aplicó una encuesta para recabar información sobre un estudio del grado de aceptación de cierto producto que recientemente ingreso al mercado para su consumo. Según la muestra seleccionada, se determinó que el 30% de los encuestados son casados, de los cuales un 65% son mujeres; así mismo, el 50% de los encuestados son solteros, de los cuales 80% son hombres; y el resto de los informantes son separados de sus parejas donde el 75% pertenece al género femenino. Si se selecciona una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea una mujer?

$$P(\text{mujer}) = ?$$

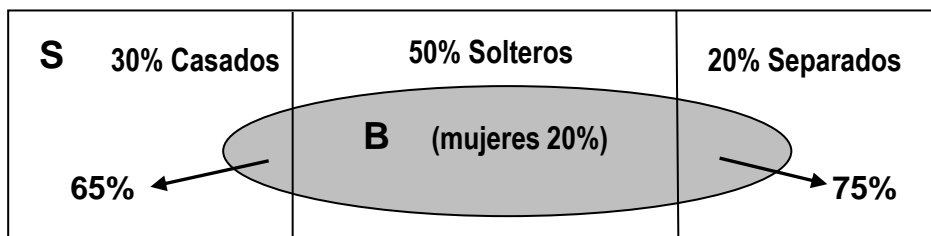
$$P(m) = P(C)P(m/C) + P(S)P(m/S) + P(S_e)P(m/S_e)$$

$$P(m) = (0,3)(0,65) + (0,5)(0,2) + (0,2)(0,75)$$

$$P(m) = 0,195 + 0,1 + 0,15$$

$$P(\text{mujer}) = 0,445$$

El ejercicio se puede ilustrar de manera sencilla en el siguiente diagrama de Venn:



Milvia y Sergio Arias (2008)

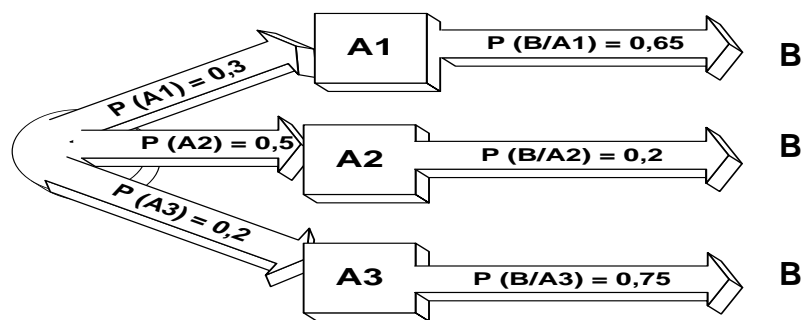
En realidad se trata de calcular la probabilidad de todas las posibles formas en que se pueda seleccionar a una persona que sea mujer (en este caso).

Además se puede recurrir a cualquier herramienta o artificio matemático que posea lógica.

6.2. Probabilidad Total y Árboles de Decisión

Los **árboles de decisión** son diagramas o esquemas que se emplean para poder detallar todos los posibles espectros de una secuencia de eventos de un experimento aleatorio, tal que, cada evento pueda suceder de una infinidad de maneras. Lipschutz y Schiller (2000).

El árbol de decisión para el ejemplo anterior sería:



Elaboración propia

Al seguir las direcciones de las flecha, para multiplicar las probabilidades que se van encontrando (en este caso hay tres), y luego sumar el total de direcciones, se obtiene la probabilidad total del evento o suceso **B**, tal y como se muestra:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

$$P(m) = P(C)P(m/C) + P(S)P(m/S) + P(S_e)P(m/S_e)$$

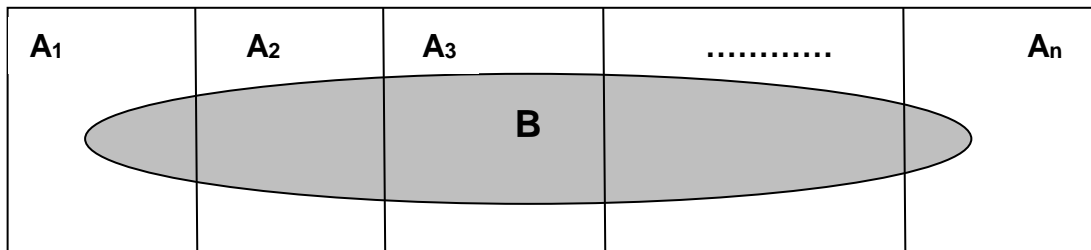
$$P(m) = 0,195 + 0,1 + 0,15 = 0,445$$

7. TEOREMA de BAYES



Thomas Bayes (1702 – 1761). Fue un matemático nacido en Inglaterra, entre sus estudios se encuentra el problema de determinar la probabilidad de las causas mediante las consecuencias observadas.

El teorema promulgado por Bayes y que lleva su nombre, se refiere a la probabilidad de que suceda un evento condicionado por la ocurrencia de otro evento. Se parte del hecho de presentarse situaciones como la mostrada en el siguiente Diagrama de Venn:



Donde se tiene una serie de eventos mutuamente excluyentes (ninguno de ellos puede ocurrir simultáneamente) A_n que forman un espacio muestral " S ", y un evento " B " que se traslapa parcialmente sobre dicho espacio muestral y cuya probabilidad de ocurrencia está subordinada a que ocurra al menos de uno de los eventos del espacio muestral (al menos uno de los A_i). En otras palabras, se asume que el evento B que se superpone parcialmente sobre los eventos mutuamente excluyentes del espacio muestral, ya aconteció; y lo que se desea es saber la probabilidad de que el evento traslapado pertenezca a una de las partes A_n .

El teorema de Bayes se aplica utilizando la siguiente ecuación:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \dots + P(A_n)P(B / A_n)}$$

ó

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B / A_i)}$$

ó

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\text{probabilidad Total}(B)}$$

Donde:

$P(A_i)$: *probabilidades a priori*

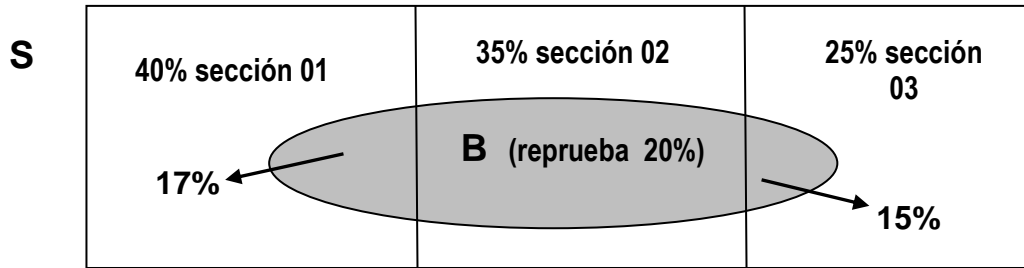
$P(A_i / B)$: *probabilidad a posteriori*

$$\sum_{i=1}^n P(A_i / B) = 1$$

Ejemplo:

En la Carrera de Administración de la Universidad de Los Andes Táchira, la cátedra de Estadística II es dictada por tres docentes diferentes en tres secciones diferentes. Por análisis previos, se sabe que la probabilidad de que un estudiante inscriba la asignatura en la sección 01 es de 40%, en la sección 02 es de 35% y en la sección 03 es 25%. Además, se conoce que los alumnos en la sección 01 al finalizar el semestre, 17% reprueba dicha asignatura; en la sección 02 aprueba un 80% y en la sección 03 el 85% la aprueba. Si se selecciona aleatoriamente un estudiante y resulta estar reprobado, ¿cuál es la probabilidad de que este alumno se haya elegido de la sección 03?

Por la interrogante del problema, paradójicamente pareciera que primero se escoge el estudiante y luego la sección. En realidad, se trata de una situación donde aleatoriamente y sin enumerar se ha elegido una sección, de la cual, se elige el estudiante y resulta estar reprobado.



$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \dots + P(A_n)P(B / A_n)}$$

$$P(03 / R) = \frac{P(03)P(R / 03)}{P(01)P(R / 01) + P(02)P(R / 02) + P(03)P(R / 03)}$$

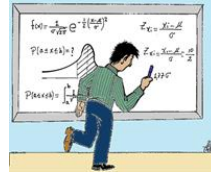
$$P(03 / R) = \frac{(0,25)(0,15)}{(0,4)(0,17) + (0,35)(0,2) + (0,25)(0,15)}$$

$$P(03 / R) = \frac{0,0375}{0,068 + 0,07 + 0,0375}$$

$$P(03 / R) = \frac{0,0375}{0,1755} = 0,2137$$

⇒ Probabilidad de que el estudiante reprobado haya sido seleccionado de la sección 03

8. EJERCICIOS RESUELTOS

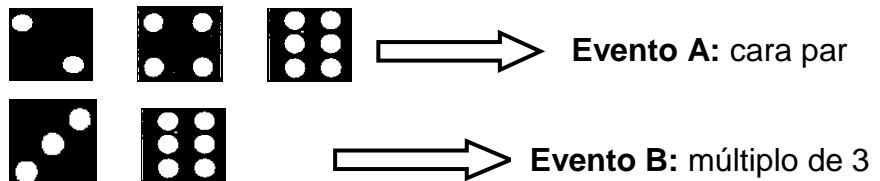


8.1 Se lanza un dado legal. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la cara que cae hacia arriba sea par y múltiplo de tres (3)?

Solución:

Como los múltiplos de tres pueden ser pares, y se tienen dos condiciones donde la segunda está afectada por la primera, los eventos son dependientes.

Eventos $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A:} \text{ cara de un número par} \\ \mathbf{B:} \text{ cara con un múltiplo de tres (3)} \end{array} \right.$



Estos eventos **son dependientes**. Ya que exige la condición de que la cara par debe ser múltiplo de 3, lo cual indica que los dos eventos están ligados por dicha circunstancia. En otras palabras, el evento de ser múltiplo de 3, está sujeto a la probabilidad de que la cara sea par.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A) = \frac{3}{6} \quad P(B/A) = \frac{1}{3} \left(\text{sólo un caso de los tres pares es } \dot{3} \right)$$

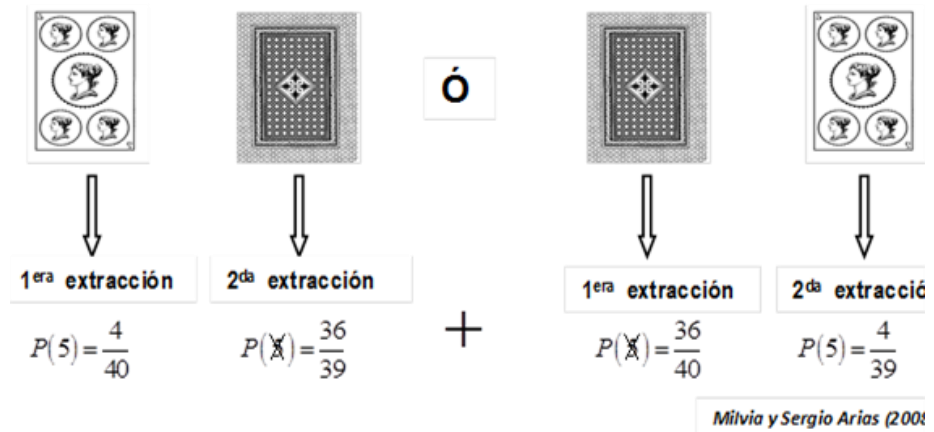
$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = 0,1667$$

8.2 Se extraen dos cartas de una baraja española. Calcular la probabilidad de que una de las cartas sea un cinco.

Solución:

El ejercicio se puede resolver aplicando los teoremas o no aplicándolos. Se debe tener cuidado con el hecho de que son dos extracciones y se requiere obtener un cinco sin que importe el resultado de la extracción. Entonces, se deben considerar todas las posibles formas en que pueda aparecer la cara cinco.



Se puede observar que se presentan dos posibilidades en cuanto a la forma en que se puede extraer una carta con el número 5. Por lo tanto, se suman esos dos sucesos.

Eventos $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A:} \text{ sale 5 en la primera extracción} \\ \mathbf{B:} \text{ sale 5 en la segunda extracción} \end{array} \right.$

Pero los eventos “A” y “B” internamente tienen dos eventos

A: (5 en la 1^{era}). (NO 5 en la 2^{da})

B: (NO 5 en la 1^{era}). (5 en la 2^{da})

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39}, \quad P(B) = \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39} + \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39}$$

$$P(A \cup B) = \frac{144}{1560} + \frac{144}{1560} = \frac{288}{1560}$$

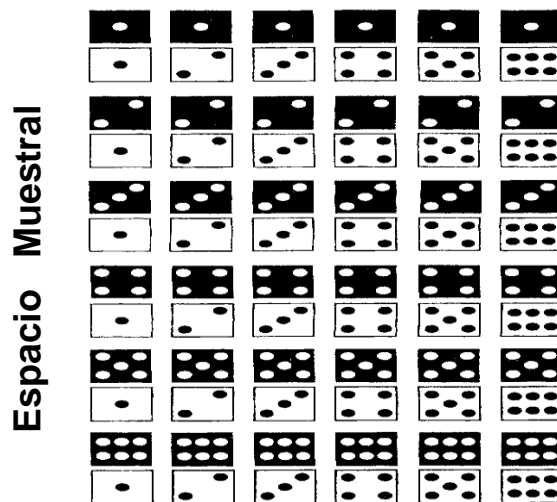
$$P(A \cup B) = 0,1846$$

- 8.3** Se lanzan un par de dados legales. Calcular la probabilidad de que la suma de las caras que caen hacia arriba sea mayor que cuatro pero menor que ocho.

Solución:


El espacio muestral $S = 6^n = 6^2 = 36$

Mediante un Diagrama de Euler se tiene cada punto de **S**



Tomado de Gonick y Smith (2002)

Posibles sumas de las caras	Suman 2:	(1,1)
	Suman 3:	(1,2), (2,1)
	Suman 4:	(1,3), (3,1), (2,2)
	Suman 5:	(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)
	Suman 6:	(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)
	Suman 7:	(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)
	Suman 8:	(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)
	Suman 9:	(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)
	Suman 10:	(4,6), (6,4), (5,5)
	Suman 11:	(5,6), (6,5)
	Suman 12:	(6,6)

$$4 < \text{suma} < 8 = 5, 6, 7$$


Evento "A": Suman 5 + Suman 6 + Suman 7

Suman 5: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)

Suman 6: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)

Suman 7: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)

En total 15 casos cumplen con la condición de la desigualdad, y son los anteriores. Por lo tanto, su probabilidad será igual a:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{casos a favor del evento}}{\text{total de casos } (S)}$$

$$P(4 < \text{suma} < 8) = \frac{15}{36}$$

$P(4 < \text{suma} < 8) = 0,4167$

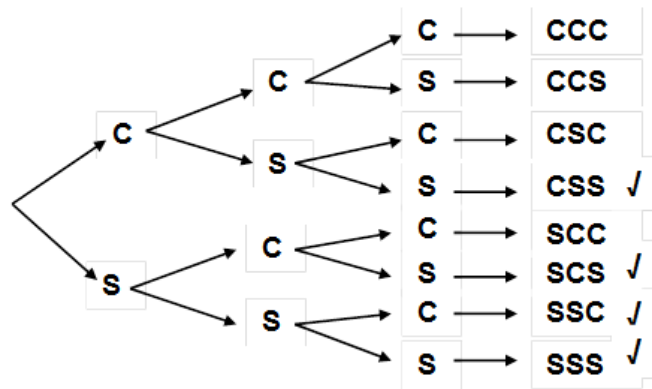
8.4 Se lanzan tres monedas no cargadas (legales). ¿Cuál es la probabilidad de obtener más sellos que caras?



Solución:

Espacio Muestral $S = 2^n = 2^3 = 8$

Mediante un Diagrama de Árbol se tiene:



Evento “**A**”: Obtener más sellos que caras

En total cuatro (4) casos cumplen con la condición de que se obtenga mayor cantidad de sellos que caras, por lo tanto, la probabilidad pedida se calcula mediante la ecuación:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{casos a favor del evento}}{\text{total de casos } (S)}$$

$$P(\text{sellos} > \text{caras}) = \frac{4}{8}$$

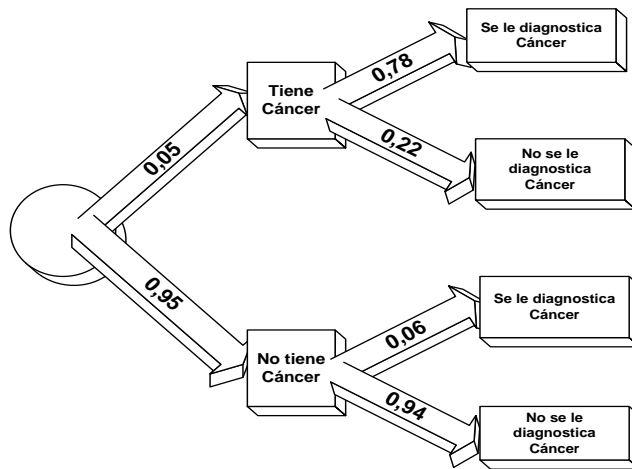
$$P(\text{sellos} > \text{caras}) = 0,5$$

8.5 En cierta región del país se sabe por experiencia del pasado que la probabilidad de seleccionar un adulto mayor de 40 años de edad con cáncer es 0.05. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique de forma correcta que una persona con cáncer tiene la enfermedad es

0.78 y la probabilidad de que diagnostique de forma incorrecta que una persona sin cáncer como si tuviera la enfermedad es 0.06. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona se le diagnostique cáncer? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona a la que se le diagnostica cáncer realmente tenga la enfermedad?

Solución:

Se construye un árbol de decisión que ilustre la situación



Parte a) Probabilidad de que a una persona se le diagnostique cáncer

$$P(\text{diagnosticar cáncer}) = (0,05)(0,78) + (0,95)(0,06)$$

$$P(\text{diagnosticar cáncer}) = 0,039 + 0,057$$

$$P(\text{diagnosticar cáncer}) = 0,096$$

Parte b) Probabilidad de que a una persona se le diagnostique cáncer sí realmente tiene cáncer

$$P(\text{diagnosticar cáncer si lo tiene}) = (0,05)(0,78)$$

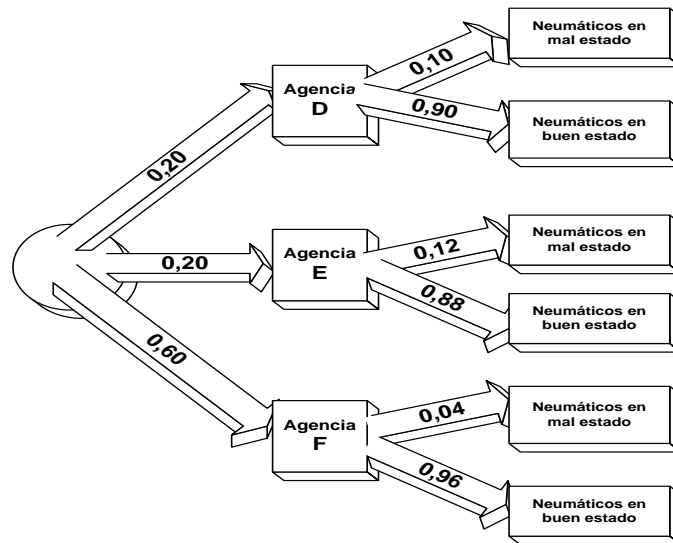
$$P(\text{diagnosticar cáncer si lo tiene}) = 0,039$$

8.6 Una empresa alquila autos de 3 agencias: 20% de la agencia D, 20% de la agencia E y 60% de la agencia F. Si 10% de los autos de la

agencia D, 12% de los provenientes de E y 4% de los autos de F tienen neumáticos en mal estado. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa contrate un auto con neumáticos en mal estado? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que un auto con neumáticos en mal estado rentado por la empresa provenga de la agencia F?

Solución:

Se construye un árbol de decisión que ilustre la situación



Parte a) Probabilidad de contratar un auto con neumáticos en mal estado

$$P(\text{contratar auto con neumáticos mal}) = (0,2)(0,1) + (0,2)(0,12) + (0,6)(0,04)$$

$$P(\text{contratar auto con neumáticos mal}) = 0,02 + 0,024 + 0,024$$

$$P(\text{contratar auto con neumáticos mal}) = 0,068$$

Parte b) Probabilidad de que un auto con neumáticos en mal estado provenga de la agencia F

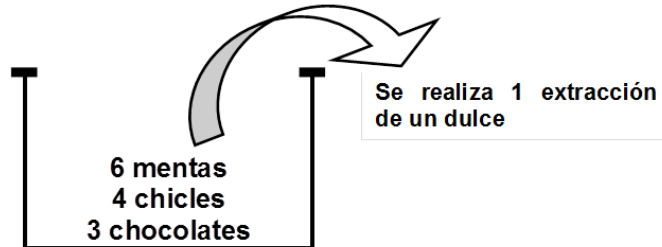
$$P(F / \text{neumáticos mal}) = \frac{(0,06)(0,04)}{(0,2)(0,1) + (0,2)(0,12) + (0,6)(0,04)}$$

$$P(F / \text{neumáticos mal}) = \frac{0,024}{0,068}$$

$$P(F / \text{neumáticos mal}) = 0,035$$

- 8.7 Un surtido de dulces contiene 6 mentas, 4 chicles y 3 chocolates. Si una persona saca uno de los dulces en forma aleatoria, hallar la probabilidad de sacar **a)** una menta; **b)** un chicle o un chocolate.

Solución:



Parte a) Probabilidad de obtener una menta

$$P(\text{menta}) = \frac{\text{casos favorables de menta}}{\text{total de dulces}}$$

$$P(\text{menta}) = \frac{6}{13} = 0,4615$$

Parte b) Probabilidad de obtener un chicle o un chocolate

$$P(\text{chicle o chocolate}) = P(\text{chicle}) + P(\text{chocolate})$$

$$P(\text{chicle o chocolate}) = \frac{4}{13} + \frac{3}{13} = \frac{7}{13} = 0,5385$$

- 8.8 En una mano de póker de cinco cartas, hallar la probabilidad de tener 2 ases y 3 sietes.

Solución: Se trata de una mano de cinco (5) cartas. Pero no se indica en que forma y cómo se reparten. Por lo tanto, sólo se asumen las posibilidades de obtener dos (2) ases y tres (3) sietes de cualquier forma

La baraja de póker tiene 4 ases y 4 sietes

$$\text{Formas de recibir dos ases} = \binom{4}{2}$$

$$\text{Formas de recibir tres sietes} = \binom{4}{3}$$

$$\text{Formas total de recibir cinco cartas} = \binom{52}{5}$$

$$P(2 \text{ ases y } 3 \text{ sietes}) = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(2 \text{ ases y } 3 \text{ sietes}) = \frac{24}{2.598.960} 0,000009234$$

Evento A: Obtener un número par \rightarrow 3 casos

8.9 Al lanzar un dado, usted apuesta \$1000 a que el número obtenido debe ser par o divisible por 3. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Solución:

$$\text{Espacio muestral: } \{ \mathbf{S} = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} = 6$$

Evento A: Obtener un número par \rightarrow 3 casos

Evento B: Obtener un número divisible por 3 \rightarrow 2 casos

Los eventos A y B, son no mutuamente excluyentes, pues su intersección es diferente al conjunto vacío, puesto que el valor 6 cumple con las características de los dos eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = 0,6667$$

La probabilidad de ganar es igual a **0,6667**

- 8.10** Al lanzar un dado, usted apuesta \$1000 a que el número obtenido debe ser par o divisible por 2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$

Evento A: Obtener un número par \rightarrow 3 casos

Un teorema demostrado en algebra es que todo número par es divisible por dos.

$$\forall k \in R \text{ se tiene que } 2(k+1) \text{ es divisible por } 2$$

Por lo tanto, los dos eventos: que sea par o divisible por dos, son los mismos eventos, es decir, sus elementos son idénticos.

$$P(\text{par o divisible por } 2) = \frac{3}{6} = 0,5$$

La probabilidad de ganar es igual a **0,5**

- 8.11** Un inspector de edificios debe revisar la instalación eléctrica de un nuevo edificio de departamentos el lunes, martes, miércoles o jueves, a las 8 a.m., 1 p.m. o 2 p.m. ¿De cuántas formas distintas puede ocurrir la inspección de la instalación?

Solución: Se aplica el principio multiplicativo de las técnicas de conteo

Días: Lunes, martes, miércoles y jueves = 4 (n)

Horarios: 8 AM, 1 PM y 2 PM = 3 (m)

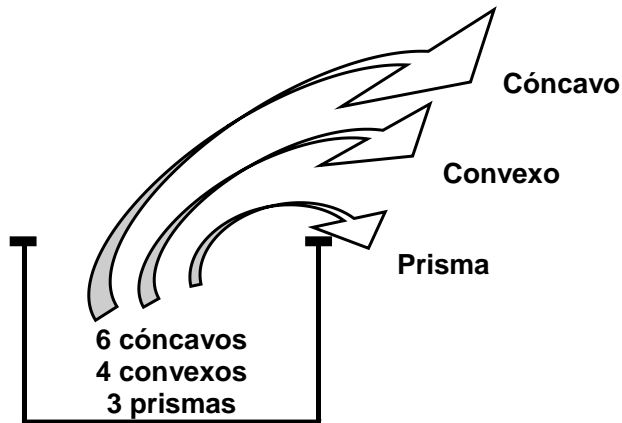
Resultado: $n.m = (4)(3) = 12$ formas diferentes de realizar la inspección, como se observa en la siguiente tabla

DIA	HORA	ARREGLO
Lunes	8 AM	Lunes 8 AM
	1 PM	Lunes 1 PM
	2 PM	Lunes 2PM
Martes	8 AM	Martes 8 AM
	1 PM	Martes 1 PM
	2 PM	Martes 2 PM
Miércoles	8 AM	Miércoles 8 AM
	1 PM	Miércoles 1 PM
	2 PM	Miércoles 2 PM
Jueves	8 AM	Jueves 8 AM
	1 PM	Jueves 1 PM
	2 PM	Jueves 2 PM
TOTAL		12 ARREGLOS

Se pueden realizar **12 arreglos**

- 8.12** En un estuche de instrumentos de óptica hay 6 lentes cóncavos, 4 convexos y 3 prismas. ¿En cuántas diferentes formas puedes elegir uno de los lentes cóncavos, uno de los convexos y uno de los prismas?

Solución: Se aplica el principio multiplicativo de las técnicas de conteo. Además, no se indica un orden específico, por lo tanto, se multiplican entre sí las formas de obtención.



Arreglos = $6.4.3 = 72$ **formas** diferentes de elegir los elementos

8.13 Si hay 9 autos en una carrera, ¿en cuántas formas diferentes pueden ocupar el primero, segundo y tercer lugar?

Solución: Dado que un ganador puede darse de nueve maneras, un segundo lugar de ocho maneras y un tercer lugar se puede dar de siete maneras, se tiene que:

$$formas = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = (9)(8)(7) = 504$$

Las posiciones de 1º, 2º y 3º lugar se pueden dar de **504 formas** diferentes

8.14 Un cuestionario consta de 8 preguntas, cada una de las cuales puede responderse en tres formas distintas. ¿En cuántas formas diferentes puede una persona contestar las 8 preguntas del cuestionario?

Solución: Dado que cada pregunta puede responderse de tres formas distintas, se tiene que:

$$\text{formas} : n = 3^8 = 6.561$$

Una persona puede responder de **6.561 formas** diferentes el cuestionario

- 8.15** En una caja de cartón hay 12 baterías de las cuales 1 es defectuosa. ¿En cuántas formas puede elegir un inspector 3 de las baterías y obtener: a) la defectuosa?; b) ¿ninguna defectuosa?

Parte a)

Solución: Como sólo hay una batería defectuosa y once no defectuosa queda:

$$n = \binom{1}{1} \binom{11}{2} = 55$$

Formas de elegir una defectuosa

Formas de elegir las defectuosas

Existen **55 maneras** diferentes de elegir la batería defectuosa al tomar tres baterías

Parte b)

Solución: En la muestra no se eligen baterías defectuosas

$$n = \binom{11}{3} = 165$$

Existen **165 maneras** diferentes de elegir 3 baterías y que ninguna sea defectuosa.

- 8.16** En una caja de cartón hay 12 baterías de las cuales 2 son defectuosas. ¿En cuántas formas puede escoger un inspector 3 de las baterías y obtener: a) ninguna batería defectuosa?; b) ¿una defectuosa?; c) ¿las tres defectuosas?

Parte a)

Solución:

$$n = \binom{10}{3} = 120$$

Existen **120 maneras** diferentes de elegir 3 baterías y que ninguna sea defectuosa.

Parte b)

Solución:

$$n = \binom{2}{1} \binom{10}{2} = 2(45) = 90$$

Existen **90 maneras** diferentes de elegir 3 baterías y que una sea defectuosa.

Parte c)

Solución: Es un evento imposible, puesto que en la caja sólo existen 2 baterías defectuosas.

- 8.17** Una tienda de artículos electrodomésticos posee en existencia 8 clases de refrigeradores, 6 tipos de lavadoras y 5 clases de hornos microondas. ¿En cuántas formas diferentes pueden elegirse 2 artículos de cada clase para una promoción?

Solución:

$$n = \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{5}{2} = (28)(15)(10) = 4.200$$

Los electrodomésticos se pueden elegir de **4.200 maneras** diferentes para la promoción.

- 8.18** Una muestra aleatoria de 200 adultos se clasifica por sexo y nivel de educación como se muestra en el siguiente cuadro

Educación	Hombre	Mujer	Total
Primaria	38	45	83
Secundaria	28	50	78
Universitaria	22	17	39
Total	88	112	200

Si se escoge una persona al azar de este grupo, encuentre la probabilidad de que: **a)** la persona sea hombre, dado que la persona tiene educación secundaria: **b)** la persona no tiene un grado universitario, dado que la persona es mujer.

Solución: En este caso los eventos no son independientes, puesto que las probabilidades conjuntas no son iguales al producto de las marginales. Los cálculos solicitados en las interrogantes a y b, se pueden obtener directamente de la tabla de contingencia.

Parte a)

$$P(\text{Hombre} / \text{secundaria}) = ? \rightarrow \text{probabilidad condicional}$$

$$P(\text{Hombre} / \text{secundaria}) = \frac{P(\text{Hombre} \cap \text{secundaria})}{P(\text{secundaria})}$$

$$P(\text{Hombre} / \text{secundaria}) = \frac{\frac{28}{200}}{\frac{78}{200}} = \frac{28}{78}$$

$P(\text{Hombre} / \text{secundaria}) = 0,3590$

Parte b)

$P(\text{no universitario} / \text{mujer}) = ? \rightarrow \text{probabilidad condicional}$

$$P(\text{no universitario} / \text{mujer}) = \frac{P(\text{no universitario} \cap \text{mujer})}{P(\text{mujer})}$$

$$P(\text{no universitario} / \text{mujer}) = \frac{\frac{45+50}{200}}{\frac{112}{200}} = \frac{95}{112}$$

$$P(\text{no universitario} / \text{mujer}) = 0,8482$$

- 8.19** En USA Today (5 de septiembre de 1996) se listaron como sigue los resultados de una encuesta sobre el uso de ropa para dormir mientras se viaja

	Hombre	Mujer	Total
Ropa interior	0.220	0.024	0.244
Camisón	0.002	0.180	0.182
Nada	0.160	0.018	0.178
Pijamas	0.102	0.073	0.175
Camiseta	0.046	0.088	0.134
Otros	0.084	0.003	0.087

- ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero sea una mujer que duerme desnuda?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero sea hombre
- ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero sea hombre si duerme en pijama o camiseta?

Solución: En este caso los eventos no son independientes, puesto que las probabilidades conjuntas no son iguales al producto de las marginales. Los cálculos solicitados en las interrogantes a, b y c

se pueden obtener directamente de la tabla de contingencia.

	Hombre	Mujer	Total
Ropa interior	0,220	0,024	0,244
Camisón	0,002	0,180	0,182
Nada	0,160	0,018	0,178
Pijamas	0,102	0,073	0,175
Camiseta	0,046	0,088	0,134
Otros	0,084	0,003	0,087
Total	0,614	0,386	1

Diagrama de la tabla de contingencia con anotaciones:

- Una línea punteada rodea los valores de las celdas de la tabla, etiquetada como "Probabilidades conjuntas".
- Una línea sólida rodea los valores de la fila "Total" y la columna "Total", etiquetada como "Probabilidades marginales".

Parte a)

Solución:

$$P(\text{mujer y duerme desnuda}) = ? \rightarrow \text{probabilidad conjunta}$$

Este valor se ubica directamente en las probabilidades conjuntas de la tabla

$$P(\text{mujer y duerme desnuda}) = 0,018$$

Parte b)

Solución:

$$P(\text{Hombre}) = ? \rightarrow \text{probabilidad marginal}$$

Este valor se ubica directamente en las probabilidades marginales de la tabla

$$P(\text{Hombre}) = 0,614$$

Parte c)

Solución:

$$P(\text{Hombre} / \text{pijama o camiseta}) = ? \rightarrow \text{probabilidad condicional}$$

Este valor se debe calcular tomando las probabilidades conjuntas y marginales de la tabla

$$P(\text{Hombre} / \text{pijama o camiseta}) = \frac{P[\text{Hombre} \cap (\text{pijama} \cup \text{camiseta})]}{P(\text{pijama} \cup \text{camiseta})}$$

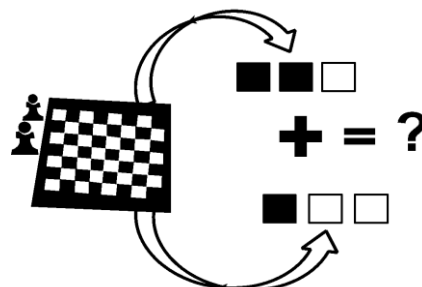
$$P(\text{Hombre} / \text{pijama o camiseta}) = \frac{0,102 + 0,046}{0,175 + 0,134}$$

$$P(\text{Hombre} / \text{pijama o camiseta}) = \frac{0,148}{0,309}$$

$$P(\text{Hombre} / \text{pijama o camiseta}) = 0,478964 \cong 0,4790$$

- 8.20** Peoncio Alfil Torres Reyes escoge tres cuadros de un tablero de ajedrez al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dos cuadros sean de un color y un cuadro sea del otro color?

Solución: La situación es la siguiente



Se deben considerar los siguientes aspectos:

- i) Un tablero de ajedrez tiene 64 cuadros en total, por lo tanto, el total de maneras posibles de escoger tres cuadros es:

$${}_{64}C_3 = 41.664 \text{ maneras}$$

- ii) El total de formas de escoger dos cuadros negros y un cuadro blanco es:

$$({}_{32}C_2)({}_{32}C_1) = (496)(32) = 15.872 \text{ maneras}$$

- iii) El total de formas de escoger un cuadro negro y dos cuadros blancos es:

$$({}_{32}C_1)({}_{32}C_2) = (32)(496) = 15.872 \text{ maneras}$$

La probabilidad pedida se calcula de la siguiente forma:

$$P = P(2 \text{ negros y } 1 \text{ blanco}) + P(1 \text{ negro y } 2 \text{ blancos})$$

$$P = \frac{15.872}{41.664} + \frac{15.872}{41.664} = \frac{31.744}{41.664}$$

$$P = 0,7619$$

- 8.21** Armando Thrampash, un chistoso de las reuniones familiares diseñó el siguiente esquema para apostar con sus primos: tomó una caja e introdujo tres bolas negras y dos bolas blancas y la llamó caja uno (1); tomó otra caja e introdujo tres bolas negras y cinco bolas blancas y la llamó caja dos (2). Colocó ambas cajas en un pequeño cuarto a oscuras sobre dos mesas, de tal manera que la probabilidad

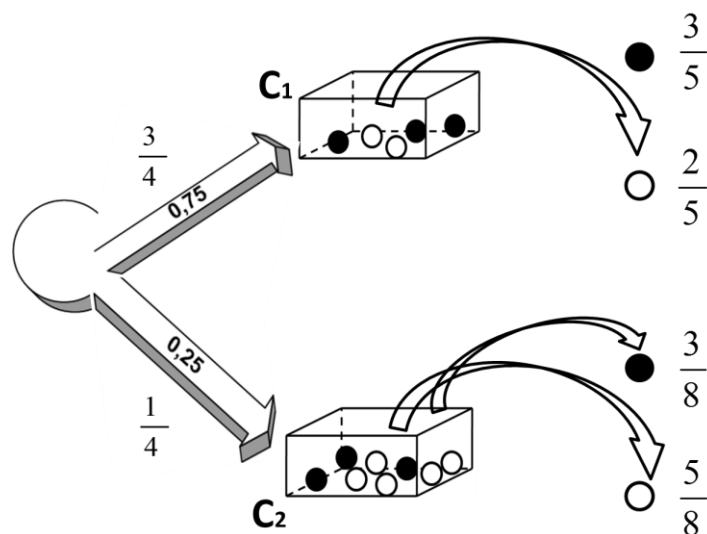
de encontrarse con la caja uno es tres veces mayor que la probabilidad de encontrarse con la caja dos. En un borde de cada mesa pegó una calcomanía fluorescente para poder ubicar las mesas. Invitó a uno de sus primos a que entrara al cuarto y tomara al azar una bola de cualquiera de las cajas y que se guiase por las lucecitas de las calcomanía, al salir él enseñó la bola y fue de color negro; ante lo cual Armando exclamó ¡te apuesto que fue tomada de la caja dos (2) porque la probabilidad de tomarla de allí es mayor que la de la caja uno (1)! Demuestre si Armando tiene razón en lo que afirma, sí se sigue este proceso de extraer bolas de las cajas.

Solución: A continuación se plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para mostrar un esquema que ilustra la situación planteada por Armando:

$$P(C_1) + P(C_2) = 1$$

$$3P(C_2) + P(C_2) = 1$$

$$P(C_2) = \frac{1}{4} \quad \text{Y} \quad P(C_1) = \frac{3}{4}$$



Elaboración propia

Para demostrar lo afirmado por Armando se debe calcular la probabilidad de que la bola negra se haya extraído de la caja uno (1), igualmente calcular la probabilidad de que la bola negra se haya extraído de la caja dos (2); para de este modo verificar al comparar ambas probabilidades.

El ejercicio se resuelve mediante el teorema de Bayes:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \dots + P(A_n)P(B / A_n)}$$

$$P(C_1 / N) = \frac{P(C_1)P(N / C_1)}{P(C_1)P(N / C_1) + P(C_2)P(N / C_2)}$$

$$P(C_1 / N) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{117}{160}} = \frac{144}{234} = 0,6154$$

$$P(C_2 / N) = \frac{P(C_2)P(N / C_2)}{P(C_1)P(N / C_1) + P(C_2)P(N / C_2)}$$

$$P(C_2 / N) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{117}{160}} = \frac{15}{117} = 0,1282$$

Efectivamente la probabilidad de sacar la bola negra de la caja uno (1) es mayor que la probabilidad de sacarla de la caja dos (2). Puesto que **0,6154 > 0,1282**

9. REFLEXIONES



9.1 ¿Qué papel juega la probabilidad en los procesos estadísticos?

El papel que juega la probabilidad en la estadística es de enlace entre lo descriptivo y lo inferencial de los procesos estadísticos. Puesto que la probabilidad proporciona los modelos matemáticos que permiten explicar el comportamiento de hechos y fenómenos que ocurren.

La probabilidad funciona como una herramienta que permite evaluar la confiabilidad de las conclusiones (estimaciones y significancia) respecto a la población objeto de estudio o investigación cuando solo se posee información muestral. Por ejemplo, si tenemos una moneda que no está cargada podemos establecer a priori que la probabilidad de que salga cara o sello es 0,5. Ahora supongamos que no sabemos si está cargada o es legal, en este sentido no se puede concluir a priori que la probabilidad que sea cara o sello sea de 0,5.

El ejemplo anterior muestra que las probabilidades pueden ser usadas de dos formas, cuando se conoce la población (la probabilidad se usa para describir la posibilidad de observar un evento del espacio muestral particular), y cuando se desconoce la población y solo se dispone de una muestra de esa población, entonces se usa la probabilidad para hacer afirmaciones acerca de la composición de la población, es decir, hacer inferencias. En ese sentido se puede decir que la probabilidad funciona como una transición entre la estadística descriptiva y la estadística inferencial.

Otro ejemplo de la transición entre los procesos estadísticos descriptivo e inferencial: Se puede hacer un análisis de regresión lineal o correlación lineal desde un punto de vista descriptivo, se calcula el coeficiente de correlación lineal, se busca la ecuación de regresión de manera descriptiva, modelo de una línea

recta (punto pendiente) si se llega hasta hay es estadística descriptiva. Cuando se va más allá de ese modelo matemático buscar otros valores que no están dentro de los datos que no están recabados, ese modelo generaliza el comportamiento y se inicia todo el concepto de estimaciones y significancia del coeficiente de correlación.

9.2 ¿Siempre la probabilidad es un estado de incertidumbre?

Esto va a depender en **primer lugar**, de la **definición de probabilidad** que se esté manejando, porque si se trata de una probabilidad a priori, esta se puede establecer teóricamente de ante mano si se conoce el espacio muestral; o si se trata de una probabilidad a posteriori, esta se establece luego de conocer lo resultante del hecho o fenómeno.

En **segundo término**, se puede considerar desde el punto de vista del **valor numérico** de la probabilidad, es decir, si lo primordial es saberlo con exactitud, o tener una noción porcentual del mismo.

Como **tercero**, y quizá lo que mayor incidencia tiene es **el azar**, puesto que se debe considerar lo determinístico o estocástico del fenómeno.

10. EJERCICIOS PROPUESTOS



1. Se lanza un par de dados legales. Calcular la probabilidad de: a) que una de sus caras sea un número par. b) Que la segunda cara sea cinco. c) Que la suma de las caras que resultan sea menor que cinco.
2. Una mezcla de dulces contiene 6 mentas, 4 chiclosos y 3 chocolates. Si una persona realiza una selección al azar de uno de ellos, encuéntrese la probabilidad de obtener: a) una menta. b) Un chicloso o un chocolate.
3. La probabilidad de que Filomena Casagrande apruebe matemática es de $\frac{1}{3}$ y la de que apruebe inglés es $\frac{4}{9}$. Si la probabilidad de que apruebe ambas asignaturas es de $\frac{1}{4}$, ¿cuál es la probabilidad de que Filomena apruebe al menos una de ellas?
4. Se seleccionan al azar tres libros de un estante que contiene 5 novelas, 3 libros de poemas y 2 diccionarios, cuál es la probabilidad de que: a) se tome un diccionario. b) se escojan 2 novelas y 1 libro de poemas.
5. Una caja contiene cuatro fichas de color rojo y tres de color azul. Cuando se seleccionan tres de manera aleatoria, cuál es la probabilidad de que todas sean rojas si cada ficha se selecciona: a) con reposición. b) Sin reposición.
6. En un juego con dos dados se gana en la primera tirada si se obtiene una suma igual a 7 u 11, y se pierde si es igual a 2, 3 o 12. Cuál es la probabilidad de que: a) se gane en el primer lanzamiento. b) Se pierda en el primer lanzamiento.
7. Se extraen sin reposición dos cartas de una baraja española. Cuál es la probabilidad de que: a) ambas sean as. b) Que la segunda sea as. c) Que una de ellas sea as.
8. Una caja contiene 5 bolígrafos, 3 plumas y 2 lápices. Calcular la probabilidad de: a) obtener una pluma al efectuar una extracción. b) Obtener una pluma al efectuar dos extracciones. c) Obtener una pluma al efectuar dos extracciones si la primera extracción es devuelta a la caja.
9. Se lanzan dos monedas y dos dados, se gana si se obtienen los mismos resultados en las monedas o en los dados. ¿Cuál es la probabilidad de perder?
10. La máquina tragamonedas de la venta de pollos en brasa ubicada en la avenida Carabobo tiene tres ruedas independientes con 9 frutas diferentes cada una; para ganar y así obtener todo el dinero que contiene dicha máquina un apostador debe lograr las mismas frutas en cada una de las ruedas. Raíza Contra maestra, después de una celebración llega a este sitio y decide jugar. ¿Cuál es la probabilidad de que Raíza gane?
11. En un matrimonio con tres hijos, cuál es la probabilidad de que: a) los tres hijos sean varones. b) Al menos uno sea varón. c) El primero y el último sean varones. d) ninguno sea varón.
12. El curso intensivo de estadística del año 2004 de la Carrera Licenciatura en Economía Social de una Universidad lo integran 57 hembras y 12 varones.

- Si se seleccionan 2 estudiantes de dicho curso, cuál es la probabilidad de que: a) ambos sean del mismo sexo. b) Uno sea hembra.
13. Una caja contiene 5 fichas blancas, 3 rojas y 2 negras. Se extraen dos fichas consecutivamente. Calcular la probabilidad de: a) Que sean del mismo color. b) Que al menos una sea negra.
 14. Se extraen dos cartas de una baraja de 40 cartas. Calcular la probabilidad de: a) que ambas sean ases. b) Que una sea un cinco
 15. Se lanza un par de dados. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus caras sea menor que 5? b) ¿Cuál es la probabilidad de que una cara sea 2?
 16. Se lanza un par de dados y dos monedas. Se gana si la suma de las caras es mayor que 7 o si los resultados de la moneda son iguales. ¿Cuál es la probabilidad de perder?
 17. En una compañía cuyos empleados son predominantemente de sexo femenino, se preguntó a las mujeres si son más importantes los estudios universitarios para un hombre que para una mujer. Los resultados se muestran en el cuadro siguiente:

¿Son más importantes los estudios universitarios para un hombre que para una mujer?

Edad	SI	NO	Total
18 – 24	17	43	60
Mayor de 24	26	14	40
Total	43	57	100

18. Utilizando esta información. Cuál es la probabilidad de que una empleada seleccionada al azar: a) conteste afirmativamente la pregunta. b) Contestase “si” o tenga “más de 24 años”. c) Tenga “más de 24 años”, dado que contestó “no”
19. Una caja contiene 4 fichas rojas y 3 blancas. Una segunda caja contiene 5 rojas y 2 blancas. Una de las cajas es escogida al azar, y extraída una ficha. ¿Si la ficha es de color blanco, cuál es la probabilidad de que la caja escogida haya sido la primera?
20. Una cesta contiene 3 rosas, 4 claveles y 1 orquídea; una segunda cesta contiene 2 rosas, 3 claveles y 4 orquídeas. William fue dejado por su novia, para reconquistarla decide pedirle perdón con una flor en mano. Toma una flor y es una orquídea, ¿cuál es la probabilidad de haberla tomado de la segunda cesta?
21. La probabilidad de que un hombre siga vivo dentro de 25 años es de $\frac{3}{5}$, y la de que su esposa lo esté es de $\frac{2}{3}$. Hallar la probabilidad de que en ese momento: a) ambos estén vivos. b) Sólo el hombre viva. c) Sólo viva la esposa. d) Al menos uno esté vivo.
22. Se eligen dos números distintos al azar entre el 1 y el 5. a) Si la suma de estos es impar, ¿cuál es la probabilidad de que el 2 sea uno de los números escogidos? b) Si uno de los números es el 2, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

23. Suponga que se distribuyen pelotas de colores en tres cajas idénticas de la siguiente manera:

	Caja 1	Caja 2	Caja 3
Rojo	2	4	3
Blanco	3	1	4
Azul	5	3	3

24. Una caja se selecciona aleatoriamente, de ella se saca una pelota, también aleatoriamente, y se observa que es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja 3 sea la que se escogió?
25. El III parcial de estadística del curso intensivo 2003 de la Carrera de Educación Básica Integral, se distribuye según la normal con un promedio de 10.10 puntos y una dispersión con respecto al promedio de 5.49 puntos. Se pide: i) Calcular la probabilidad de que un alumno cualquiera apruebe el examen. ii) Calcular la probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 14 y 16 puntos. iii) Probabilidad de obtener una calificación de 05 puntos o menos. iv) Probabilidad de obtener una calificación de 18 puntos o más. v) Se sabe que 68 alumnos presentaron el parcial, ¿Cuántos alumnos tienen calificaciones de 15 puntos o más?
26. Las estaturas de los estudiantes inscritos en el curso intensivo 2003 de estadística siguen una distribución normal con media igual a 1.62 metros y varianza de 0.25 metros. Calcular la probabilidad de: i) que un estudiante tenga una estatura de 1.70 metros o menos. ii) Que un estudiante mida entre 1.55 y 1.60 metros. iii) Que mida 1.80 metros o más.
27. Un grupo de personas poseen un peso promedio de 69 Kg. con una dispersión de 5 Kg. Se sabe que el 10% de estas personas tienen los pesos más elevados. ¿A partir de que peso se ubican dichas personas?
28. En la carrera de Educación Básica Integral de la ULA-Táchira, los alumnos cursan cuatro talleres diferentes: taller I, taller II, taller III y taller IV no pudiendo ningún alumno cursar dos talleres simultáneamente. Los alumnos están distribuidos en estas cuatro asignaturas de la siguiente forma: taller I 40%, taller II 30%, taller III 20% y taller IV 10%. Los porcentajes de repitientes de cada una de estas materias son respectivamente: 50%, 30%, 35% y 25%. Se selecciona un alumno al azar, y a la pregunta ¿es usted repitiente de taller?, contesta afirmativamente. Se pide calcular la probabilidad de que el taller que él cursa sea el III.
29. En la carrera de Administración el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres tienen más de 1.80 metros de estatura, además el 60% de los estudiantes son mujeres. Ahora bien se selecciona al azar un estudiante y es más alto que 1.80 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea hombre?
30. Cierta industrial produce televisores en dos fábricas. El 10% de los televisores producidos por la fábrica A son defectuosos, mientras que el 5% de los producidos por la fábrica B son asimismo defectuosos. Si la fábrica A produce 100.000 televisores por año, y la fábrica B produce 50.000 televisores por año. Se pregunta: a) ¿cuál es la probabilidad de comprar un televisor defectuoso? b) Si se compra un televisor y resulta defectuoso ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecho en la fábrica B?

REFERENCIAS

- Ardila, R. M. (2007). Fundamentos de Estadística. Para Investigadores en Educación. Un Modelo de Investigación Científica en Educación. Bogotá. ECOE EDICIONES.
- Bacchini, R. D & Vázquez, L.V. (2007). Estadística Probabilidad e Inferencia. Comicron Editorial S.A. Argentina.
- D Elia .G.E. (1999). Teoría de las Probabilidades Estadística Matemática. (Primera Edición). Buenos Aires: Librería y Editorial Alsina.
- Degroot, M. H. (1988). Probabilidad y Estadística. (Segunda Edición). México: Sistemas Técnicos de Edición, S.A. de C. V.
- Fuenlabra, V. I. (2002). Probabilidad y Estadística. México: Mc Graw Hill.
- Garza, T. (1996). Probabilidad y Estadística un Enfoque Intuitivo en Matemática. Nebraska – México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Johnson, R. & Kuby, P. (2004). Estadística Elemental. Lo Esencial. (Tercera Edición). México. International Thomson.
- LIPSCHUTZ, S., & SCHILLER, J. (2000).INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD ESTADÍSTICA. MADRID: MC GRAW HILL.
- LIPSCHUTZ, S., LIPSON, M. (2001). PROBABILIDAD. (SEGUNDA EDICIÓN). BOGOTÁ: MC GRAW HILL.
- López, C.R. (2006). Cálculo de Probabilidades e Inferencia Estadística con Tópicos de Econometría. (Cuarta Edición). Caracas: Universidad Católica Andrés Bello.
- Meyer, P. (1973). Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Pliego, F.J., & Montero, J.M., & Otros. (2006). Problemas de Probabilidad. (2ª Edición). Madrid: Internacional Thomson Editores Spain.
- Romero, J. (2008). Estadística y Probabilidad II. Bogotá. Editorial Santillana.
- Valera, I. R. (1996). Módulo de Probabilidad. (Segunda Edición).Maracay: Copiher.
- Velasco, S. G., & Wisniewski, P. M. (2001). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencia. México: MATH.
- Walpole, R. E., Myers, R. H. (1994). Probabilidad y Estadística. (Cuarta Edición). México: Mc Graw Hill

La Estadística como disciplina, herramienta o ciencia, se complementa con otras áreas del conocimiento. En el caso de la Probabilidad, esta constituye el puente entre lo descriptivo y lo inferencial.

PROBABILIDAD

TEORÍA Y PRÁCTICA integra un módulo instruccional del resultado de una serie de hechos investigados por los autores luego de reflexionar y disertar sobre las formas en que se viene impartiendo la cátedra de Estadística.

Dichas investigaciones se realizaron y otras vienen ejecutándose sustentadas en proyectos de investigación que han sido aprobados y avalados por el CDCHTA de la Universidad de Los Andes. Igualmente se cuenta con el apoyo del Grupo de Investigación de Evaluación y Mercadeo (EVMERGI) Con código ZG-EVM-NUTA-01-10-09.

Octubre 2015

Depósito Legal N° If07620153703588

